# Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
## LM270, Corrigé de l'examen du 7 juin 2011 (3h)

**Exercice 1** (8pts)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent $-1$, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. (2 pts) En développant par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour deux entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

Solution : En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$D_n = -D_{n-1} + \text{dét} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

où la deuxième matrice est de taille $(n-1) \times (n-1)$ et la sous-matrice de taille $(n-2) \times (n-2)$ dans le coin inférieur droit est $A_{n-2}$. Donc en développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient $2D_{n-2}$, d'où la relation : $D_n = -D_{n-1} + 2D_{n-2}$.

2. (5 pts) Quelle est la forme générale des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant cette relation de récurrence linéaire $u_n = bu_{n-1} + cu_{n-2}$ ? En utilisant les valeurs $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$ en déduire, en résolvant un système linéaire, une formule exacte donnant la valeur de $D_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Considérons le polynôme $X^2 + X - 2$ ; ses racines sont 1 et $-2$. Donc, introduisant les suites géométriques $\mathbf{v} = (1^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\mathbf{w} = ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on sait que toute suite réelle $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2}$ s'écrit de façon unique $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, c.-à.-d., on a $u_n = \alpha + \beta(-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On détermine $\alpha$ et $\beta$ en résolvant le système : $\begin{cases} \alpha - 2\beta = D_1 = -1 \\ \alpha + 4\beta = D_2 = 3 \end{cases}$. On trouve $3\alpha = 1$, d'où $\alpha = 1/3$, puis $\beta = 2/3$. On a donc $u_n = \dfrac{1}{3}(1 + 2(-2)^n)$.

3. (1 pt) Calculer $D_8$ et $D_9$.

Solution : $D_8 = \dfrac{1}{3}(1+512) = \dfrac{513}{3} = 171$ et $D_9 = \dfrac{1}{3}(1-1024) = -\dfrac{1023}{3} = -341$.

**Exercice 2** (9 pts)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 1 \\ 1-t & 2t-1 & -1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 & t-1 \\ -1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. (3 + 2 = 5 pts) Calculer en fonction de $t$ le rang et le déterminant de $A_t$.
2. (4 pts) Lorsque $\text{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\text{Im}(A_t)$ et de $\text{Ker}(A_t)$.

Solution : Faisons des opérations sur les colonnes de la forme $C_i \to C_i + \lambda C_j$ avec $j \neq i$, qui ne changent ni le rang ni le déterminant :

$$\begin{pmatrix} A_t \\ \hline I_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + C_3]{C_2 \to C_2 + tC_3} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1-t & t-1 & -1 & 0 \\ 1-t & t-1 & 0 & t-1 \\ -1 & 1-t & -1 & t-1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On voit déjà que si $t = 1$, alors $A_1$ est de rang 2, et une base de $\mathrm{Im}(A_1)$, respectivement $\mathrm{Ker}(A_1)$, est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectivement $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Supposons désormais $t \neq 1$. Alors, ajoutant $C_2$ à $C_1$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & t-1 \\ -t & 1-t & -1 & t-1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ t & t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Développant le déterminant de la matrice supérieure par rapport à la 1ère colonne, puis la dernière, on obtient que $\mathrm{dét}(A_t) = t(t-1)(t-1) = t(t-1)^2$, donc $A_t$ est inversible si $t \neq 0, 1$. Pour $t = 0$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $\mathrm{Ker}(A_0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et une base de $\mathrm{Im}(A_0)$ est formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3** (13 pts)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, et $P$ le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. (3 pts) Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, puis en développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est :

$$P_A(X) = (-1)^n \big(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i\big).$$

Solution : On a $A-XI_n = \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-X \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. En ajoutant $XC_2$ à $C_1$ pour annuler le 1er coefficient de la 1ère colonne, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -X^2 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_0+a_1X & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-X \end{pmatrix}.$$

Ajoutant alors $X^2C_3$ à $C_1$ pour annuler le coefficient $-X^2$ de qui se trouve sur la 2ème ligne, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ -X^3 & 0 & -X & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ a_0+a_1X+a_2X^2 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}-X \end{pmatrix}.$$

