Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé du devoir 2 du 9 mars 2012

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) (2,5 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.

Solution : $\begin{vmatrix} 2-X & -3 & -6 \\ 0 & 5-X & 6 \\ -1 & -5 & -5-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-25+30)-(-18+30-6X) = (2-X)(X^2+5-6) = (2-X)(X-1)(X+1)$.

2) (3 pts) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Solution : A est une matrice de taille 3 qui a 3 valeurs propres distinctes : $1, 2, -1$, donc A est diagonalisable, et l'on sait de plus que chaque espace propre est de dimension 1.

3) (4,5 pts) Déterminer une base de chaque espace propre V_λ en faisant des opérations sur les colonnes de $A - \lambda I_3$.

Solution : Faisons des opérations sur les colonnes de la matrice $A - I_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + 6C_1]{C_2 \to C_2 + 3C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & -8 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - (3/2)C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

donc l'espace propre $V_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Puis faisons des opérations sur les colonnes de la matrice $A - 2I_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + 3C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

donc l'espace propre $V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin, faisons des opérations sur les colonnes de la matrice $A + I_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + 2C_1]{C_2 \to C_2 + C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

donc l'espace propre $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) (4 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.

Solution :

$$\begin{vmatrix} -2-X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4-X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1-X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \begin{vmatrix} -1-X & -1 & -4 & -2 \\ X+1 & 4-X & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1-X & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1-X & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3-X & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix} = -(X+1) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ -1 & -1 & -X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2}$$

$$-(X+1) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -1 & 1-X & X-1 \\ -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} -(X+1) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -2 & -X & 0 \\ -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (X^2-1) \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= (X^2-1)(X^2-3X+2) = (X-1)^2(X-2)(X+1).$$

2) (4 pts) Compte tenu du résultat obtenu en 1), quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable ?

Solution : D'après le cours, on sait que B est diagonalisable si et seulement si, pour toute valeur propre λ, la multiplicité géométrique égale la multiplicité algébrique. Comme les valeurs propres -1 et 2 sont de multiplicité algébrique 1, la question ne se pose que pour la valeur propre 1, de multiplicité algébrique 2, donc : B est diagonalisable si et seulement $\dim \operatorname{Ker}(B - I_4) = 2$.

3) (2 pts) Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.

Solution : Faisons des opérations sur les colonnes de la matrice $B - I_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_4]{\substack{C_1 \to C_1 - C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_4}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\frac{P}{B'}\right).$$

Comme les colonnes non nulles de B' sont échelonnées (après permutation des colonnes 2 et 3), on en déduit que $\operatorname{Ker}(B - I_4)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1) (2 pts) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer $J^2 e_i$, $J^3 e_i$ et $J^4 e_i$.

Solution : On a $Je_1 = 0$ et $Je_i = e_{i-1}$ pour $i = 2, 3, 4$. On en déduit que $J^2 e_1 = 0 = J^2 e_2$, $J^2 e_3 = e_1$ et $J^2 e_4 = e_2$, puis $J^3 e_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $J^3 e_4 = e_1$, et enfin $J^4 = 0$.

2) (1 pt) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4.

Solution : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^4 = 0.$

3) (4 pts) Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$; on suppose que $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?

Solution : Comme $A^2 = J$ et $J^4 = 0$ on a $A^8 = 0$. Donc, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\lambda^8 = 0$ (voir 2.2.5.1 du poly), donc $\lambda = 0$. Comme $P_A(X) \in \mathbb{C}[X]$ est scindé et a 0 comme seule racine, on a donc $P_A(X) = (-X)^4 = X^4$.

4) (3 pts) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Solution : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $A^4 = 0$, et comme $A^2 = J$ on obtient $J^2 = 0$, ce qui est une contradiction puisque $J^2 \neq 0$. Donc il n'existe pas de matrice $A \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = J$.

Exercice 4 (12 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

1) (3 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.

Solution : En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient que $P_A(X)$ égale :

$$(2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ -3 & -1-X & 3 \\ -2 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_2} (2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -3 & -1-X & 2-X \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2 \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -3 & -1-X & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} (2-X)^2 \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -2-X & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-X)^2\,(X^2+2X+1) = (X-2)^2\,(X+1)^2.$$

2) (8 pts) Pour chaque racine λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_4)$, puis de $\mathrm{Ker}\left((A-\lambda I_4)^2\right)$, etc. jusqu'à obtenir l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.

