Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé du devoir 4 du 11 mai 2012

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) (2 pts) Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.

Solution : A est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Plus précisément, on sait que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

2) (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer ses racines.

Solution : On a

$$-27\,P_A(X) = -\begin{vmatrix} 1-3X & 4 & 2 \\ 4 & 1-3X & 2 \\ 2 & 2 & -2-3X \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} -\begin{vmatrix} -3-3X & 4 & 2 \\ 3X+3 & 1-3X & 2 \\ 0 & 2 & -2-3X \end{vmatrix} =$$

$$3(X+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1-3X & 2 \\ 0 & 2 & -2-3X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} 3(X+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5-3X & 4 \\ 0 & 2 & -2-3X \end{vmatrix} = 3(X+1)\begin{vmatrix} 5-3X & 4 \\ 2 & -2-3X \end{vmatrix}$$

$$= 3(X+1)(9X^2 - 9X - 18) = 27(X+1)(X^2 - X + 2) = 27(X+1)^2(X-2).$$

Donc $P_A(X) = -(X+1)^2(X-2)$.

3) (4 pts) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Solution : Posons $B = 3(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{pmatrix} B \\ I_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \to C_3 + 4C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix} -5 & 9 & -18 \\ 4 & -9 & 18 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + 2C_2} \begin{pmatrix} -5 & 9 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_2)$ est engendré par le vecteur $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part, on a vu au cours du calcul de $P_A(X)$ que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$.

Comme V_{-1} et V_2 sont orthogonaux, alors on peut chercher un vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_1$ tel que

$$0 = (v_1 \mid v_2) = x - y, \qquad 0 = (w \mid v_2) = 2(x+y) + z = 4x + z$$

et donc on peut prendre $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Vérifions :

$$Av_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = -v_2.$$

On obtient donc que les vecteurs

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de vecteurs propres.

4) (2 pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, et soit ϕ la forme polaire de Q. Écrire la matrice B de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis, en utilisant ce qui précède et un résultat du cours, déterminer la signature de Q.

Solution : On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3A$ donc les valeurs propres de B sont égales à 3 fois celles de A, c.-à.-d., $6, -3, -3$. D'après le « théorème de diagonalisation simultanée », la signature de Q est donnée par le signe des valeurs propres de B, donc cette signature est $(1,2)$.

Exercice 2 (10 pts)**.** Soit $n \geq 2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : pour tout $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$,

$$Q(v) = -2\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j} x_ix_j.$$

1) (1 pt) Soit $\mathcal{C}$ la base $(f_1,\dots,f_n)$, où $f_i = (-1)^i e_i$. On note $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$. Exprimer $(x_1,\dots,x_n)$ en fonction de $(y_1,\dots,y_n)$, puis pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, exprimer $Q(v)$ en fonction des coordonnées $y_1,\dots,y_n$.

Solution : On a $\sum_{i=1}^n y_if_i = \sum_{i=1}^n y_i(-1)^ie_i$, et donc $x_i = (-1)^iy_i$ pour tout i. Par conséquent, on a

$$Q(y_1,\dots,y_n) = -2\sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} y_iy_j.$$

2) (2 pts) Soit ϕ la forme polaire de Q. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.

Solution : On a

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & \ddots \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & \ddots \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

i.e. A est la matrice dont les coefficients valent -2 sur la diagonale, et 1 partout ailleurs.

3) (1 pt) Écrire la matrice $B = A + 3I_n$ et déterminer son rang.

Solution : B est la matrice dont tous les coefficients valent 1, elle est de rang 1. Par conséquent 3 est valeur propre de A de multiplicité géométrique égale à $n-1$.

4) (2 pts) Calculer $\mathrm{Tr}(A)$. En déduire toutes les valeurs propres de A, comptées avec multiplicité.

