Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé du devoir 3 du 6 avril 2012

Exercice 1 (10 pts)**.** 1) (4 pts) Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 2t^2 + 4xy + 2xz + 2xt + 6yz + 2yt + 4zt.$$

Écrire q comme « somme de carrés » de formes linéaires indépendantes, et déterminer la signature et le rang de q.

<u>Solution</u> : On a $x^2 + 4xy + 2xz + 2xt = (x + 2y + z + t)^2 - 4y^2 - z^2 - t^2 - 4yz - 4yt - 2zt$ donc

$$q(x,y,z,t) = (\underbrace{x + 2y + z + t}_{=X})^2 - y^2 - z^2 + t^2 + 2yz - 2yt + 2zt.$$

Puis $t^2 - 2yt + 2zt = (t - y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz$ donc

$$q(X,y,z,t) = X^2 + (\underbrace{t - y + z}_{=T})^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4yz = X^2 + T^2 - 2(y-z)^2,$$

donc q est de signature $(2,1)$ et de rang 3.

2) (6 pts) Idem pour la forme quadratique $Q(x,y,z,t) = x^2 + 4z^2 + 4t^2 - 4xz - 4xt + 4yz - 6yt + 6zt$.

<u>Solution</u> : On a $x^2 - 4xz - 4xt = (x - 2z - 2t)^2 - 4z^2 - 4t^2 - 8zt$ donc

$$Q(x,y,z,t) = (\underbrace{x - 2z - 2t}_{=X})^2 + 4yz - 6yt - 2zt = X^2 - 2(zt - 2yz + 3yt).$$

Puis $zt - 2yz + 3yt = (z + 3y)(t - 2y) + 6y^2$, donc posant $Z = z + 3y$ et $T = t - 2y$, on a

$$Q(X,y,Z,T) = X^2 - 2ZT - 12y^2 = X^2 - 2Z'^2 + 2T'^2 - 12y^2,$$

où l'on a posé $Z = Z' + T'$ et $T = Z' - T'$ (c.-à.-d., $Z' = (Z+T)/2$ et $T' = (Z-T)/2$). Donc Q est de signature $(2,2)$ et de rang 4. Autre méthode : posant $z = Z + T$ et $t = Z - T$, on a

$$zt - 2yz + 3yt = Z^2 - T^2 + Zy - 5Ty = (\underbrace{Z + \frac{1}{2}y}_{Z'})^2 - \frac{1}{4}y^2 - (\underbrace{T + \frac{5}{2}y}_{=T'})^2 + \frac{25}{4}y^2 = Z'^2 - T'^2 + 6y^2$$

donc $Q(X,y,Z',T') = X^2 - 2Z'^2 + 2T'^2 - 12y^2$.

Exercice 2 (4 pts)**.** 1) (1 pt) Soient k un corps et $C \in M_2(k)$. Exprimer le polynôme caractéristique $P_C(X)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(C)$ et $\mathrm{dét}(C)$.

<u>Solution</u> : Si $C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} a - X & c \\ b & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(C)X + \mathrm{dét}(C)$.

2) (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines.

<u>Solution</u> : $A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right)$ est triangulaire par blocs, donc $P_A(X)$ est le produit des deux déterminants 3×3 ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} -1 - X & 0 & -2 \\ 0 & 2 - X & 0 \\ 2 & 0 & 3 - X \end{vmatrix} = (2 - X)\begin{vmatrix} -1 - X & -2 \\ 2 & 3 - X \end{vmatrix} = (2 - X)(X^2 - 2X + 1) = (2 - X)(X - 1)^2$$

et

$$\begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 5 & 2-X & -3 \\ 6 & 3 & -4-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2+2X+1) = (2-X)(X+1)^2.$$

Donc $P_A(X) = (X-2)^2(X-1)^2(X+1)^2$.

Exercice 3 (8 pts)**.** 1) (5 pts) Soient $N \in \mathbb{R}_+^*$ et $a,b,c \in \mathbb{R}^3$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Soient $X,Y,Z \in \mathbb{R}$ tels que $X^2+Y^2+Z^2 \leq N$; montrer que

$$(*) \qquad (aX+bY+cZ)^2 \leq N\,(a^2+b^2+c^2).$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Solution : Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard $(\ \mid\ )$, considérons les vecteurs $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a

$$(U \mid U) = X^2+Y^2+Z^2, \qquad (U \mid V) = aX+bY+cZ, \qquad (V \mid V) = a^2+b^2+c^2.$$

Donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $X^2+Y^2+Z^2 \leq N$ entraînent les inégalités

$$(aX+bY+cZ)^2 = (U \mid V)^2 \leq (V \mid V)\,(U \mid U) = (a^2+b^2+c^2)(X^2+Y^2+Z^2) \leq N\,(a^2+b^2+c^2),$$

d'où $(aX+bY+cZ)^2 \leq N\,(a^2+b^2+c^2)$. On a l'égalité si et seulement si les deux inégalités ci-dessus sont des égalités. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si U et V sont liés, ce qui équivaut, puisque $V \neq 0$, à $U = \lambda V$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a $(U \mid U) = \lambda^2(a^2+b^2+c^2)$, donc l'égalité $(U \mid U) = N$ équivaut à $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{N}{a^2+b^2+c^2}}$. Donc finalement on a l'égalité dans $(*)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\dfrac{N}{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

2) (3 pts) Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $4x^2+9y^2+36z^2 \leq 9$. Montrer que $(2x+y+2z)^2 \leq 11$. Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Solution : Appliquons ce qui précède à $X = 2x$, $Y = 3y$, $Z = 6z$, $N = 9$ et $a = 1$, $b = 1/3 = c$. On a $a^2+b^2+c^2 = 1+(2/9) = 11/9$, d'où $(2x+y+2z)^2 \leq 9 \times (11/9) = 11$. On a égalité si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 6z \end{pmatrix} = \pm\frac{9}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \pm\frac{3}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (8 pts)**.** 1) (4 pts) Soit $(\ \mid\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

1) (3,5 pts) Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soit $A = \begin{pmatrix} (v_1 \mid v_1) & (v_1 \mid v_2) \\ (v_2 \mid v_1) & (v_2 \mid v_2) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{dét}(A) > 0$.

Solution : On a $\mathrm{dét}(A) = (v_1 \mid v_1)(v_2 \mid v_2) - (v_2 \mid v_1)(v_1 \mid v_2)$, et ceci est ≥ 0 d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, comme v_1, v_2 sont linéairement indépendants, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte, d'où $\mathrm{dét}(A) > 0$.

Plus généralement, soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = (v_i \mid v_j)$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\mathcal{F}$, on désigne par $(\ \mid\ )_E$ la restriction du produit scalaire à E, et on considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et soit D la matrice de $(\ \mid\ )_E$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) (0,5 pt) Déterminer la matrice D.

Solution : Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $D = I_p$.

3) (4 pts) Exprimer A en fonction de P et D. En déduire que $\mathrm{dét}(A) > 0$.

Solution : D'après la formule de changement de base pour la matrice d'une fbs, on a $A = {}^tPDP = {}^tPP$. Donc $\mathrm{dét}(A) = \mathrm{dét}({}^tP)\,\mathrm{dét}(P) = \mathrm{dét}(P)^2$, et comme P est inversible, on a $\mathrm{dét}(P) \in \mathbb{R}^\times$, d'où $\mathrm{dét}(P)^2 > 0$.

Exercice 5 (14 pts)**.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + x_3^2 + 4x_3x_4$, et soit ϕ la forme polaire de q. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1) (2 pts) Écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et déterminer le rang de ϕ.

Solution : On a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 4, donc $\mathrm{rang}(\phi) = 4$, i.e. ϕ est non dégénérée.

2) (0,5 pt) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$, écrire explicitement $\phi(X, Y)$ en fonction des x_i et y_j.

Solution : D'après ce qui précède, on a $\phi(X, Y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3 + 2x_3y_4 + 2x_4y_3$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, soit P_t le plan engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ (qui sont linéairement indépendants), et soit $P_t^\perp = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid \forall Y \in P_t, \quad \phi(X, Y) = 0\}$.
3) (1,5 pts) Que vaut $\dim(P_t^\perp)$? Justifier votre réponse en citant un résultat du cours.

Solution : Comme ϕ est non dégénérée, on a $\dim(P_t^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(P_t) = 4 - 2 = 2$.

4) (4 pts) Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} \phi(v_1, v_1) & \phi(v_1, v_2) \\ \phi(v_2, v_1) & \phi(v_2, v_2) \end{pmatrix}$. En déduire que $v_1 \in P_t \cap P_t^\perp$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t on a $P_t = P_t^\perp$.

Solution : D'après le cours, on sait que

$$(*) \qquad P_t^\perp = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid \phi(X, v_1) = 0 = \phi(X, v_2)\}.$$

On a $\phi(v_1, v_1) = 0$ et $\phi(v_1, v_2) = 2-2 = 0$, d'où $v_1 \in P_t \cap P_t^\perp$. De plus, on a $\phi(v_2, v_2) = 1-4t$, d'où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-4t \end{pmatrix}$. On a

$$A = 0 \iff P_t \subset P_t^\perp \iff P_t = P_t^\perp,$$

la deuxième équivalence résultant du fait que $\dim(P_t) = 2 = \dim(P^\perp)$. Donc $P_t = P_t^\perp$ si et seulement si $t = 1/4$.