On ajoute alors $X^3C_4$ à $C_1$ pour annuler le coefficient $-X^3$ de qui se trouve sur la 3ème ligne, etc. Donc, en remplaçant $C_1$ par

$$C_1 + XC_2 + X^2C_3 + X^3C_4 + \cdots + X^{n-1}C_n,$$

on obtient la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ \alpha & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-X \end{pmatrix}$$

où $\alpha = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_{n-2}X^{n-2} + (a_{n-1}-X)X^{n-1} = -P(X)$. Enfin, en développant par rapport à la 1ère colonne, on obtient que

$$P_A(X) = \text{dét}(B) = (-1)^{n+1}\alpha = (-1)^nP(X).$$

2. (5 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $P$ (on ne demande pas de calculer $\lambda$). En utilisant le calcul précédent (remplaçant $X$ par $\lambda$), montrer que l'espace propre $V_\lambda = \text{Ker}(A-\lambda I_n)$ est de dimension 1 et en donner une base.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $P$. En emplaçant $X$ par $\lambda$, le calcul précédent montre que :

$$\begin{pmatrix} A-\lambda I_n \\ I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1+\lambda C_2+\cdots+\lambda^{n-1}C_n} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -P(\lambda) & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-\lambda \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \lambda^2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dans la matrice supérieure, la 1ère colonne est nulle puisque $P(\lambda) = 0$, et les autres colonnes sont linéairement indépendantes, car la matrice est échelonnée. Il en résulte que $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

3. (5 pts) Écrivons $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$. Déduire de la question précédente la forme normale de Jordan de $A$. *Indication* : que peut-on dire de la dimension de l'espace propre $V_\lambda$, si les blocs de Jordan pour $\lambda$ sont $J_{h_1}(\lambda), \ldots, J_{h_p}(\lambda)$ ?

Solution : Notons $J_A$ la forme normale de Jordan de $A$. Fixons une valeur propre $\lambda$ de $A$, c'est -à-dire une racine $\lambda$ de $P$. Remarquons que chaque bloc de Jordan $J_h(\lambda)$ apparaissant dans $J_A$ donne une colonne nulle dans $J_A - \lambda I_n$. Donc, s'il y a $p$ blocs de Jordan associés à $\lambda$, la matrice $J_A - \lambda I_n$ a $p$ colonnes nulles, et donc $V_\lambda = \mathrm{Ker}(J_A - \lambda I_n)$ est de dimension $\geq p$. (En fait, on a exactement $\dim V_\lambda = p$, cf. le cours, mais ici l'inégalité $\dim V_\lambda \geq p$ nous suffit.) Comme on a vu dans la question précédente que $\dim V_\lambda = 1$, il en résulte que $p = 1$, c'est-à-dire qu'il y a un seul bloc de Jordan pour chaque valeur propre. Comme $P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, la forme normale de Jordan de $A$ est donc la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{m_p}(\lambda_p) \end{array}\right).$$

**Exercice 4** (8pts). Soit $q$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^5$ définie par $q(x, y, z, t, u) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 2xy + 4xz - 4xt + 4yz - 4yt - 5zt + 2zu + tu$. Écrire $q$ comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de $q$.

Solution : Considérant le terme $x^2$ et les termes contenant $x$, on a

$$q(x, y, z, t, u) = (\underbrace{x + y + 2z - 2t}_{X})^2 + 8zt - 5zt + 2zu + tu = X^2 + 3zt + 2zu + tu.$$

Puis $tu + 2zu + 3zt = (\underbrace{t + 2z}_{t'})(\underbrace{u + 3z}_{u'}) - 6z^2 = T'^2 - U'^2 - 6z^2$, où l'on a posé $T' = \dfrac{t' + u'}{2}$ et $U' = \dfrac{t' - u'}{2}$.
Donc $q(X, y, z, T', U') = X^2 - 6z^2 + T'^2 - U'^2$ et donc $q$ est de rang 4 et de signature $(2, 2)$.
Remarque : pour la 2ème étape, on pouvait aussi faire le changement de variable $T = \dfrac{t + u}{2}$ et $U = \dfrac{t - u}{2}$, c'est-à-dire $t = T + U$ et $u = T - U$, qui donne

$$tu + 2uz + 3tz = T^2 - U^2 + z(5T + U) = (\underbrace{T + \frac{5z}{2}}_{T'})^2 - \frac{25z^2}{4} - (\underbrace{U - \frac{z}{2}}_{U'})^2 + \frac{z^2}{4} = T'^2 - U'^2 - 6z^2.$$

**Exercice 5** (13 pts). Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où $O$ désigne le point $(0, 0, 0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ définie par : pour tout point $M = (x, y, z)$, les coordonnés $(x', y', z')$ du point $M' = f(M)$ sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z \\ -2\sqrt{2}x + y - 4z \\ -2\sqrt{2}x - 4y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 pt) Soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de $f$. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$.