Solution : Posons $B = A + I_4$ et faisons des opérations sur les colonnes de $B = A + I_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \to C_1 - C_2]{C_3 \to C_3 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + 3C_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ \hline B' \end{pmatrix}, \quad \text{où } B' = BP.$$

Donc, comme les colonnes non nulles de B' sont échelonnées, $\mathrm{Ker}(B)$ est engendré par le vecteur $v_1 = e_1 + e_3$. Pour la suite, on a deux méthodes.

<u>1ère méthode</u>. Calculons $B^2 = (A + I_4)^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc on voit que $B^2 = (A + I_4)^2$ est de rang 2, et $\mathrm{Ker}(B^2)$ contient les vecteurs e_2 et $e_1 + e_3$, qui forment donc une base de $\mathrm{Ker}(B^2)$. De plus, comme $\mathrm{Ker}(B)$ est engendré par $e_1 + e_3$, alors e_2 engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$.

<u>2ème méthode</u>. On a aussi la méthode plus courte qui suit, suggérée par A. Moussaoui. Les colonnes de la matrice inversible P forment une base (f_1, f_2, f_3, f_4) de $\mathbb{C}^4$, et les colonnes de $B' = BP$ sont les images par B des f_i. Il suffit donc de multiplier B' par B pour avoir la matrice $BB' = B^2P$ dont les colonnes donnent les images par B^2 des f_i. Comme ici $Bf_3 = 0$, on a bien sûr $B^2 f_3 = 0$ et il suffira de faire les mêmes opérations sur BB' et P pour créer une autre colonne nulle de BB'. Dans le cas présent, le calcul est particulièrement simple (voir un autre exercice à la fin de ce texte pour un exemple plus élaboré). On a :

$$BB' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 6 \\ 27 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left(\frac{P}{BB'}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 6 \\ 27 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

donc on voit que, outre le vecteur $e_1 + e_3$ qui appartenait déjà à $\mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(B^2)$ contient le vecteur e_2, qui engendre donc un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$.

Finalement, utilisant l'une ou l'autre méthode, comme la dimension de l'espace caractéristique $V_{(-1)}$ est la multiplicité algébrique de la valeur propre -1, à savoir 2, on conclut que

$$V_{(-1)} = \mathrm{Ker}\left((A + I_4)^2\right) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2).$$

Considérons maintenant la valeur propre $\lambda = 2$ et faisons des opérations sur les colonnes de la matrice $C = A - 2I_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \to C_1 + 2C_2]{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + 9C_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{Q}{C'}\right), \text{ où } C' = CQ.$$

Donc, comme les colonnes non nulles de C' sont échelonnées, $\mathrm{Ker}(C)$ est engendré par le vecteur $v_1 = e_2 + e_3$. Pour la suite, on a comme avant deux méthodes.

<u>1ère méthode</u>. Calculons $C^2 = (A - 2I_4)^2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & -9 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc que $C^2 = (A - 2I_4)^2$ est de rang 2 (car les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes), et que $\mathrm{Ker}(C^2)$ contient les vecteurs e_4 et $e_2 + e_3$, qui forment donc une base de $\mathrm{Ker}(C^2)$. De plus, comme $\mathrm{Ker}(C)$ est engendré par $e_2 + e_3$, alors e_4 engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$.

<u>2ème méthode</u>. On a :

$$CC' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left(\frac{Q}{CC'}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -9 & -6 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on voit que, outre le vecteur $e_2 + e_3$ qui appartenait déjà à $\mathrm{Ker}(C)$, $\mathrm{Ker}(C^2)$ contient le vecteur e_4, qui engendre donc un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(C)$ dans $\mathrm{Ker}(C^2)$.

Finalement, utilisant l'une ou l'autre méthode, comme la dimension de l'espace caractéristique $V_{(2)}$ est la multiplicité algébrique de la valeur propre 2, à savoir 2, on conclut que

$$V_{(2)} = \mathrm{Ker}\left((A - 2I_4)^2\right) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4).$$

Remarque. Il résulte de ce qui précède que la forme normale de Jordan de A est la matrice

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Plus précisément, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ défini par A. Comme $(u+\mathrm{id})(e_2) = e_1+e_3 \in V_{-1}$ et $(u-2\,\mathrm{id})(e_4) = e_2 + e_3 \in V_2$, alors $\mathcal{C} = (e_1 + e_3, e_2, e_2 + e_3, e_4)$ est une base de $V = \mathbb{C}^4$ dans laquelle la matrice de u est la matrice J ci-dessus.

3) (1 pt) Dire, en le justifiant, si A est diagonalisable ou non.

