Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé de l'examen 2ème session du 28 juin 2010 (3h)

Exercice 1 (16pts). Pour chaque matrice de $M_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez les valeurs propres et la dimension des espaces propres puis dîtes, en le justifiant, si la matrice est diagonalisable ou non.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \\ -8 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution : Calculons $P_A(X)$. En développant par rapport à la 4ème ligne, puis par rapport à la 1ère, on obtient :

$$P_A(X) = (5-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 4 & -1-X & -1 \\ -8 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = (5-X)(1-X)\begin{vmatrix} -1-X & -1 \\ 4 & 3-X \end{vmatrix}$$
$$= (5-X)(1-X)(X^2-2X+1) = (5-X)(1-X)^3$$

donc les valeurs propres de A sont 1, de multiplicité 3, et 5, de multiplicité 1. L'espace propre $V_5 = \mathrm{Ker}(A - 5\,\mathrm{Id})$ est nécessairement de dimension 1 ; calculons $V_1 = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id})$. La matrice

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ -8 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, car les colonnes C_3 et C_4 sont linéairement indépendantes, tandis que $C_1 = -4C_3$ et $C_2 = 2C_3$. Donc $\dim V_1 = 2$ et donc A n'est pas diagonalisable.

La matrice B est triangulaire par blocs : $B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$ donc

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ -1 & -2-X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} = (X^2-1)(X^2-4X+4) = (X-1)(X+1)(X-2)^2$$

donc les valeurs propres de B sont 1 et -1, de multiplicité 1, et 2, de multiplicité 2. Les espaces propres V_1 et V_{-1} sont nécessairement de dimension 1. Considérons $B - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Échangeant L_1 et L_2 et remplaçant L_4 par $L_4 - L_3$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3, donc $V_2 = \mathrm{Ker}(B - 2\,\mathrm{Id})$ est de dimension 1, et donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (10pts). Réduire en somme de carrés puis déterminer la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes :

1. $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 4z^2 + t^2 - 4xz + 2xt + 2yz - 4yt - 4zt$.

   Solution : $q = (x-2z+t)^2 + y^2 + 2yz - 4yt = (x-2z+t)^2 + (y+z-2t)^2 - (z-2t)^2$, donc q est de signature $(2,1)$ et de rang 3.

2. $Q(x,y,z,t) = -x^2 - y^2 - 2xy + yz + 2yt + 3zt$.

   Solution : $Q = -(x+y)^2 + (y+3t)(z+2t) - 6t^2 = -X^2 + Y^2 - Z^2 - 6t^2$, en posant $X = x+y$ et $y+3t = Y+Z$, $z-2t = Y-Z$, c.-à.-d., $Y = (y+z+t)/2$ et $Z = (y-z+5t)/2$. Donc Q est de signature $(1,3)$ et de rang 4.

Exercice 3 (22 pts)**.** Soient $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Si $M \in \mathcal{E}$, on écrira $M(x, y, z)$ pour indiquer que (x, y, z) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $I(-1, 0, 1)$ et de direction le plan vectoriel P engendré par $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Soit D la droite vectorielle $P^\perp$. On note π_D (resp. π_P) la projection orthogonale sur D (resp. P) et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.

1. Donner un vecteur non nul $f_3 \in D$.

   Solution : On cherche $f_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} 0 = (f_1 \mid f_3) = x + 2y \\ 0 = (f_2 \mid f_3) = y + z \end{cases}$, ce qui équivaut à $x = -2y = 2z$, donc le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Notons tout de suite que $(f_3 \mid f_3) = 4 + 1 + 1 = 6$.

2. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, rappeler les formules exprimant $\pi_D(v)$, puis $\pi_P(v)$ et $\sigma(v)$ en fonction de v et de f_3, puis écrire dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la matrice A (resp. B) de π_P (resp. σ).

   Solution : On a

$$\pi_D(v) = \frac{(v \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3, \qquad \pi_P(v) = v - \frac{(v \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3, \qquad \sigma(v) = v - 2\frac{(v \mid f_3)}{(f_3 \mid f_3)} f_3.$$

   Comme $(f_3 \mid f_3) = 6$ et $(e_1 \mid f_3) = 2$, $(e_2 \mid f_3) = -1$, $(e_3 \mid f_3) = 1$, on obtient que

$$\begin{aligned} \pi_P(e_1) &= e_1 - (1/3) f_3 & \qquad \sigma(e_1) &= e_1 - (2/3) f_3 \\ \pi_P(e_2) &= e_2 + (1/6) f_3 & \sigma(e_2) &= e_2 + (1/3) f_3 \\ \pi_P(e_3) &= e_3 - (1/6) f_3 & \sigma(e_3) &= e_3 - (1/3) f_3 \end{aligned}$$

   d'où les matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 5/6 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

3. Soient f la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et g la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IM}$ puis déterminer celles (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des points $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.

