Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé de l'examen du 10 juin 2010 (3h)

Dans certains des exercices, on attend des réponses citant des résultats du cours ; ceci comptera pour une partie importante des points. Dans ces exercices, une réponse basée uniquement sur un calcul ne donnera qu'une partie des points.

Dans tous les exercices, les réponses correctes mais non justifiées ne donneront qu'une fraction des points.

Exercice 1 (20pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $-(X-4)(X-1)^2$, donc A est diagonalisable si et seulement si l'espace propre $V_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 2. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

La matrice B est symétrique réelle donc on sait, d'après le cours, qu'elle est diagonalisable et que les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, par conséquent il existe une base orthonormée de vecteurs propres. Calculons le polynôme caractéristique de B.

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 0 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 0 & 3-X & 3-X \end{vmatrix} = (3-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(en remplaçant L_1 et L_3 par $L_1 + L_2$ et $L_3 + L_2$) puis

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(X+3)$$

donc $P_B(X) = -(X-3)^3(X+3)$. Comme on sait que B est diagonalisable, l'espace propre $V_3 = \mathrm{Ker}(B - 3I_3)$ est donc de dimension 2. Déterminons-le : comme $B - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ on voit que V_3 est le plan d'équation $x - y + z = 0$. Son orthogonal, qui égale l'espace propre V_{-3}, est la droite engendrée par le vecteur $f_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $f_3 = f_3'/\|f_3'\| = f_3'/\sqrt{3}$ engendre V_{-3} et est de norme 1.

Déterminons maintenant une base orthonormée (f_1, f_2) de P. On peut prendre $f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors

$$(\mathbb{R}f_1')^\perp \bigcap (\mathbb{R}f_3')^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x - z = 0 = x - y + z \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, une base orthonormée de vecteurs propres est donnée par les vecteurs :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un autre choix possible était $f_1' = e_1 + e_2$ et $f_2' = e_1 - e_2 - 2e_3$.

2. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$: $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1x_3$.

   Solution : La matrice de la forme polaire de Q dans la base canonique est la matrice B précédente ; on a vu que ses valeurs propres sont $3, 3, -3$. Donc, d'après le théorème de réduction (ou diagonalisation) simultanée, la signature de Q est $(2,1)$.

Exercice 2 (10pts)**.** On rappelle la formule pour le déterminant de Vandermonde

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

En utilisant les propriétés de multilinéarité du déterminant, calculer le déterminant D de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1/2 \\ 2 & 5 & 10 & 17 & 5/4 \\ 2 & 9 & 28 & 65 & 9/8 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Solution : En soustrayant la ligne 2 aux lignes 4 et 5, on obtient d'abord

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1/2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 1/4 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 1/8 \end{vmatrix}$$

puis mettant en facteur 1/2 (resp. 1/3, resp. 1/4, resp. 2) dans la colonne C_2 (resp. C_3, resp. C_4, resp. C_5), on obtient

$$D = \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1/2 \\ 1 & 4 & 9 & 8 & 1/4 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 1/8 \\ 1 & 16 & 3^4 & 4^4 & 1/16 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\, V(1,2,3,4,\frac{1}{2}).$$

Appliquons la formule pour calculer $V(1,2,3,4,1/2)$. Pour éviter des nombres négatifs dans la formule, faisons glisser la 5ème colonne à la 1ère place : ceci revient à faire 4 échanges de colonnes, donc ne change pas le déterminant (on applique un 5-cycle, de signature $(-1)^4 = 1$). Donc

$$V(1,2,3,4,\frac{1}{2}) = V(\frac{1}{2},1,2,3,4) = (1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{2})(4-\frac{1}{2})(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$$

égale $\dfrac{3\cdot5\cdot7}{2^4}\,2\cdot3\cdot2 = \dfrac{3^2\cdot5\cdot7}{4}$, d'où finalement $D = \dfrac{1}{12}\,V(\dfrac{1}{2},1,2,3,4) = \dfrac{3\cdot5\cdot7}{16} = \dfrac{105}{16}$.

Exercice 3 (10pts)**.** Réduire en somme de carrés puis déterminer la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2xy + xz + 5yz - 4yt - 4zt$.

   Solution : On a

$$q(x,y,z,t) = \big(\underbrace{x+y+\frac{z}{2}}_{=X}\big)^2 + 2y^2 + (2-\frac{1}{4})z^2 + 2t^2 + 4yz - 4yt - 4zt = X^2 + 2\big(\underbrace{y+z-t}_{=Y}\big)^2 - \frac{1}{4}z^2$$

   donc q est de signature $(2,1)$ et de rang 3.

