Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, TE4a Groupes 1,2,3 (19/5/2011)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **60**

Exercice 1 (11 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2, e_3)$, où O désigne le point $(0,0,0)$. Soit f la symétrie orthogonale glissée par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y+z=2$, de vecteur de glissement $u = e_1 - e_3$.

1. (2 pts) Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. (1 pt) Déterminer un point $I \in \mathcal{P}$.
3. (2 pts) Si v est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et si s désigne la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $(\mathbb{R}v)^\perp$, rappeler la formule exprimant $s(w)$ en fonction de w et v, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$.
4. (6 pts) Soit g la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. Pour tout point $M = (x,y,z)$ de $\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis le vecteur $\overrightarrow{If(M)}$ en fonction de (x,y,z), puis donner les coordonnées (x',y',z') du point $M' = f(M)$.

Exercice 2 (12 pts)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien, muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit e un réel ≥ 0 ; on considère l'ensemble $\mathcal{C}_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (1-e)x^2 - 2x = 0\}$.

1. (1,5 pts) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_e$ lorsque $e = 0$?
2. (7,5 pts) Désormais, on suppose $e > 0$. Donner la forme normale de l'équation de $\mathcal{C}_e$ et déterminer en fonction de e la nature de la conique $\mathcal{C}_e$. Lorsque $\mathcal{C}_e$ est une ellipse, déterminer les coordonnées de son centre de symétrie I_e et de ses deux foyers F_e et F'_e.
3. (3 pts) Pour $e = \dfrac{1}{2}, 1, 2$, faire un dessin représentant $\mathcal{C}_e$.

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.
2. (6,5 pts) Déterminer les valeurs propres de A, puis une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3. (2 pts) En citant un théorème du cours, déterminer la signature de la forme quadratique $q(x,y,z) = -7x^2 + 8xy - 8xz + 5y^2 - 4yz + 5z^2$.

Exercice 4 (18 pts)**.** On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $(\ \mid\ )$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée. Soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

1. (3 pts) Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire et bijective.
2. (2 pts) Pour tout $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u,v) \in E$ tel que $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w) = (f(u,v) \mid w)$ pour tout $w \in E$.
3. (3 pts) Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ est bilinéaire, et qu'elle est alternée (i.e. $f(u,u) = 0$ pour tout $u \in E$).
4. (2 pts) Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et prenant $w = e_1$, puis $w = e_2$ et $w = e_3$, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) dans $\mathcal{B}_0$ de $f(u,v)$.
5. (2 pts) Soient $u, v, w \in E$. Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, montrer que $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(u,v,w) = \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w)$.
6. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et soit $p \in E$ l'unique vecteur tel que $\mathcal{B} = (u,v,p)$ soit une base orthonormée directe de E. En utilisant la question précédente montrer que, pour tout $w \in E$, on a $(f(u,v) \mid w) = (p \mid w)$. Que peut-on en conclure ?
7. (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \in O(3)$. On suppose que $t_3 \neq 0$. Déduire des questions 4 et 6 que $u_1v_2 - u_2v_1 = \pm t_3$, et que $A \in \mathrm{SO}(3)$ si et seulement si $u_1v_2 - u_2v_1 = t_3$.

Exercice 5 (9 pts)**.** Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit q la forme quadratique associée.

1. (1 pt) Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.