Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, TE (Travail Encadré) n°1

Exercice 1. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par $a_0 = 513/512$ et $a_1 = -255/256$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. Donner deux suites géométriques non nulles $\mathbf{v} = (p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $p \neq r$) appartenant à $\mathcal{S}$.
3. Montrer que les deux suites $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ forment une base de $\mathcal{S}$.
4. Déterminer $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{a} = s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w}$.
5. Calculer a_{15}.

Exercice 2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $P^{(i)}$ le i-ème polynôme dérivé de P, c.-à.-d., $P^{(1)} = P'$ et $P^{(i+1)} = (P^{(i)})'$ pour $i \geq 1$. On fixe un entier $d \geq 2$ et des réels $a_1, \dots, a_d$. On considère l'application

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \qquad P \mapsto P + \sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}.$$

1. Montrer que ϕ est linéaire et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ envoie le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ dans lui-même.
2. Montrer que ϕ est bijective.

Exercice 3. Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} u(\vec{i}) &= \vec{i} + (1+\sqrt{3})\vec{j} + (1-\sqrt{3})\vec{k} \\ u(\vec{j}) &= (1-\sqrt{3})\vec{i} + \vec{j} + (1+\sqrt{3})\vec{k} \\ u(\vec{k}) &= (1+\sqrt{3})\vec{i} + (1-\sqrt{3})\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

1. Écrire dans la base $\mathcal{B}$ la matrice A de u, puis celle de $u^2 = u \circ u$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = \sqrt{3}(\vec{i} - \vec{j})$, $v_2 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $v_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Calculer $u(v_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Soient $v \in \mathbb{R}^3$ et (x', y', z') ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $u(v)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Résoudre au choix l'une des questions suivantes :

1. Déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des bases de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des équations de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.