Solution : $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & -4 \\ -2\sqrt{2} & -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que les espaces propres de $A$ sont deux à deux orthogonaux et de somme égale à $\mathbb{R}^3$.

Solution : $A$ est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée (et donc $\overrightarrow{f}$ également). Les espaces propres de $A$ (c'est à dire ceux de $\overrightarrow{f}$) sont donc deux à deux orthogonaux et engendrent $\mathbb{R}^3$.

3. (4,5 pts) Montrer d'autre part que $A \in O(3)$. Que peut-on dire alors de ses valeurs propres ? Déterminer une base de chaque espace propre.

Solution : Notons $C_1$, $C_2$ et $C_3$ les colonnes de $A$. On a :

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 = C_1 \cdot C_3 &= (1/5)^2 \times \Big(3 \times (-2\sqrt{2}) + 1 \times (-2\sqrt{2}) - 4 \times (-2\sqrt{2})\Big) = 0 \\ C_2 \cdot C_3 &= (1/5)^2 \times \Big((-2\sqrt{2})^2 - 4 - 4\Big) = 0 \\ \|C_1\|^2 &= (1/5)^2\Big(3^2 + (-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2\Big) = 1 \\ \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 &= (1/5)^2\Big((-2\sqrt{2})^2 + 1^2 + 4^2\Big) = 1. \end{aligned}$$

Les colonnes de $A$ forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, d'où $A \in O(3)$. On en déduit que les valeurs propres de $A$ sont 1 ou $-1$, et comme $A$ est diagonalisable, 1 et $-1$ sont nécessairement tout deux valeurs propres, sinon $\mathbb{R}^3$ tout entier serait espace propre et $A$ serait déjà diagonale (égale à $\pm I_3$).

Notons $C_1'$, $C_2'$ et $C_3'$ les colonnes de la matrice $A - I_3 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 & -4 \\ -2\sqrt{2} & -4 & -4 \end{pmatrix}$. On a $C_2' = C_3' = \sqrt{2}C_1'$, les vecteurs $v_1 = \sqrt{2}e_1 - e_2$ et $v_2 = e_2 - e_3$ forment donc un système libre de l'espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ qui est donc de dimension $\geq 2$. De plus $E_1 \neq \mathbb{R}^3$ donc $E_1$ est de dimension 2 et $(v_1, v_2)$ en est une base.

Notons $C_1''$, $C_2''$ et $C_3''$ les colonnes de la matrice $A+I_3 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 6 & -4 \\ -2\sqrt{2} & -4 & 6 \end{pmatrix}$. On a $C_1''+\sqrt{2}(C_2''+C_3'') = 0$, le vecteur $v_3 = e_1 + \sqrt{2}(e_2 + e_3)$ appartient donc à l'espace propre $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$. De plus $E_1 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3$ donc $E_{-1}$ est de dimension 1 et $v_3$ en est une base.

4. (1 pt) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $\overrightarrow{f}$.

Solution : Il découle de ce qui précède que $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $E_1$.

5. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points $I$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et, pour tout $I \in \mathscr{P}$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{If(I)}$.

Solution : $\overrightarrow{If(I)}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - I_3) = E_1 = (E_{-1})^{\perp}$ si et seulement si $\overrightarrow{If(I)} \cdot v_3 = 0$. Notons $I = (x, y, z)$ et calculons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{If(I)} &= \left(\frac{1}{5}(3x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z) + 1 - x\right) e_1 + \left(\frac{1}{5}(-2\sqrt{2}x + y - 4z) - 1 - y\right) e_2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{5}(-2\sqrt{2}x - 4y + z) + 1 - z\right) e_3 \\ &= \frac{1}{5}\Big((-2x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z)e_1 + (-2\sqrt{2}x - 4y - 4z)e_2 + (-2\sqrt{2}x - 4y - 4z)e_3\Big) + e_1 - e_2 + e_3 \\ &= -\frac{1}{5}(2x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z)\big(e_1 + \sqrt{2}e_2 + \sqrt{2}e_3\big) + e_1 - e_2 + e_3 \\ &= -\frac{1}{5}(2x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z)v_3 + e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{If(I)} \cdot v_3 = -\frac{1}{5}(2x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z)\|v_3\|^2 + v_3 \cdot (e_1 - e_2 + e_3) = -(2x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z) + 1$
d'où $\mathscr{P} = \big\{I = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z = 1\big\}$ et $\overrightarrow{u} = -\frac{v_3}{5} + e_1 - e_2 + e_3 = \frac{1}{5}\Big(4e_1 - (\sqrt{2}+5)e_2 - (\sqrt{2}-5)e_3\Big)$

6. (2,5 pts) Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques géométriques de $f$.