2. $Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 4yz + 2yt - zt$.

Solution : On a $Q(x,y,z,t) = (\underbrace{x-y+z}_{=X})^2 - 2yz + 2yt - zt$. Posons $y = Y + Z$ et $z = Y - Z$ (ce qui équivaut à $Y = (y+z)/2$ et $Z = (y-z)/2$). Alors

$$\begin{aligned} Q(X,Y,Z,t) = X^2 - 2Y^2 + 2Z^2 + Yt + 3Zt &= X^2 - 2\big(Y - \frac{t}{4}\big)^2 + 2\big(Z + \frac{3t}{4}\big)^2 + \frac{2}{16}(1-9)t^2 \\ &= X^2 - 2Y'^2 + 2Z'^2 - t^2 \end{aligned}$$

donc Q est de signature $(2,2)$ et de rang 4.

Exercice 4 (20pts). Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par : pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$, le point $M' = f(M)$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\Big(x + y + \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}\Big(x + y - \sqrt{2}z\Big) + 1 \\ z' &= \frac{1}{2}\Big(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\Big) + 1 \end{aligned}$$

1. Déterminer la partie linéaire ϕ de f et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

   Solution : $f(O)$ est le point de coordonnés $(1,1,1)$, et la partie linéaire ϕ de f est donnée par :

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y + \sqrt{2}z \\ x + y - \sqrt{2}z \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y \end{pmatrix},$$

   sa matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que ϕ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa nature et préciser ses caractéristiques.

   Solution : Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On a

$$\begin{aligned} &(C_1 \mid C_1) = (C_2 \mid C_2) = \frac{1}{4}(1+1+2) = 1, && (C_3 \mid C_3) = \frac{1}{4}(2+2) = 1, \\ &(C_1 \mid C_2) = \frac{1}{4}(1+1-2) = 0, && (C_1 \mid C_3) = (C_2 \mid C_3) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

   i.e. les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, donc $A \in O(3)$, i.e. ϕ est une isométrie vectorielle. Calculons son déterminant : en ajoutant la 1ère ligne à la 2ème, on obtient

$$\text{dét}(A) = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 1$$

   donc $A \in \mathrm{SO}(3)$ et ϕ est une rotation $\neq$ id. Déterminons son axe $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et son angle θ. On a

$$2(A - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   en remplaçant C_2 par $C_2 + C_1$ et C_3 par $C_3 + \sqrt{2}C_1$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$. D'autre part, $2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(A) = 1$ donc $\cos\theta = 0$, i.e. $\theta = \pm\pi/2$. Pour déterminer le signe, choisissons un vecteur x n'appartenant pas à D, par exemple $x = e_1$, et considérons le déterminant Δ de la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\Big(e_1, \phi(e_1), e_1 + e_2\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   On a $\Delta = \sqrt{2} > 0$, donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = \pi/2$. Donc ϕ est la rotation vectorielle d'axe D orienté par $f_3' = e_1 + e_2$ et d'angle $\pi/2$.

3. Soit $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les projections orthogonales u et v de w sur $F = \mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$ et sur $F^\perp$. Soit t_{-u} la translation de vecteur $-u$; déterminer un point fixe I de $g = t_{-u} \circ f$.

   Solution : On a $u = \dfrac{(w \mid f_3')}{(f_3' \mid f_3')} f_3'$, et comme $(f_3' \mid f_3') = 2 = (w \mid f_3')$ on obtient $u = f_3'$ d'où $v = w - f_3' = e_3$. Donc, pour tout point M de coordonnées (x, y, z), le point $M'' = g(M) = t_{-u}(f(M))$ a pour coordonnées $x'' = x' - 1$, $y'' = y' - 1$, $z'' = z'$, et M est un point fixe de g si et seulement si (x, y, z) est solution du système :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\Big(x + y + \sqrt{2}z\Big) \\ y = \dfrac{1}{2}\Big(x + y - \sqrt{2}z\Big) \\ z = \dfrac{1}{2}\Big(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\Big) + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{2}z = 0 \\ x - y - \sqrt{2}z = 0 \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z = -2 \end{cases}$$

   qui équivaut à $\begin{cases} x - y = \sqrt{2}z \\ 4z = 2 \end{cases}$ soit $z = \dfrac{1}{2}$ et $x = y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc le point I de coordonnées $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{1}{2})$ est un point fixe de g, et l'ensemble des points fixes de g est la droite affine $\mathcal{D} = I + D = I + \mathbb{R}f_3'$.