5) (3 pts) Déterminer explicitement un système d'équations définissant $P_t^\perp$, puis déterminer un vecteur w_t tel que (v_1, w_t) forme une base de $P_t^\perp$.

Solution : On a vu plus haut que, d'après le cours, on a

$$P_t^\perp = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \phi(X, v_1) = 0 = \phi(X, v_2)\}.$$

D'après la question 2), on a $\phi(X, v_1) = x_2 + 2x_3$ et $\phi(X, v_2) = 2x_1 - x_3 + 2tx_3 - 2x_4 = 2x_1 - (1-2t)x_3 - 2x_4$. Donc $P_t^\perp$ est défini par les équations

$$x_2 = -2x_3, \qquad x_1 = x_4 + \frac{1-2t}{2}x_3.$$

Pour $x_3 = 0$ et $x_4 = 1$, on obtient le vecteur v_1, et pour $x_3 = 2$ et $x_4 = 0$, on obtient le vecteur $w_t = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui forme avec v_1 une base de $P_t^\perp$.

6) (3 pts) Soit $B_t \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, w_t. En faisant des opérations sur les colonnes de B_t, déterminer la dimension de $P_t + P_t^\perp$ et de $P_t \cap P_t^\perp$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4).

Solution : On a

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2t \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + (2t-1)C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & t & 2t-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & t & 4t-1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si $t \neq 1/4$ alors $P_t + P_t^{\perp}$ est de dimension 3, et donc $P_t \cap P_t^{\perp} = \mathbb{R}v_1$ (car sinon on aurait $P_t = P_t^{\perp}$). Par contre, si $t = 1/4$, on a $\mathrm{rang}(B_{1/4}) = 2$, d'où $w_t \in P_t$ et donc $P_t^{\perp} = P_t$. On retrouve ainsi le résultat obtenu à la question 4).

Exercice 6 (6 pts)**.** Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ la norme euclidienne associée. Soit $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbb{N}^{\times}$, soit $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi pt)$. On admet que :

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (e_p \mid e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q, n \in \mathbb{N}$, on pose $c_q(f) = (e_q \mid f)$ puis $S_n(f) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} c_q(f)e_q$ et $R_n(f) = f - S_n(f)$.

1) (2,5 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(e_p \mid R_n(f)) = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.

Solution : Comme $(e_p \mid e_q) = 1$ si $q = p$ et $= 0$ sinon, on a :

$$(e_p \mid S_n(f)) = \sum_{q=0}^{n} c_q(f)(e_p \mid e_q) = c_p(f) = (e_p \mid f),$$

d'où $(e_p \mid R_n(f)) = (e_p \mid f) - (e_p \mid S_n(f)) = 0$.

2) (3,5 pts) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a $f = c_0(f)e_0 + \cdots + c_n(f)e_n + R_n(f)$, et les vecteurs $c_0(f)e_0, \ldots, c_n(f)e_n$ et $R_n(f)$ sont deux à deux orthogonaux, d'après la question précédente. D'après le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|f\|^2 = \sum_{p=0}^{n} \|c_p(f)e_p\|^2 + \|R_n(f)\|^2 = \sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 + \|R_n(f)\|^2,$$

d'où $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$.

3) (bonus 2 pts) En utilisant l'égalité $\cos(\theta)\cos(\varphi) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\theta+\varphi) + \cos(\theta-\varphi)\big)$, démontrer la formule $(*)$.

Solution : Comme $\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$, on a bien l'égalité indiquée plus haut. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{Z}^{\times}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nt)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(2\pi nt)$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \cos(2\pi nt)dt = 0$. Par contre, pour $n = 0$ cette intégrale vaut $\displaystyle\int_0^1 dt = 1$.

Démontrons la formule $(*)$. Comme $(e_p \mid e_q) = (e_q \mid e_p)$, on peut supposer $p \leq q$. Si $p = 0$, on a $(e_0 \mid e_0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^{\times}$ on a : $(e_0 \mid e_q) = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 \cos(2\pi qt)dt = 0$. Si $1 \leq p \leq q$, on a

$$(e_p \mid e_q) = \underbrace{\int_0^1 \cos(2\pi(p+q)t)dt}_{=0} + \int_0^1 \cos(2\pi(p-q)t)dt = \int_0^1 \cos(2\pi(p-q)t)dt = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci prouve $(*)$.