Feuille d'exercices du Chap. 3

Les exercices sans (∗) sont des applications directes du cours. Les exercices marqués (∗) sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \mu & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, avec $\lambda \neq \mu$.

1. Déterminer $P_A(X)$.
2. Sous quelles conditions sur a, b, c la matrice A est-elle semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$?
3. Sinon, quelle est la forme normale de Jordan de A ?

Exercice 2 (Examen 7/6/11)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, et P le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, puis en développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = (-1)^n\big(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\big).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P (on ne demande pas de calculer λ). En utilisant le calcul précédent (remplaçant X par λ), montrer que l'espace propre $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.
3. Écrivons $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Déduire de la question précédente la forme normale de Jordan de A. *Indication* : que peut-on dire de la dimension de l'espace propre V_λ, si les blocs de Jordan pour λ sont $J_{h_1}(\lambda), \dots, J_{h_p}(\lambda)$?

Exercice 3 (∗ Exam 8/6/2012)**.** Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, J_A sa forme normale de Jordan, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$, où u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par A.

1. On suppose que $J = J_A$ est formée d'un unique bloc de Jordan. Montrer alors que J est semblable à sa transposée ${}^tJ$. (Indication : considérer la base $\mathcal{D} = (f_n, \dots, f_1)$.)
2. Pour A arbitraire, montrer que A est semblable à sa transposée ${}^tA$. (Utiliser J_A et adapter le raisonnement de la question précédente au cas où J_A est formée de plusieurs blocs de Jordan $B_1, \dots, B_r$.)

Exercice 4 (Examen 28/6/11)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et soient $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(*) \qquad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. Dîtes, en le justifiant, quelle est la dimension de E.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.
3. Soit $D : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ (i.e. $D(\mathbf{u})_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que E est stable par D.
4. Montrer qu'une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $(a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$, pour un certain polynôme $Q = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ que l'on déterminera.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ les suites définies par $u_n = \lambda^n$, $v_n = n\lambda^{n-1}$ et $w_n = \binom{n}{2}\lambda^{n-2}$, où $\binom{n}{2}$ est le coefficient binomial $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Calculer $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u})$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{v})$ pour $i = 1, 2$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{w})$ pour $i = 1, 2, 3$.
6. Déduire des questions précédentes que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une racine double (resp. triple) de P, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$) appartiennent à E. Montrer d'autre part que les suites $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont linéairement indépendantes (considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $xu_i + yv_i + zw_i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$).
7. On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est racine triple de P. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 0 = t_2$. Exprimer t_n en fonction de n et de λ. D'autre part, notant d l'endomorphisme de E induit par D, écrire la matrice de d dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ introduite à la question précédente.
8. On suppose que $P = (X - \lambda)^2(X - \mu)$ avec $\mu \neq \lambda$ et $\lambda\mu \neq 0$. Donner trois suites $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ appartenant à E et montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

Exercice 5 ($*$)**.** Combien y-a-t-il de classes de similitude de matrices $B \in M_4(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est $P_B(X) = (X - 1)^2(X - 2)^2$?

Exercice 6 (CC 2011-12)**.** Soit $u \in M_{10}(\mathbb{R})$ un endomorphisme nilpotent tel que $u^3 = 0$, $\mathrm{rang}(u^2) = 2$ et $\mathrm{rang}(u) = 5$.
1) Déterminer la partition $\mathbf{q}$ associée à la suite des noyaux de u et dessiner son diagramme.
2) Déterminer la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$.
3) Écrire la matrice de la forme normale de Jordan de u.

Exercice 7 (CC 2011–12)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ défini par A.
1) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2) Pour chaque racine λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)$, puis de $\mathrm{Ker}\big((A - \lambda I_4)^2\big)$, etc. jusqu'à obtenir l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.
3) Donner la forme normale de Jordan J_A de A, et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^4$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par A.

1) Calculer $P_A(X)$ et déterminer ses racines.
2) Pour chaque racine λ, déterminer une base de chaque $\operatorname{Ker}\big((A-\lambda I_4)^i\big)$, pour $i = 1, 2, \dots$.
3) Donner la forme normale de Jordan J_A de A, ainsi qu'une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$.