   Solution : On a $\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ et $f(I) = I = g(I)$, donc

$$\overrightarrow{If(M)} = \pi_P(\overrightarrow{IM}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x+2y-2z+4 \\ 2x+5y+z+1 \\ -2x+y+5z-7 \end{pmatrix}$$

   d'où

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{If(M)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x+2y-2z+4 \\ 2x+5y+z+1 \\ -2x+y+5z-7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x+2y-2z-2 \\ 2x+5y+z+1 \\ -2x+y+5z-1 \end{pmatrix}.$$

   D'autre part,

$$\overrightarrow{Ig(M)} = \sigma(\overrightarrow{IM}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y-2z+1 \\ 2x+2y+z+1 \\ -2x+y+2z-4 \end{pmatrix}$$

   d'où

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Ig(M)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y-2z+1 \\ 2x+2y+z+1 \\ -2x+y+2z-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x+2y-2z-2 \\ 2x+2y+z+1 \\ -2x+y+2z-1 \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que pour $M = I(-1, 0, 1)$, on a bien $M_1 = I = M_2$.

4. Soit t_u la translation de vecteur $u = f_1 - f_2$. Pour tout $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$, déterminer les coordonnées (x_1', y_1', z_1') et (x_2', y_2', z_2') des points $M_1' = t_u(M_1)$ et $M_2' = t_u(M_2)$. Déterminer, en le justifiant, la nature et les caractéristiques de la transformation affine $t_u \circ g$.

   Solution : On a $u = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\\z_1'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2x+2y-2z+4\\2x+5y+z+7\\-2x+y+5z-7\end{pmatrix}$
   et $\begin{pmatrix}x_2'\\y_2'\\z_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-x+2y-2z+1\\2x+2y+z+4\\-2x+y+2z-4\end{pmatrix}$.

   Comme $u = f_1 - f_2$ appartient au plan P, alors g est la symétrie orthogonale glissée par rapport au plan affine $\mathcal{P}$, de vecteur de glissement u.

Exercice 4 (16pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$. On note $\mathcal{B}$ la base (e_1, e_2) ; pour tout $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x,y)$ pour indiquer que (x,y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. Soient $A(1,-1)$, $B(1,1)$ et $C(-\sqrt{2}, 0)$ et soient r_1 la rotation de centre O envoyant A sur B, et r_2 la rotation de centre C envoyant B sur A.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$ puis les déterminants $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. En déduire les angles θ_1 et θ_2 des rotations r_1 et r_2.

   Solution : On a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, ces deux vecteurs sont de même norme $\sqrt{2}$, donc il existe une unique rotation r_1 de centre O envoyant A sur B. On a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ et donc l'angle orienté $\theta_1 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ vaut $\pm\pi/2$; comme $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix} = 2 > 0$, on a $\theta_1 = \pi/2$.

   On a $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$, ces deux vecteurs sont de même norme $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, donc il existe une unique rotation r_2 de centre C envoyant B sur A, soit θ_2 son angle. On a

   $$\cos\theta_2 = \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CB}\|^2} = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{4+2\sqrt{2}}.$$

   Comme $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 2 + 2\sqrt{2}$, on obtient

   $$\cos\theta_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   donc $\theta_2 = \pm\pi/4$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \begin{vmatrix}1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2}\\1 & -1\end{vmatrix} = -2(1+\sqrt{2}) < 0$, on a $\theta_2 = -\pi/4$.

2. Déterminer sans calculs, en justifiant votre réponse, la nature et les caractéristiques des transformations affines $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$.

   Solution : On sait d'après le cours que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2$, ou bien une translation, si $\theta = 0$. Ici, $\theta = \pi/4$ et $r_2 \circ r_1$ a A comme point fixe, donc $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre A et d'angle $\pi/4$. De même, $r_1 \circ r_2$ est la rotation de centre B et d'angle $\pi/4$.

3. Pour tout $M(x,y)$, calculer les coordonnées (x_1, y_1) de $M_1 = r_1(M)$, (x_2, y_2) de $M_2 = r_2(M)$ et (x', y') de $M' = (r_2 \circ r_1)(M)$.