Solution : $\overrightarrow{f}$ étant une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$, $f$ est donc une symétrie orthogonale glissée, composée d'une symétrie orthogonale $g$ par rapport à un plan de direction $E_1$ et d'une translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$ appartenant à $E_1$. Comme $\overrightarrow{If(I)} = \overrightarrow{Ig(I)} + \overrightarrow{g(I)f(I)} = \overrightarrow{Ig(I)} + \overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{If(I)} \in E_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{Ig(I)} \in E_1$. Or, par définition de $g$, $\overrightarrow{Ig(I)} \in (E_1)^\perp$ donc $\overrightarrow{If(I)} \in E_1$ équivaut à $\overrightarrow{Ig(I)} = 0$, c'est-dire à $g(I) = I$, et dans ce cas l'on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{If(I)}$. Donc le plan de la symétrie orthogonale et le vecteur de translation $\overrightarrow{v}$ sont le plan $\mathscr{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ déterminés à la question précédente.

**Exercice 6** (12 pts)**.** Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $E$ sa direction, et $O$ un point fixé de $\mathscr{E}$. On note $H$ l'ensemble des applications affines $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ dont la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une homothétie de $E$ de rapport $\neq 0$.

1. (1,5 pts) Montrer, en citant un résultat du cours, que tout $f \in H$ est inversible.

Solution : Pour toute application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, on sait d'après le cours que $f$ est inversible si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ l'est, et dans ce cas la partie linéaire de $f^{-1}$ est $(\overrightarrow{f})^{-1}$. Si $f \in H$, on a $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 0$, donc $\overrightarrow{f}$ est inversible (son inverse est $\lambda^{-1}\mathrm{id}_E$) et donc $f^{-1}$ est inversible, et sa partie linéaire est $\lambda^{-1}\mathrm{id}_E$. Ceci montre déjà que $f^{-1} \in H$, comme demandé dans la question 3.

2. (1,5 pts) Si $f \in H$ et $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ montrer, en utilisant la relation de Chasles, que $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$ pour tout $M \in \mathscr{E}$. Quelle est alors la nature de $f$ ?

Solution : Pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a : $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} + \overrightarrow{f(M)M}$ d'où $\overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(M)M} = 0$ c'est-à-dire $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$. Donc $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$.

3. (2 pts) Si $f \in H$ et $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 1$, montrer que $f$ possède un point fixe $I$ unique. (On cherchera $I$ tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{Of(I)}$.) Dans ce cas, on dit que $f$ est l'homothétie de centre $I$ et de rapport $\lambda$.

Solution : L'égalité $f(I) = I$ équivaut à

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{Of(I)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(I)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{Of(O)} + \lambda\overrightarrow{OI}$$

et donc à $(1-\lambda)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{Of(O)}$, soit $\overrightarrow{OI} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{Of(O)}$, ce qui détermine un point $I$ unique.

4. (2 pts) Si $f, g \in H$, montrer que $g \circ f \in H$ et $f^{-1} \in H$. (Donc $H$ est un groupe, appelé le groupe des homothéties et translations de $\mathscr{E}$).

Solution : Si $f, g \in H$ alors $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_E$ et $\overrightarrow{g} = \mu \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ et alors $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \mu\lambda \mathrm{id}_E$ où $\mu\lambda \neq 0$ donc $g \circ f \in H$. De même $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{id}_E$ où $\lambda^{-1} \neq 0$ donc $f^{-1} \in H$.

5. (1,5 pts) On prend $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$, où $O$ est le point $(0,0)$ et $(e_1, e_2)$ la base canonique. Soient $f_1$ (resp. $f_2$, resp. $f_3$) l'homothétie de centre $A = (1,0)$ et de rapport 2 (resp. centre $B = (0,1)$ et rapport $1/2$, resp. centre $C = (1,1)$ et rapport $-1$). Pour tout point $M = (x,y)$, déterminer les coordonnées $(x_1, y_1)$ (resp. $(x_2, y_2)$, resp. $(x_3, y_3)$) du point $M_1 = f_1(M)$ (resp. de $M_2 = f_2(M)$, resp. $M_3 = f_3(M)$).