4. Déterminer la nature de f et préciser ses caractéristiques.

   Solution : D'après le cours et les résultats des questions précédentes, f est un vissage d'axe $\mathcal{D}$ orienté par f_3', d'angle $\pi/2$ et de vecteur $u = f_3'$.

Exercice 5 (15pts)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 2)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = 2e_1 - e_2$ et $f_2 = e_2 - 2e_3$. Soit h la symétrie orthogonale glissée par rapport à $\mathcal{P}$, de vecteur $u = 2f_1 - f_2$.

1. Donner un vecteur $f_3 \neq 0$ orthogonal à P.

   Solution : On a $P^\perp = (\mathbb{R}f_1)^\perp \cap (\mathbb{R}f_2)^\perp = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid 2x - y = 0 = y - 2z\} = \mathbb{R}f_3$ où $f_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.

2. Soit σ la partie linéaire de h. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler la formule exprimant $\sigma(v)$ en fonction de v et f_3, puis écrire la matrice A de σ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

   Solution : Soit f la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P} = I + P$, on a $h = t_u \circ f$. Comme la partie linéaire d'une translation est l'identité, la partie linéaire de h est la même que celle de f, qui est la symétrie orthogonale σ par rapport au plan $P = (\mathbb{R}f_3)^\perp$. D'après le cours, on sait que

$$\sigma(v) = v - \frac{2(v \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3.$$

   Comme $(f_3 \mid f_3) = 6$ et comme $(e_1 \mid f_3) = 1 = (e_3 \mid f_3)$ et $(e_2 \mid f_3) = 2$, on a $\sigma(e_1) = e_1 - (1/3)f_3$, $\sigma(e_2) = e_2 - (2/3)f_3$ et $\sigma(e_3) = e_3 - (1/3)f_3$, d'où

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

3. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}$ du point $M' = h(M)$.

   Solution : On a $u = 2f_1 - f_2 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Posons $I' = h(I)$ et notons f la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$, alors $h = t_u \circ f$. Comme $I \in \mathcal{P}$, on a $f(I) = I$ et donc

$$I' = (t_u \circ f)(I) = t_u(I) = I + u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{h(I)h(M)} = \sigma(\overrightarrow{IM}) = A\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-2y-z+4 \\ -2x-y-2z+2 \\ -x-2y+2z-5 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{I'M'}$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} + \overrightarrow{I'M'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-2y-z+13 \\ -2x-y-2z-7 \\ -x-2y+2z+7 \end{pmatrix}.$$

Pour $M = I(-1,0,2)$, on trouve bien $3x' = -2-2+13 = -9$, $3y' = 2-4+-7 = 9$ et $3z' = 1+4+7 = 12$, i.e. $M' = I'$.

Exercice 6 (10 pts)**.** Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace euclidien et soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée.

1. Soient $\mathcal{B}$ une base arbitraire de E, $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Déterminer la matrice A du produit scalaire $(\ |\ )$ dans $\mathcal{B}$, puis montrer que $\mathrm{dét}\, A > 0$.

   Solution : On sait que $A = {}^tPJP$, où J est la matrice du produit scalaire $(\ |\ )$ dans $\mathcal{B}_0$; comme $\mathcal{B}_0$ est orthonormée, on a $J = I_n$ d'où $A = {}^tPP$. Comme $\mathrm{dét}({}^tP) = \mathrm{dét}(P) \neq 0$, on obtient que $\mathrm{dét}(A) = \mathrm{dét}(P)^2 > 0$.

2. Soient $u_1, \dots, u_r \in E$ des vecteurs linéairement indépendants, et B la matrice $\begin{pmatrix} (u_1 \mid u_1) & \cdots & (u_1 \mid u_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_r \mid u_1) & \cdots & (u_r \mid u_r) \end{pmatrix}$, montrer que $\mathrm{dét}(B) > 0$.

   Solution : Comme $u_1, \dots, u_r$ sont linéairement indépendants, ils forment une base $\mathcal{C}$ du sous-espace F qu'ils engendrent. Notons ϕ la restriction de $(\ |\ )$ à F. Alors ϕ est encore définie positive et B est la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C}$. Donc, d'après la question précédente appliquée à F, ϕ, et $\mathcal{C}$, on a $\mathrm{dét}(B) > 0$.