   Solution : La partie linéaire de r_1 (resp. r_2) est une rotation vectorielle d'angle $\pi/2$ (resp. $-\pi/4$), dont la matrice est donc $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ (resp. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$).

   On a alors $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$.

   De même, on a $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}x+\sqrt{2}\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\overrightarrow{CM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y+\sqrt{2}\\-x+y-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ d'où

   $$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y+\sqrt{2}-2\\-x+y-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Comme $M' = r_2(M_1)$, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x_1 + y_1 + \sqrt{2} - 2 \\ -x_1 + y_1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -y + x + \sqrt{2} - 2 \\ y + x - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que pour $M = A(1, -1)$, on a bien $x' = 1$ et $y' = -1$, i.e. $A' = A$.
Retrouvons ceci en utilisant la question précédente : la partie linéaire de $r_2 \circ r_1$ est une rotation vectorielle d'angle $\pi/4$, dont la matrice est donc $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x - y - 2 \\ x + y \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x - y - 2 + \sqrt{2} \\ x + y - \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (11pts)**.** Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante : $q(x, y, z) = y^2 + 4xy - 2xz + 4yz$, et soit ϕ sa forme polaire. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice S de ϕ dans la base $\mathcal{B}_0$.

   Solution : On a $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer les valeurs propres de S et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
3. Soient X, Y, Z les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ choisie, exprimer Q en fonction de X, Y, Z.

   Solution : Comme S est une matrice symétrique réelle, on sait que ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On a

$$P_S(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 2 & 1-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -1 \\ 0 & 1-X & 2 \\ X-1 & 2 & -X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 4 & -1-X \end{vmatrix}$$

en faisant $C_1 \to C_1 - C_3$, puis $L_3 \to L_3 + L_1$, donc $P_S(X) = (1-X)(X^2-9) = -(X-1)(X-3)(X+3)$, i.e. les valeurs propres sont $1, 3, -3$. De plus, le calcul ci-dessus ($C_1 - C_3$ fait apparaître une colonne nulle pour $X = 1$) montre que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1, donc $V_1 = \mathrm{Ker}(S - \mathrm{Id})$ égale $\mathbb{R}v_1$. Déterminons $V_3 = \mathrm{Ker}(S - 3\,\mathrm{Id})$:

$$\left(\begin{array}{ccc} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 3, d'où $V_3 = \mathbb{R}v_2$. Enfin, un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est orthogonal à v_1 et v_2 si et seulement si $0 = x - z = x + 2y + z$, ce qui équivaut à $z = x = -y$, donc $V_{-3} = (V_1 + V_3)^\perp$ est engendré par $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Posons

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de S, et la matrice de ϕ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Par conséquent, si l'on note (X, Y, Z) les coordonnées dans cette base, alors $Q(X, Y, Z) = X^2 + 3Y^2 - 3Z^2$.

Exercice 6 (10 pts)**.** Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$, avec $r \leq n$, et $J = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$, où I_r est la matrice identité de taille r.

1. Pour tout $P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{R})$, où $A \in M_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$, exprimer la matrice ${}^tPJP$ sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right)$ où l'on exprimera les matrices K, L, M, N en fonction de A, B, C, D.

   Solution : On a $JP = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ et ${}^tP = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right)$, d'où

   $$ {}^tPJP = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tAA & {}^tAB \\ \hline {}^tBA & {}^tBB \end{array}\right) = {}^t(JP) \cdot (JP). $$

2. Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ de signature $(r, 0)$ et S sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Déterminer une matrice $Q \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tQQ$.

   Solution : Comme ϕ est de signature $(r, 0)$, il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi) = J$. Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, et soit $Q = JP$, alors on a

   $$ S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = {}^tPJP = {}^t(JP) \cdot (JP) = {}^tQQ. $$

Exercice 7 (15 + 2 pts)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, et $G \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice $(g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, où pour tout i, j, on a $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. Montrer que $\mathrm{dét}(G) \neq 0$.

   Solution : Soient $\mathcal{C}_0$ une base orthonormée de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{C}) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$. Alors $G = {}^tPP$, et donc $\mathrm{dét}(G) = \mathrm{dét}(P)^2 > 0$.

2. À tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on associe le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Exprimer X en fonction de M et Y.