Exercice 9 (Partiel mars 2012)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

1) Calculer $P_A(X)$ et montrer que $P_A(X) = -(X-\lambda)^2\,(X-\mu)^3$ pour deux réels λ, μ qu'on déterminera.
2) Soit $C = A - \mu I_5$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(C)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{I_5}{C}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\frac{Q}{C' = CQ}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(C)$ dans $\operatorname{Ker}(C^2)$ en calculant CC' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{Q}{CC'}\right)$. Puis déterminer $\operatorname{Ker}(C^3)$ sans calculs supplémentaires.
3) Soit $B = A - \lambda I_5$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(B)$ en faisant des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{I_5}{B}\right)$ pour arriver à un couple de matrices $\left(\frac{P}{B' = BP}\right)$, puis déterminer une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(B)$ dans $\operatorname{Ker}(B^2)$ en calculant BB' et en faisant, si nécessaire, des opérations sur les colonnes du couple $\left(\frac{P}{BB'}\right)$.
4) Donner, pour chaque valeur propre de A, la partition associée à la suite des noyaux, et la partition transposée. Puis donner la forme normale de Jordan J_A de A.
5) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$. Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de $\mathbb{R}^5$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_A$.

Exercice 10 (CC 2010–11)**.** On rappelle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Considérant A comme élément de $M_2(\mathbb{C})$ et notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$, déterminer $P_A(X)$ et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A. Écrire la matrice de passage $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, calculer son inverse P^{-1}, et déterminer sans calcul la matrice $D = P^{-1}AP$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tD)$, puis écrire $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$ comme une matrice à coefficients réels (on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$).
3. Donner une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = -I_2$.

Exercice 11 (Partiel mars 2012)**.** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle

$$(*) \qquad y'' = \beta\, y' + \alpha\, y.$$

1) Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction de classe C^∞ définie par $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie une équation différentielle $Y' = AY$, pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera. Citer une formule du cours exprimant $Y(t)$ en fonction de A et de $Y(0)$.
2) Soit T une indéterminée, calculer le polynôme caractéristique $P = P_A(T)$ de A. Considérons A comme élément de $M_2(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ est vecteur propre de A.
3) On suppose que P a dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes λ et μ. Déterminer sans calculs supplémentaires une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, puis calculer $\mathrm{dét}(Q)$ et Q^{-1}. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} a\, e^{\lambda t} + b\, e^{\mu t} & c\, e^{\lambda t} + d\, e^{\mu t} \\ a' e^{\lambda t} + b' e^{\mu t} & c' e^{\lambda t} + d' e^{\mu t} \end{pmatrix}$$

pour $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ que l'on exprimera en fonction de λ et μ.
4) On suppose que $\lambda = p + iq$ et $\mu = p - iq$, avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$. Montrer alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(tA) = \frac{e^{pt}}{q} \begin{pmatrix} f\cos(qt) + g\sin(qt) & h\sin(qt) \\ h'\sin(qt) & f'\cos(qt) + g'\sin(qt) \end{pmatrix}$$

pour des réels f, g, h, f', g', h' que l'on exprimera en fonction de p et q.
5) Déterminer la condition sur α, β dans l'équation différentielle $(*)$ pour que A ait deux valeurs propres réelles $\lambda \neq \mu$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha = -3$, $\beta = 4$ et donner une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y'' - 4y' + 3y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
6) De même, déterminer la condition sur α, β pour que A ait deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Montrer que cette condition est vérifiée si $\alpha = -2 = \beta$. En déduire une formule explicite pour la solution $y(t)$ de l'équation $y'' + 2y'' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1 = f'(0)$.

Exercice 12 ($*$ Partiel mars 2012)**.** Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, E un sous-espace vectoriel de V de dimension d. En utilisant la propriété universelle de l'espace quotient V/E, montrer que l'espace dual $(V/E)^*$ s'identifie à un sous-espace de V^* que l'on déterminera.

Exercice 13 (CC 2010–11)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associé à A. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. Pour chaque racine λ de $P_A(X)$ donner, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, la dimension de l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.
3. Pour chaque racine λ de $P_A(X)$, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)$ puis, si nécessaire, de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^2$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^3$, etc.
4. Déterminer la forme normale de Jordan J_A de A.
5. Plus précisément, pour chaque racine λ de $P_A(X)$, donner une base $\mathcal{C}_\lambda$ de $V_{(\lambda)}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ réunion des $\mathcal{C}_\lambda$, égale J_A. **Indication :** on

prendra $v_1 = (A - I_5)(e_1)$ et v_5 un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq 1$. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis déterminer P^{-1} (exprimer les vecteurs e_j en fonction des vecteurs v_i).

