Feuille d'exercices du Chap. 8

Exercice 1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Montrer que les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ et $ie_1,\dots,ie_n$ forment une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et que le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $e_1,\dots,e_n$, resp. $ie_1,\dots,ie_n$, est

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n \mid x_s\in\mathbb{R},\quad \forall s=1,\dots,n\}$$
$$\text{resp.}\quad i\mathbb{R}^n = \{(iy_1,\dots,iy_n)\in\mathbb{C}^n \mid y_s\in\mathbb{R},\quad \forall s=1,\dots,n\}.$$

Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n\oplus i\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ comme $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exercice 2. Soit w un nombre complexe non nul, écrivons $w=u+iv=\rho e^{i\theta}$ avec $u,v\in\mathbb{R}$ et $\rho\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in[0,2\pi[$, de sorte que $u=\rho\cos\theta$ et $v=\rho\sin\theta$.

1. Montrer que l'application $f_w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto wz$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel « par restriction des scalaires », i.e. la multiplication $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ induit, par restriction, une application $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $(r,z)\mapsto r\cdot z=rz$, qui munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel : les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés car la multiplication de $\mathbb{C}$ est associative, distributive par rapport à l'addition, et l'élément $1\in\mathbb{R}$ est l'élément neutre pour la multiplication, i.e. on a, pour tout $r,s\in\mathbb{R}$, $z,z'\in\mathbb{C}$:
$$(rs)\cdot z = r\cdot(s\cdot z),\qquad (r+s)\cdot z = r\cdot z+s\cdot z,\qquad r\cdot(z+z') = r\cdot z + r\cdot z',\qquad 1\cdot z = z.$$
Montrer que l'application $f_w:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, que $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et écrire la matrice $M(w)$ de f_w dans la base $(1,i)$ en fonction de u et v, puis de ρ et θ.
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice $M(w)$. Dans quels cas $M(w)$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?
4. On munit $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i\simeq\mathbb{R}^2$ du produit scalaire euclidien usuel $(\ \mid\ )$, pour lequel la base $(1,i)$ est orthonormée, c.-à.-d., $(a+bi\mid a'+b'i)=aa'+bb'$. Dans quel cas $M(w)$ est-elle une isométrie de $\mathbb{R}^2$? Quelle est sa nature dans ce cas ?
5. Soit $\sigma:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ l'application $z\mapsto\overline{z}$. Montrer que σ est $\mathbb{R}$-linéaire (mais pas $\mathbb{C}$-linéaire) et écrire sa matrice dans la base $(1,i)$.
6. Montrer que l'application $g_w:z\mapsto w\overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et écrire sa matrice $N(w)$ dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Dans quel cas est-ce une symétrie orthogonale ?

Exercice 3 $(*)$. Pour tout $Z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$, on note $\overline{Z}=\begin{pmatrix}\overline{z}_1\\ \vdots\\ \overline{z}_n\end{pmatrix}$ et on l'appelle le conjugué du vecteur Z. Remarquons que $\overline{zZ}=\overline{z}\,\overline{Z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que si $v_1,\dots,v_r\in\mathbb{C}^n$ sont linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_r$.
2. Pour tout $B\in M_n(\mathbb{C})$, montrer que $\overline{B\cdot Z}=\overline{B}\cdot\overline{Z}$.
Désormais, on fixe une matrice $A\in M_n(\mathbb{R})\subset M_n(\mathbb{C})$ et l'on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par A ; comme $A\in M_n(\mathbb{R})$ on a donc $\phi(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que si $\lambda\in\mathbb{C}$ est valeur propre de A, il en est de même de $\overline{\lambda}$. (Considérer le polynôme caractéristique $P_A(X)\in\mathbb{R}[X]$.) Par conséquent, les valeurs propres, deux à deux distinctes, de A dans $\mathbb{C}$ sont de la forme $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\lambda_1,\overline{\lambda}_1,\dots,\lambda_q,\overline{\lambda}_q$, avec $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ et les $\lambda_k\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de A et soit $V_\alpha = \{w \in \mathbb{C}^n \mid Aw = \alpha\, w\}$ l'espace propre associé. Montrer que si $w = u + iv$ (avec $u, v \in \mathbb{R}^n$) appartient à V_α, alors $u, v \in V_\alpha$. En déduire qu'il existe des vecteurs $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}^n$ formant une $\mathbb{C}$-base de V_α. (Indication : montrer que V_α est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par des éléments de $\mathbb{R}^n$.)
5. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ une valeur propre non réelle de A et soit $(w_1, \dots, w_r)$ une $\mathbb{C}$-base de $V_\lambda = \{w \in \mathbb{C}^n \mid Aw = \lambda w\}$. Montrer que $(\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_r)$ est une $\mathbb{C}$-base de $V_{\overline{\lambda}} = \{w \in \mathbb{C}^n \mid Aw = \overline{\lambda} w\}$. (Indication : montrer que $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda \leq \dim_{\mathbb{C}} V_{\overline{\lambda}}$ puis échanger les rôles de λ et $\overline{\lambda}$.) Puis, écrivant $w_k = u_k + iv_k$ avec $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$, montrer que les vecteurs $(u_1, v_1, \dots, u_r, v_r)$ engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\lambda = V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$, donc en forment une $\mathbb{C}$-base $\mathcal{C}_\lambda$. Enfin, écrire la matrice dans cette base de la restriction ϕ_λ de ϕ à E_λ.
6. On suppose que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, i.e. que
$$\mathbb{C}^n = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_p} \oplus E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_q}.$$
Montrer que les n éléments de $\mathbb{R}^n$ construits dans les questions 4) et 5) engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, donc sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, a fortiori sur $\mathbb{R}$, donc forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. Puis, écrivant $\lambda_\ell = a_\ell + ib_\ell$, écrire la matrice de ϕ dans cette base.

Exercice 4 (∗). Soient K un corps, k un sous-corps de K, et E, F des K-espaces vectoriels.

1. Montrer que E est « par restriction des scalaires » un k-espace vectoriel, c.-à.-d., que la loi externe $K \times E \to E$ induit, par restriction à $k \times E$, une application $k \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, qui munit E d'une structure de k-espace vectoriel.
2. Montrer que toute application K-linéaire $f : E \to F$ est aussi k-linéaire, lorsqu'on considère E et F comme des k-espaces vectoriels au moyen de la question 1.

Exercice 5. On considère l'application $\phi : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(A\,{}^t\overline{B})$.

1. Montrer que pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Tr}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.
2. Montrer que ϕ est une forme hermitienne sur $E = M_n(\mathbb{C})$.
3. Pour tout $i = 1, \dots, n$, calculer le terme d'indice (i, i) de $A\,{}^t\overline{A}$. En déduire que ϕ est définie positive.

Exercice 6. On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\ |\ )$ usuel.

1. Dire sans calcul, en citant un résultat du cours, pourquoi les matrices suivantes sont diagonalisables dans une base orthonormée ; puis, pour chacune, calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres :
$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & i \\ -i & 4 & 1 \\ -i & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. (∗) Même question pour la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & -1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien $(\ |\ )$ usuel. Montrer que la matrice suivante est unitaire et donner une base orthonormée de vecteurs propres :
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2i & 1+i & 1+i \\ -1-i & 1+2i & 1-i \\ -1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix}.$$