   Solution : Pour tout $i = 1, \ldots, p$, soit $V_i \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne exprimant v_i dans la base $\mathcal{B}$. Alors, d'une part, $(v_i \mid Y) = {}^tV_iY$ et, d'autre part, M a pour colonnes $V_1, \ldots, V_p$, donc ${}^tM$ a pour lignes ${}^tV_1, \ldots, {}^tV_p$. On en déduit que $X = {}^tMY$.

3. D'autre part, on pose $\pi(Y) = t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $X = GT$.

   Solution : Pour tout $i = 1, \ldots, p$, on a

   $$ (v_i \mid Y) = (v_i \mid \pi(Y)) = \sum_{j=1}^{n} t_j(v_i \mid v_j) = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j}t_j $$

   et ceci montre que $X = GT$.

4. Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.

   Solution : D'après la question 1., G est inversible, donc les égalités $X = {}^tMY = GT$ entraînent $T = G^{-1}\,{}^tMY$.

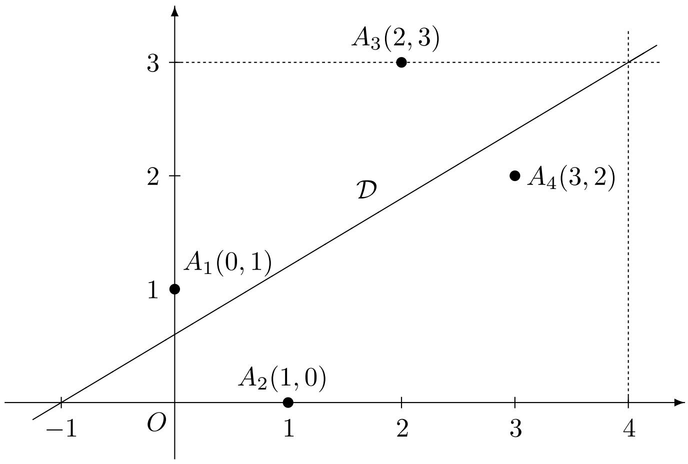
5. On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1v_1 + t_2v_2$.

Solution : On a $(v_1 \mid v_1) = 4$, $(v_1 \mid v_2) = 6$ et $(v_2 \mid v_2) = 14$, donc $G = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$, $\text{dét}(G) = 56 - 36 = 20$, et $G^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On a aussi ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc, d'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = G^{-1}\,{}^tMY = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. (bonus 2 pts) Soient v_1, v_2 et Y, t_1, t_2 comme dans la question précédente. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, faire un dessin représentant les points de coordonnées $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$, $(3, y_4)$, où $(y_1, y_2, y_3, y_4) = {}^tY = (1, 0, 3, 2)$, ainsi que la droite affine $\mathcal{D}$ d'équation $y = t_1 + t_2 x$.

Solution :



L'explication est la suivante. Posons $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on s'est donc donné les points $A_i(x_i, y_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. À toute droite affine Δ d'équation $y = b + ax$, on associe le réel ≥ 0 ci-dessous :

$$d(\Delta) = \sum_{i=1}^{4} (b + ax_i - y_i)^2$$

c.-à.-d., la somme, pour $i = 1, 2, 3, 4$, du carré de la distance entre le point donné $A_i(x_i, y_i)$ et le point correspondant $B_i(x_i, b + ax_i)$ de Δ d'abscisse x_i. On voit que $d(\Delta)$ est le carré de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (où $n = 4 =$ nombre de points) du vecteur

$$Y - bv_1 - av_2, \qquad \text{où} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par v_1 et v_2 et soit $\pi(Y)$ la projection orthogonale sur E. D'après le théorème de Pythagore, pour toute droite affine Δ d'équation $y = b + ax$, correspondant au vecteur $bv_1 + av_2$ de E, on a

$$d(\Delta) = \|Y - bv_1 - av_2\|^2 = \|Y - \pi(Y)\|^2 + \|\pi(Y) - bv_1 - av_2\|^2 \geq \|Y - \pi(Y)\|^2$$

avec égalité si et seulement si $bv_1 + av_2 = \pi(Y)$. Par conséquent, il existe une unique droite affine $\mathcal{D}$ telle que $d(\mathcal{D})$ soit minimum, et c'est la droite d'équation $y = t_1 + t_2 x$, où $t_1 v_1 + t_2 v_2$ est la projection orthogonale de $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ sur $E = \text{Vect}(v_1, v_2)$, et d'après la question précédente, t_1, t_2 sont donnés par la formule $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = G^{-1}\,{}^tMY$.