Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, TE2a Groupes 1,2,3 (22/3/2011)
Noté sur 75

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Exercice 1 (52 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associé à A.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. (5 pts) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. (5 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$ donner, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, la dimension de l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.
3. (10 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)$ puis, si nécessaire, de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^2$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_5)^3$, etc.
4. (4 pts) Déterminer la forme normale de Jordan J_A de A.
5. (5 + 4 = 9 pts) Plus précisément, pour chaque racine λ de $P_A(X)$, donner une base $\mathcal{C}_\lambda$ de $V_{(\lambda)}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ réunion des $\mathcal{C}_\lambda$, égale J_A. **Indication :** on prendra $v_1 = (A - I_5)(e_1)$ et v_5 un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq 1$. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis déterminer P^{-1} (exprimer les vecteurs e_j en fonction des vecteurs v_i).
6. (1 + 2 + 4 = 7 pts) Soit s l'endomorphisme égal à $\lambda\mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ de u et soit S sa matrice dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice $N = J_A - S$ et calculer N^2 puis $\exp(tN)$ et $\exp(tJ_A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
7. (4 + 3 + 2 = 9 pts) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad X'(t) = A \cdot X(t).$$

   Soit $\mathcal{C}$ la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de la question 5. On définit les fonctions $(y_1(t), \ldots, y_5(t))$ par l'égalité $X(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2 + \cdots + y_5(t)v_5$ et l'on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}.$$

   Exprimer $Y(t)$ en fonction de $X(t)$ et P, puis la dérivée $Y'(t)$ en fonction de $X'(t)$ et P. Montrer que $Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$ pour une matrice B que l'on déterminera, puis calculer $\exp(tB)$ et exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$, puis en fonction de $X(0)$.
8. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur $Y(100)$.

Exercice 2 (23 pts)**.** Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_9)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{10}$ et soit u l'endomorphisme défini par $u(e_j) = e_{j+2}$ pour $j = 0, 1, \ldots, 7$ et $u(e_8) = e_0$, $u(e_9) = e_1$, c.-à.-d., qui envoie $e_{j \bmod 10}$ sur $e_{j+2 \bmod 10}$.

1. (6 pts) Montrer, **sans calculer les espaces propres** et en citant un résultat du cours, que u est diagonalisable.
2. (4 pts) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de u est contenu dans un ensemble E à 5 éléments, que l'on précisera.
3. (3 pts) On note ξ le nombre complexe $\exp(2i\pi/5)$ (où $i = \sqrt{-1}$). Calculer l'image par u des vecteurs $v_0 = e_0 + e_2 + e_4 + e_6 + e_8$ et $v_1 = e_0 + \xi^{-1}e_2 + \xi^{-2}e_4 + \xi^{-3}e_6 + \xi^{-4}e_8$.
4. ($4 + 4 + 2 = 10$ pts) Construire des vecteurs propres $v_2, \dots, v_9$ de u, similaires aux précédents, et montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{C}^{10}$, puis écrire la matrice de u dans cette base.