Solution : On a $\mathrm{Tr}(A) = -2n$. D'autre part, d'après ce qui précède, -3 est racine de $P_A(X)$ de multiplicité algébrique $m \geq n-1$. Soit λ la dernière racine de $P_A(X)$ dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$(n-1)\times(-3) + \lambda = \mathrm{Tr}(A) = -2n,$$

d'où $\lambda = n-3$.

5) (2 pts) En citant un résultat du cours, déterminer la signature de Q lorsque $n \geq 4$.

Solution : D'après le théorème de diagonalisation simultanée, la signature de Q est donnée par le signe des valeurs propres de A. Celles-ci sont : $(n-1)$ fois -3 et une fois $n-3$. Pour $n \geq 4$, on a $n-3 > 0$ donc la signature de Q est $(1, n-1)$.

6) (2 pts) Même question lorsque $n = 3$ et $n = 2$.

Solution : Pour $n = 3$, on a $n-3 = 0$ donc la signature est $(0, n-1) = (0,2)$, et pour $n = 2$ on a $n-3 = -1 < 0$ d'où la signature $(0,n) = (0,2)$.

Exercice 3 (8 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) (1,5 pt) Montrer que $A \in O(3)$ et calculer $\mathrm{dét}(A)$.

Solution : On voit immédiatement que les colonnes de A sont de norme 1 et orthogonales deux à deux, donc $A \in O(3)$. De même, on voit facilement que $\mathrm{dét}(A) = -1$.

2) (2 pts) Déterminer un vecteur unitaire f engendrant $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$.

Solution : On a $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} A + I_3 \\ \hline I_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est engendré par le vecteur unitaire $f = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) (4,5 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de u.

Solution : Il résulte de ce qui précède que u est une « rotation gauche » (ou « symétrie tournée ») d'axe D engendré et orienté par f, et d'angle θ, pour un θ à déterminer. On sait que

$$0 = \mathrm{Tr}(A) = 2\cos(\theta) + \mathrm{dét}(A) = 2\cos(\theta) - 1,$$

d'où $\cos(\theta) = 1/2$ et donc $\theta = \pm\pi/3$. Pour déterminer le signe de θ, choisissons un vecteur x n'appartenant pas à D, par exemple $x = e_1$. Alors on sait que $\sin(\theta)$ est du signe de

$$\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, u(x), f) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Donc u est la « rotation gauche » (ou « symétrie tournée ») d'axe D engendré et orienté par f, et d'angle $\pi/3$.

Exercice 4 (12 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien standard, et l'on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1) (2 pts) Montrer qu'une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v, f)$ est directe si et seulement si la base $\mathcal{C} = (f, u, v)$ est directe.

Solution : La matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1, donc $\mathcal{B}$ est directe si et seulement si $\mathcal{C}$ l'est. On pouvait aussi dire que le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux colonnes, d'où :

$$\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, f) = -\,\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, f, v) = \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(f, u, v)$$

et donc (u, v, f) est directe si et seulement si (f, u, v) l'est.

Soit $f = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit R la rotation d'axe engendré et orienté par f et d'angle $\pi/6$.

2) (3 pts) Déterminer deux vecteurs unitaires u et v tels que $\mathcal{B} = (u, v, f)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On peut prendre $u = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Posons

$$w = f \wedge u = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_2) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, e_3 - e_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On a vu dans un exercice de la feuille 6 qu'alors la base (f, u, w) est orthonormée et directe, donc (u, w, f) l'est aussi, donc on doit prendre $v = w$.

On pouvait aussi chercher un vecteur $v' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à f et à u, c.-à.-d., vérifiant les équations

$$0 = (u \mid v') = y, \qquad 0 = 2(f \mid v') = \sqrt{3}\,x + z$$

d'où $v' = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, puis la condition que v' soit unitaire entraîne que $x = \varepsilon/2$, avec $\varepsilon = \pm 1$, d'où $v' = -\varepsilon w$. Alors, $\mathcal{B}' = (u, v', f)$ est une base orthonormée, et la condition pour qu'elle soit directe est que l'on ait :

$$1 = \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} \varepsilon & \sqrt{3} \\ -\varepsilon\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon$$

d'où $\varepsilon = -1$ et $v' = w$.