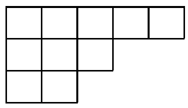
Solution : On sait que A est diagonalisable si et seulement si, pour toute valeur propre λ, on a $V_\lambda = V_{(\lambda)}$ (i.e. si la multiplicité géométrique de λ égale sa multiplicité algébrique). Ce n'est pas le cas ici, donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5 (8 pts)**.** Soit $u \in M_{10}(\mathbb{R})$ un endomorphisme nilpotent tel que $u^3 = 0$, $\mathrm{rang}(u^2) = 2$ et $\mathrm{rang}(u) = 5$.
1) (3 pts) Déterminer la partition $\mathbf{q}$ associée à la suite des noyaux de u et dessiner son diagramme.

Solution : D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}(u^2) = 10 - 2 = 8$ et $\dim \mathrm{Ker}(u) = 10 - 5 = 5$. Donc partant de $\mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}) = \{0\}$, la suite des dimensions pour les $\mathrm{Ker}(u^i)$ est :

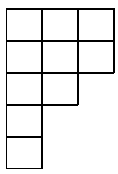
$$0, 5, 8, 10$$

et donc la partition $\mathbf{q}$ obtenue en prenant les différences successives est $\mathbf{q} = (5, 3, 2)$. Son diagramme est :



2) (1 pt) Déterminer la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$.

Solution : Le diagramme de la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$ est :



donc $\mathbf{p} = (3, 3, 2, 1, 1)$.

3) (4 pts) Écrire la matrice de la forme normale de Jordan de u.

Solution : La forme normale de Jordan de u est la matrice de Jordan nilpotente donnée par $\mathbf{p}$:

$$J_{\mathbf{p}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par A. Calculer $P_A(X)$ et déterminer ses racines. Pour chaque racine λ, déterminer une base de chaque $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_4)^i\right)$, pour $i = 1, 2, \ldots$ et en déduire la forme normale de Jordan J de A, ainsi qu'une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J$.

<u>Solution</u> : On a :

$$\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3-X & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_4} \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3-X & -1 \\ 2-X & 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} =$$

$$(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3-X & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_1} (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3-X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} =$$

$$(2-X)^2 \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)^2\,(X^2-4X+4) = (X-2)^4$$

donc $\lambda = 2$ est la seule valeur propre de A. Posons $B = A - 2I_4$ et déterminons une base de $\mathrm{Ker}(B^i)$, pour $i = 1, 2, \ldots$ en faisant des opérations sur les colonnes.
Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Le calcul précédent montre déjà que $e_1 + e_4 \in \mathrm{Ker}(B)$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{C_3 \to C_3 - C_2 \\ C_4 \to C_4 - C_2}]{C_1 \to C_1 + C_4} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\frac{P}{B'}\right), \quad \text{où } B' = BP.$$

Comme les colonnes non nulles de B' sont échelonnées, on obtient que $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension 1, engendré par e_1+e_4. Comme le nombre de blocs de Jordan pour la valeur propre $\lambda = 2$ est la dimension de $\mathrm{Ker}(A-2I_4) = \mathrm{Ker}(B)$, on sait donc déjà que la forme normale de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant :

$$BB' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left(\frac{P}{BB'}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4 \to C_4 + C_2]{C_3 \to C_3 + 2C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\frac{PQ}{B''}\right), \quad \text{où } B'' = B^2PQ.$$

Comme les colonnes non nulles de B'' sont échelonnées, on obtient que $\mathrm{Ker}(B^2)$ est de dimension 2, et que $e_2 + e_3$ engendre un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B) = \mathbb{R}(e_1 + e_4)$ dans $\mathrm{Ker}(B^2)$. Calculons maintenant :

$$BB'' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\left(\frac{PQ}{BB''}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) = \left(\frac{PQ}{B'''}\right), \quad \text{où } B''' = B^3PQ$$

donc $\operatorname{Ker}(B^3)$ est de dimension 3, et e_2 engendre un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(B^2)$ dans $\operatorname{Ker}(B^3)$.
Enfin, on voit que $B^3(e_4) = -4(e_1 + e_4) \neq 0$, donc e_4 engendre un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(B^3)$ dans $\operatorname{Ker}(B^4) = \mathbb{R}^4$.

Donc les vecteurs $v_4 = e_4$, $v_3 = (u - 2\mathrm{id})(e_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$v_2 = (u - 2\mathrm{id})(v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = B^2e_4$$

et

$$v_1 = (u - 2\mathrm{id})(v_2) = B^3e_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Les matrices échelonnées B', B'' et B''' montrent que

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_4, e_2, e_3), \qquad \operatorname{Im}(u^2) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_4, e_2 + e_3), \qquad \operatorname{Im}(u^3) = \operatorname{Vect}(e_1 + e_4).$$