3. Pour $r = 2$, en déduire une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Solution : Soient u, v deux vecteurs linéairement indépendants ; on a $\begin{vmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{vmatrix} > 0$ d'après la question précédente, et ce déterminant Δ vaut $(u \mid u)(v \mid v) - (u \mid v)^2$ puisque $(v \mid u) = (u \mid v)$. Ceci prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que le cas d'égalité. En effet, soient $u, v \in E$ arbitraires ; s'ils sont liés, on peut supposer, par exemple, que $v = \lambda u$, auquel cas $(u \mid u)(v \mid v) = \lambda^2 (u \mid u)^2 = (u \mid v)^2$, et s'ils sont linéairement indépendants, l'inégalité $\Delta > 0$ donne $(u \mid u)(v \mid v) > (u \mid v)^2$.

4. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ de signature $(1,1)$, soient $\mathcal{B}$ une base arbitraire de $\mathbb{R}^2$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Montrer que $\mathrm{dét}(A) < 0$, puis montrer que pour $u, v \in \mathbb{R}^2$ non liés, on a $\phi(u,v)^2 > \phi(u,u)\phi(v,v)$.

   Solution : Comme ϕ est de signature $(1,1)$, il existe une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{dét}(J) = -1$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$; d'après la 1ère question, on sait que $A = {}^tPJP$ d'où $\mathrm{dét}(A) = \mathrm{dét}({}^tP)\,\mathrm{dét}(J)\,\mathrm{dét}(P) = -\,\mathrm{dét}(P)^2 < 0$.
   Si $u, v \in \mathbb{R}^2$ sont non liés, ils forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de ϕ dans cette base est $A = \begin{pmatrix} \phi(u,u) & \phi(u,v) \\ \phi(v,u) & \phi(v,v) \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, on a $\phi(u,u)\phi(v,v) - \phi(u,v)^2 = \mathrm{dét}(A) < 0$.

Exercice 7 (15pts)**.** On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée. Soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

1. Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est bijective.

   Solution : D'abord, il résulte de la bilinéarité de $(\ |\ )$ que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire. Son noyau est
   $$\mathrm{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \phi_x = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in E, \quad (x \mid y) = 0\}$$
   qui est le noyau de $(\ |\ )$. Or ce noyau est nul, puisque $(x \mid x) = 0$ entraîne $x = 0$. Ceci montre que θ est injective. Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, il résulte du théorème du rang que θ est aussi surjective, donc bijective.

2. Soient $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u,v) \in E$ tel que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w) = (f(u,v) \mid w)$ pour tout $w \in E$.

   Solution : u, v étant fixés, l'application $\gamma_{u,v} : E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w)$ est linéaire, i.e. est un élément de E^*. Donc, d'après la question précédente, il existe un unique vecteur $f(u,v) \in E$ tel que $\gamma_{u,v} = \phi_{f(u,v)}$, i.e. tel que
   $$\forall w \in E, \qquad \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w) = (f(u,v) \mid w).$$

3. Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ est bilinéaire et alternée.

   Solution : Soient $u, u', v, v' \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $w \in E$, on a
   $$\begin{aligned}(tf(u,v) + f(u',v) \mid w) = t(f(u,v), w) + (f(u',v) \mid w) &= t\,\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w) + \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u',v,w) \\ &= \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(tu+u',v,w) = (f(tu+u',v) \mid w).\end{aligned}$$
   Comme $(\ \mid\ )$ est non dégénéré (i.e. de noyau nul), ceci entraîne $tf(u,v) + f(u',v) = f(tu+u',v)$. On montre de même que $f(u, tv+v') = tf(u,v) + f(u,v')$. Donc l'application $f : E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ est bilinéaire.
   Montrons qu'elle est alternée. Soit $u \in E$, pour tout $w \in E$, on a $0 = \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,u,w) = (f(u,u) \mid w)$, d'où $f(u,u) = 0$, i.e. f est alternée.

4. Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et considérant un vecteur $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ variable, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) dans $\mathcal{B}_0$ de $f(u,v)$.

   Solution : Par définition, $f_1 w_1 + f_2 w_2 + f_3 w_3 = (f(u,v) \mid w)$ égale :
   $$\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3 \,.$$
   Il en résulte que
   $$f(u,v) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$
   i.e. on retrouve la définition du produit vectoriel $u \wedge v$.