Solution : On a : $\overrightarrow{AM_1} = 2\overrightarrow{AM}$ c'est-à-dire $(x_1 - 1, y_1) = 2(x-1, y)$ d'où $(x_1, y_1) = (2x - 1, 2y)$. De même $\overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$ c'est-à-dire $(x_2, y_2 - 1) = \frac{1}{2}(x, y-1)$ d'où $(x_2, y_2) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$, et $\overrightarrow{CM_3} = -\overrightarrow{CM}$ c'est-à-dire $(x_3 - 1, y_3 - 1) = -(x-1, y-1)$ d'où $(x_3, y_3) = (-x+2, -y+2)$.

6. (1 + 2 = 3 pts) On pose $f' = f_2 \circ f_1$ et $f'' = f_3 \circ f_1$. Déterminer les coordonnées $(x', y')$ du point $M' = f'(M)$, et celles $(x'', y'')$ du point $M'' = f''(M)$, puis les caractéristiques géométriques de $f'$ et de $f''$, c.-à.-d., selon le cas, le centre et le rapport, ou bien le vecteur de translation.

Solution : On a $(x', y') = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right) = \left(\frac{2x-1}{2}, \frac{2y+1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right)$ donc $f'$ est la translation de vecteur $u = \frac{-1}{2}(e_1 - e_2)$. On a $(x'', y'') = (-x_1 + 2, -y_1 + 2) = (-2x + 3, -2y + 2)$ donc $f''$ est une homothétie de rapport $-2$ ; les coordonnées de son centre sont déterminés par l'égalité $(x, y) = (-2x+3, -2y+2)$ ; le centre est donc le point $D = \left(1, \frac{2}{3}\right)$.

7. (1 pt) A-t-on $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$ ?

Solution : Posons $f''' = f_1 \circ f_2$ et notons $(x''', y''')$ les coordonnées de $M''' = f'''(M)$. On a $(x''', y''') = (2x_2 - 1, 2y_2) = (x - 1, y + 1)$ donc $f'''$ est la translation de vecteur $v = -e_1 + e_2$ d'où $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

**Exercice 7** (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où $O$ désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$. On considère le cône $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Soit $A$ le point $(0, 1, 1)$ de $\Gamma$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $P_\lambda$ le plan vectoriel engendré par $e_1$ et $e_3 + \lambda e_2$, et $\mathscr{P}_\lambda$ le plan affine $A + P_\lambda$.

1. (0,5 pt) Donner un vecteur $u_\lambda$ tel que $(e_1, u_\lambda)$ soit une BON de $P_\lambda$.

Solution : $u_\lambda = \dfrac{\lambda e_2 + e_3}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$

2. (1 pt) Pour tout point $M$ de $\mathscr{P}_\lambda$, de coordonnées $(x, t)$ dans le repère $(A, e_1, u_\lambda)$ de $\mathscr{P}_\lambda$, déterminer les coordonnées de $M$ dans le repère canonique $\mathscr{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On a $\overrightarrow{AM} = xe_1 + tu_\lambda = xe_1 + \dfrac{t\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} e_2 + \dfrac{t}{\sqrt{\lambda^2+1}} e_3$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, d'où

$$M = \left(x, \frac{t\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} + 1, \frac{t}{\sqrt{\lambda^2+1}} + 1\right).$$

3. (1,5 pts) Soit $\mathscr{C}_\lambda = \mathscr{P}_\lambda \cap \Gamma$. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_\lambda$ sous la forme $q(x, t) + \alpha x + \beta t = k$, où $q$ est une forme quadratique et $\alpha, \beta, k$ des réels que l'on déterminera. Désormais, on suppose $\lambda \neq 1$.

Solution : $M \in \mathscr{C}_\lambda$ si et seulement si $x^2 + \left(\dfrac{t\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} + 1\right)^2 = \left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda^2+1}} + 1\right)^2$, ce qui équivaut à

$$(\star) \qquad x^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} t^2 + 2\frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2+1}} t = 0.$$

4. (3 pts) Pour quelles valeurs de $\lambda$, $\mathscr{C}_\lambda$ est-elle une parabole, resp. une hyperbole, resp. une ellipse ? Lorsque $\mathscr{C}_\lambda$ est une parabole, écrire son équation sous la forme $x^2 = 2pt$, pour un réel $p$ qu'on déterminera.

