Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Devoir du 24 mars 2010 (groupes 2,3,10)

Pour les exercices demandant un calcul, détaillez les étapes du calcul ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. Par ailleurs, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte 5 exercices et est noté sur 75.

On rappelle qu'on note $E_{ij} \in M_n(k)$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1.

Exercice 1 (12pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Déterminer A^{-1}.

Exercice 2 (30pts)**.**

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (2pts)
2. Soit $B = E_{21} + E_{32} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer B^2 et B^3, puis en utilisant la formule du binôme, calculer $(I_3 + B)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (0,5+0,5+2pts)
3. Soit $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_N(X)$. (5pts)
4. Montrer que $N^3 = 0$ et déterminer $\mathrm{Ker}(N^2)$. (5pts)
5. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, montrer que si $v \notin \mathrm{Ker}(N^2)$ alors $\mathcal{C} = (v, Nv, N^2v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (5pts)
6. Choisissez explicitement un v comme ci-dessus, écrivez la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{C}$ et calculez P^{-1}. (1+4pts)
7. Calculer $(I_3 + N)^{20}$. (5pts)

Exercice 3 (3+3+6=12pts)**.**

1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 8} \in M_8(\mathbb{R})$. Dans la formule donnant $\mathrm{dét}(A)$, dîtes, en justifiant votre réponse, quel est le signe correspondant au terme $a_{18}a_{27}a_{31}a_{46}a_{53}a_{64}a_{72}a_{85}$.

Exercice 4 (6pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(e_1, e_1) = a$, $\phi(e_2, e_2) = c$, $\phi(e_1, e_2) = \phi(e_2, e_1) = b$. Pour tout $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$, exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de a, b, c et x_1, x_2, y_1, y_2. (2pts)
2. (2+2pts) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les formes bilinéaires suivantes. Pour chacune, dîtes si elle est symétrique ou alternée, et déterminer sa matrice dans $\mathcal{B}$, son rang et son noyau :

$$\phi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1, \qquad \phi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \sqrt{6}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Exercice 5 (15pts)**.** Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. (0,5+1pts)
2. On note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. (1,5pts)
3. Montrer que pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle, on a $\mathrm{Tr}({}^tBB) > 0$. (5pts)
4. On note $\phi_{\mathcal{S}}$ (resp. $\phi_{\mathcal{A}}$) la restriction de ϕ à $\mathcal{S}$ (resp $\mathcal{A}$). Montrer que $\phi_{\mathcal{S}}$ et $\phi_{\mathcal{A}}$ sont non-dégénérées. (1+1pts)
5. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont orthogonaux pour ϕ ; en déduire que ϕ est non-dégénérée. (3+2pts)