3) (3 pts) Déterminer la matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(R)$.

Solution : Comme $\mathcal{B} = (u, v, f)$ est une base orthonormée directe et que R est la rotation d'axe engendré et orienté par f et d'angle $\pi/6$, alors

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(R) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & 0 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) (4 pts) Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(R)$

Solution : On a $B = P^{-1}AP$ d'où $A = PBP^{-1}$, où $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. De plus, $P \in O(3)$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc $P^{-1} = {}^tP$. Calculons :

$$PB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$A = (PB)\,{}^tP = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6+\sqrt{3} & -2 & -3+2\sqrt{3} \\ 2 & 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -3+2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2+3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

À titre de vérification, notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de $8A$, on vérifie que

$$(C_1 \mid C_1) = 36 + 3 + 12\sqrt{3} + 4 + 9 + 12 - 12\sqrt{3} = 64$$
$$(C_2 \mid C_2) = 4 + 48 + 12 = 64,$$
$$(C_3 \mid C_3) = 9 + 12 - 12\sqrt{3} + 12 + 4 + 27 + 12\sqrt{3} = 64$$
$$(C_1 \mid C_2) = -12 - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 12 = 0$$
$$(C_1 \mid C_3) = -18 + 6 + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6 + 18 - 5\sqrt{3} = 0$$
$$(C_2 \mid C_3) = 6 - 4\sqrt{3} - 24 + 4\sqrt{3} + 18 = 0.$$

Exercice 5 (10 pts)**.** Soient $(\ \mid\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, et $G \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice $(g_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$, où pour tout i, j, on a $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. (2 pts) Montrer que $\text{dét}(G) \neq 0$.

Solution : Observons que G est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction $(\ \mid\ )_E$ de $(\ \mid\ )$ à E. Comme cette restriction est définie positive, donc non dégénérée, on a $\text{dét}(G) \neq 0$. Plus précisément, si $\mathcal{C}_0$ est une base orthonormée de E et si l'on note $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{C}) \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, alors on a $G = {}^tPP$, et donc $\text{dét}(G) = \text{dét}(P)^2 > 0$.

2. (2 pts) Pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, exprimer le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ en fonction de M et Y.

Solution : Pour tout $i = 1, \dots, p$, soit $V_i \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne exprimant v_i dans la base $\mathcal{B}$. Alors, d'une part, $(v_i \mid Y) = {}^tV_iY$ et, d'autre part, M a pour colonnes $V_1, \dots, V_p$, donc ${}^tM$ a pour lignes ${}^tV_1, \dots, {}^tV_p$. On en déduit que $X = {}^tMY$.

3. (2 pts) D'autre part, on pose $\pi(Y) = t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $X = GT$.

Solution : Comme $\pi(Y)$ est la projection orthogonale de Y sur E, alors $Y - \pi(Y)$ est orthogonal à E. Donc, pour tout $i = 1, \dots, p$, on a $(v_i \mid Y - \pi(Y)) = 0$ et donc

$$(v_i \mid Y) = (v_i \mid \pi(Y)) = \sum_{j=1}^{n} t_j(v_i \mid v_j) = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j}t_j$$

et ceci montre que $X = GT$.

4. (2 pts) Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.

Solution : D'après la question 1., G est inversible, donc les égalités $X = {}^tMY = GT$ entraînent $T = G^{-1}\,{}^tMY$.

5. (2 pts) On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1v_1 + t_2v_2$.

Solution : On a $(v_1 \mid v_1) = 4$, $(v_1 \mid v_2) = 6$ et $(v_2 \mid v_2) = 14$, donc $G = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{dét}(G) = 56 - 36 = 20$, et $G^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On a aussi ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc, d'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = G^{-1}\,{}^tMY = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$