Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, TE4b Groupes 4,5,6 (20/5/2011)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **5** exercices et est noté sur **60**

Exercice 1 (15 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient A le point $(1,1,1)$, w le vecteur $e_1 + 2e_2 - e_3$, et f le vissage d'axe $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}w$, de vecteur de vissage w, et d'angle $\pi/2$ (la droite $D = \mathbb{R}w$ étant orientée par w).

1. (2 pts) Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.
2. (4 pts) Déterminer un vecteur u orthogonal à $w' = \dfrac{1}{\|w\|}w$, puis un vecteur unitaire v' orthogonal à $u' = \dfrac{1}{\|u\|}u$ et à w' ; on choisira v' de façon que la base orthonormée $\mathcal{C} = (u', v', w')$ soit directe. Déterminer P^{-1}.
3. (1 + 3 = 4 pts) Écrire les matrices $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f})$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \dfrac{1}{6}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $a + b\sqrt{6}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$).
4. (5 pts) Soit g la rotation affine d'axe $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}w$ et d'angle $\pi/2$ (la droite $D = \mathbb{R}w$ étant orientée par w). Pour tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{Ag(M)}$ puis le vecteur $\overrightarrow{Of(M)}$ en fonction de (x, y, z).

Exercice 2 (7 pts)**.** Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Pour $A, B \in \mathcal{P}$, on note $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Soient $F = (-1, 0)$ et $F' = (1, 0)$ et soit $\mathcal{C} = \{M = (x, y) \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 4\}$.

1. (4 pts) Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $q(x, y) = 1$, où q est une forme quadratique que l'on déterminera.
2. (1,5 pts) Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?
3. (1,5 pts) Faire un dessin représentant $\mathcal{C}$ (on rappelle que $\sqrt{3} = 1,732\ldots$).

Exercice 3 (10 pts). 1. (3pts) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer, en utilisant des résultats du cours, qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D + N$, où D est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ (les λ_i n'étant pas nécessairement distincts), et N une matrice triangulaire supérieure stricte (i.e. avec des zéros sur la diagonale) qui commute avec D.
2. (4 pts) En déduire que $\mathrm{dét}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$. (On rappelle que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.)
3. (3pts) On rappelle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$. Soit alors $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}(n)$.

Exercice 4 (19 pts)**.** Soient Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, ϕ sa forme polaire et $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $d = 1, \ldots, n$, on note A_d la sous-matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le d}$ et $\Delta_d = \mathrm{dét}(A_d)$. (On a donc $A_1 = (a_{11})$ et $A_n = A$).

1. (3 pts) On suppose que $\Delta_{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique $(n-1)$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que le vecteur $f_n = e_n - x_1e_1 - \cdots - x_{n-1}e_{n-1}$ vérifie $\phi(e_i, f_n) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. (On ne demande pas de calculer les x_i).
2. (1 + 3 = 4pts) Écrire la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$ et calculer son déterminant. En écrivant la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$, en déduire que $Q(f_n) = \Delta_n/\Delta_{n-1}$.
3. (3 pts) On suppose que $\Delta_p \neq 0$ pour tout $p = 1, \ldots, n$. Déterminer en fonction de $(\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \cdots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$ la signature de Q.
4. (4 pts) On suppose $n \geq 4$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, c.-à.-d., $a_{ii} = 2$, $a_{12} = a_{21} = -3 = a_{n-1,n} = a_{n,n-1}$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ pour $i = 2, \ldots, n-2$, et tous les autres $a_{i,j}$ sont nuls. Calculer Δ_1 et Δ_2. Puis, pour

$d = 3, \dots, n-1$, montrer en développant Δ_p par rapport à la d-ème colonne, que $\Delta_d = a\Delta_{d-1} - b\Delta_{d-2}$ pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ que l'on déterminera. En utilisant cette formule calculer Δ_3, Δ_4, Δ_5.

5. (2 pts) Les calculs précédents vous suggèrent-ils une formule pour la valeur de Δ_d, pour $d = 1, 2, \dots, n-1$? Si oui, démontrez cette formule par récurrence sur d.
6. (3 pts) Calculer Δ_n (en le développant par rapport à la dernière colonne) puis déterminer la signature de ϕ.

Exercice 5 (9 pts)**.** Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit q la forme quadratique associée.

1. (1 pt) Exprimez $q(x_1, \dots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.