6. Soit s l'endomorphisme égal à $\lambda\mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ de u et soit S sa matrice dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice $N = J_A - S$ et calculer N^2 puis $\exp(tN)$ et $\exp(tJ_A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
7. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞
$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad X'(t) = A \cdot X(t).$$
Soit $\mathcal{C}$ la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de la question 5. On définit les fonctions $(y_1(t), \dots, y_5(t))$ par l'égalité $X(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2 + \cdots + y_5(t)v_5$ et l'on pose
$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}.$$
Exprimer $Y(t)$ en fonction de $X(t)$ et P, puis la dérivée $Y'(t)$ en fonction de $X'(t)$ et P. Montrer que $Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$ pour une matrice B que l'on déterminera, puis calculer $\exp(tB)$ et exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$, puis en fonction de $X(0)$.
8. On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs $Y(100)$ puis $X(100)$.

Exercice 14 (∗ Partiel 1/4/11)**.** Soient V un k-espace vectoriel, $u \in \mathrm{End}_k(V)$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $x \in V$ tels que $u^d(x) = 0$ mais $u^{d-1}(x) \neq 0$ (par définition, $u^0 = \mathrm{id}_V$). Montrer que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\}$ est libre. (Considérer une relation de dépendance linéaire $a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{d-1}u^{d-1}(x) = 0$ et lui appliquer u^{d-1}, puis u^{d-2}, etc.)

Exercice 15 (∗ Partiel 1/4/11)**.** Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit D l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui à tout $f \in \mathcal{E}$ associe la fonction dérivée f'. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$, on note E_P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des $f \in \mathcal{E}$ qui sont annulés par l'endomorphisme $P(D)$, c.-à.-d., si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, alors
$$E_P = \{f \in \mathcal{E} \mid D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_1D(f) + a_0f = 0\}.$$
On admet que $\dim E_P = n = \deg(P)$.

1. Montrer que chaque sous-espace E_P est stable par D.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, écrire, en utilisant la formule du binôme, $(D - \lambda\mathrm{id}_{\mathcal{E}})^p$ comme une somme de termes a_iD^i. Quelle est la dimension de $E_{(X-\lambda)^p}$?

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N}$, soit $f_{\lambda,i} \in \mathcal{E}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{t^i}{i!}\exp(\lambda t)$. On pose $Q = (X-\lambda)^p$. Pour tout $i = 0, 1, \ldots, p-1$, calculer $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(f_{\lambda,i})$. En utilisant l'exercice 14, montrer que les fonctions $f_{\lambda,i}$, pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$, forment une base $\mathcal{C}_Q$ de E_Q.
4. Soit $P = \displaystyle\prod_{s=1}^{r}(X-\lambda_s)^{p_s}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et soient $V = E_P$ et $n = \dim(V) = p_1 + \cdots + p_r$. On note u l'endomorphisme de V induit par D, c.-à.-d., $u(f) = D(f)$ pour tout $f \in V$. Montrer que λ_s est valeur propre de u, pour $s = 1, \ldots, r$. On note $V_{(\lambda_s)}$ l'espace caractéristique de u correspondant à λ_s.
5. Pour $s = 1, \ldots, r$, soit $Q_s = (X-\lambda_s)^{p_s}$. Montrer que $E_{Q_s} \subset E_P = V$.
6. Pour toute valeur propre λ de u, de multiplicité algébrique m, on rappelle que
$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^m = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^{m+1} = \cdots = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^n\,.$$
Montrer que chaque E_{Q_s} est contenu dans l'espace caractéristique $V_{(\lambda_s)}$ de u. En utilisant un résultat du cours, en déduire qu'on a l'égalité $E_{Q_s} = V_{(\lambda_s)}$ pour tout $s = 1, \ldots, r$, et que le polynôme caractéristique de u est $(-1)^n P$.
7. En utilisant le même résultat du cours, montrer que les fonctions
$$f_{\lambda_1,0}, \ldots, f_{\lambda_1,p_1-1},\ f_{\lambda_2,0}, \ldots, f_{\lambda_2,p_2-1},\ \cdots,\ f_{\lambda_r,0}, \ldots, f_{\lambda_r,p_r-1}$$
(c.-à.-d., les fonctions f_{λ_s,i_s}, pour $s = 1, \ldots, r$ et $0 \leq i_s \leq p_s - 1$), forment une base $\mathcal{C}$ de V.
8. Écrire la matrice de u dans cette base. (La présenter sous la forme d'une matrice diagonale par blocs.)