Solution : La nature d'une conique $\mathscr{C}$ définie par une équation $q(x, t) + f(x, t) = k$, où $q$ est une forme quadratique non nulle, $f$ une forme linéaire et $k \in \mathbb{R}$ une constante, est déterminé par le rang et la signature de la forme quadratique $q(x, t)$ :

- Si $q$ est de rang 1, alors $\mathscr{C}$ est une parabole (éventuellement dégénérée en une « droite double », ou vide).
- Si $q$ est de rang 2 et de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$, alors $\mathscr{C}$ est une ellipse (éventuellement dégénérée en un point, ou vide).
- Si $q$ est de rang 2 et de signature $(1, 1)$, alors $\mathscr{C}$ est une hyperbole (éventuellement dégénérée en la réunion de 2 droites sécantes).

Dans notre cas où $q(x, t) = x^2 + \dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} t^2$ on obtient les cas suivants.

- $q$ est de rang 1 si et seulement si $\lambda = -1$ (compte tenu de l'hypothèse $\lambda \neq 1$) ; alors $\mathscr{C}_{-1}$ est la parabole d'équation $x^2 = 2\sqrt{2}t$.
  (Remarque. Pour $\lambda = 1$, on a l'équation $x^2 = 0$, donc $\mathscr{C}_1$ est une parabole dégénérée en une « droite double ».)

- $q$ est de rang 2 et de signature $(2,0)$ ou $(0,2)$ si et seulement si $\lambda^2 - 1 > 0$, c.-à.-d., $|\lambda| > 1$ ; alors $\mathscr{C}_\lambda$ est une ellipse (contenant le point $A$, et on verra plus bas qu'elle n'est pas réduite à ce point).
- $q$ est de rang 2 et de signature $(1,1)$ si et seulement si $\lambda^2 - 1 < 0$, c.-à.-d., $|\lambda| < 1$, alors $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole (éventuellement dégénérée en la réunion de 2 droites sécantes, mais on verra plus bas que ceci ne se produit pas).

5. (5 pts) Lorsque $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole ou une ellipse, écrire son équation sous la forme $\dfrac{T^2}{a^2} \pm \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, où $T = t + \mu$, pour des réels $\mu, a, b$ que l'on déterminera (avec $a, b > 0$). Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec les droites d'équation $T = 0$ ou $x = 0$.

Solution : On suppose $\lambda \neq 1$. L'équation $(\star)$ obtenue à la question 3. se récrit :

$$x^2 + \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(t + \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda+1}\right)^2 = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda+1}\right)^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

d'où $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}x^2 + \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2+1}\bigg(\underbrace{t + \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda+1}}_{=T}\bigg)^2 = 1.$

Si $|\lambda| > 1$, alors $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} > 0$, $\mathscr{C}_\lambda$ est une ellipse d'équation $\dfrac{T^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, avec $a = \sqrt{\dfrac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}}{|\lambda+1|}$ et $b = \sqrt{\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}$. L'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec l'axe d'équation $x = 0$ est formé des deux points de coordonnées $(0, \pm a - \mu)$ dans le repère $(A, e_1, u_\lambda)$, et l'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec l'axe d'équation $T = 0$, c'est à dire $t = \mu$, est formé des deux points de coordonnées $(\pm b, \mu)$.

Si $|\lambda| < 1$, alors $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} < 0$, $\mathscr{C}_\lambda$ est une hyperbole d'équation $\dfrac{T^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, avec $a = \sqrt{\dfrac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda+1}$ et $b = \sqrt{\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}}$. L'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec l'axe d'équation $x = 0$ est formé des deux points de coordonnées $(0, \pm a - \mu)$ dans le repère $(A, e_1, u_\lambda)$, et l'intersection de $\mathscr{C}_\lambda$ avec l'axe d'équation $T = 0$ est vide.

6. (1 pt) Soit $P$ le plan vectoriel engendré par $e_1$ et $e_2$. Déterminer l'intersection de $\Gamma$ avec le plan affine $A + P$.

Solution : Le plan affine $A + P$ a pour équation $z = 1$ et dans ce plan l'équation de $\Gamma \cap (A + P)$ est $x^2 + y^2 = 1$. Il s'agit donc d'un cercle de rayon 1 et de centre $\Omega = (0, 0, 1)$.