Université Pierre et Marie Curie 2010–2011

LM270, corrigé de l'examen 2ème session du 28/6/11 (3h)

Exercice 1 (10 pts)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $A_t = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -t-1 & 0 \\ -1 & t-1 & 2 & 2-t \\ 2 & 4 & t & t-1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Échelonner cette matrice en faisant des opérations sur les colonnes et calculer en fonction de t le déterminant et le rang de A_t ; lorsque $\mathrm{rang}(A_t) < 4$, donner une base de $\mathrm{Im}(A_t)$ et de $\mathrm{Ker}(A_t)$.

Solution : On a

$$\begin{pmatrix} A_t \\ \hline I_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_1} \left(\begin{array}{cccc} t+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 1 & 2-t \\ 2 & 4 & t+2 & t-1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \to C_2 - 2C_4]{C_3 \to C_3 - 2C_4} \left(\begin{array}{cccc} t+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3t-5 & 2t-3 & 2-t \\ 2 & 6-2t & 4-t & t-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A'_t \\ \hline J \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\mathrm{dét}(A_t) = (t+1) \begin{vmatrix} 3t-5 & 2t-3 \\ 6-2t & 4-t \end{vmatrix}$; or

$$\begin{vmatrix} 3t-5 & 2t-3 \\ 6-2t & 4-t \end{vmatrix} = -3t^2 + 17t - 20 + 4t^2 - 18t + 18 = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

d'où $\mathrm{dét}(A_t) = (t+1)^2(t-2)$. Donc, lorsque $t \notin \{-1, 2\}$, on a $\mathrm{dét}(A_t) \neq 0$ et A_t est de rang 4. Pour $t = -1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} A'_{-1} \\ \hline J \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & -5 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 \to C_1 - C_4]{C_3 \to 8C_3 - 5C_2} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

donc $\mathrm{rang}(A_{-1}) = 2$ et

$$\mathrm{Im}(A_{-1}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Ker}(A_{-1}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour $t = 2$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} A'_2 \\ \hline J \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_3} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

donc $\mathrm{rang}(A_2) = 3$ et

$$\mathrm{Im}(A_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Ker}(A_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (18 pts)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et soient $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et E le sous-espace formé des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(*) \qquad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

1. (1 pt) Dîtes, en le justifiant, quelle est la dimension de E.

Solution : L'application $E \to \mathbb{C}^3$, $\mathbf{u} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est linéaire, et elle est bijective car pour tout $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ il existe une unique suite $\mathbf{u} \in E$ telle que $u_0 = z_0$, $u_1 = z_1$, $u_2 = z_2$ (les autres termes étant déterminés de façon unique par la relation $(*)$). Donc $E \simeq \mathbb{C}^3$ et donc $\dim(E) = 3$.

2. (0,5 pt) Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $P(\lambda) = 0$, pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 que l'on déterminera.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 = \lambda^{n+3} - a\lambda^{n+2} - b\lambda^{n+1} - c\lambda^n = \lambda^n(\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c)$$

et comme $\lambda \neq 0$ ceci équivaut à $P(\lambda) = 0$, où $P = X^3 - aX^2 - bX - c$.

3. (0,5 pt) Soit $D : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $D(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ (i.e. $D(\mathbf{u})_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que E est stable par D.

Solution : Soit $\mathbf{u} \in E$. Alors $(*)$ est vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 = u_{n+4} - au_{n+3} - bu_{n+2} - cu_{n+1} = D(\mathbf{u})_{n+3} - aD(\mathbf{u})_{n+2} - bD(\mathbf{u})_{n+1} - cD(\mathbf{u})_n$$

et ceci montre que $D(\mathbf{u}) \in E$.

4. (2,5 pts) On suppose que P a trois racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Montrer que les suites $\mathbf{u} = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (\lambda_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. (On pourra soit utiliser l'endomorphisme D, soit considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $x\lambda_1^i + y\lambda_2^i + z\lambda_3^i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$). Que peut-on en déduire dans ce cas ?

1ère solution : On a $D(\mathbf{u}) = \lambda_1\mathbf{u}$ et de même $D(\mathbf{v}) = \lambda_2\mathbf{v}$ et $D(\mathbf{w}) = \lambda_3\mathbf{w}$. Donc $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme D de $\mathscr{S}$ pour des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et donc $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont linéairement indépendants.

2ème solution : Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$. Alors, considérant les trois premiers termes, on obtient que x, y, z sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0 \\ \lambda_1^2 x + \lambda_2^2 y + \lambda_3^2 z = 0. \end{cases}$$

Or le déterminant de ce système est le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

qui est $\neq 0$, donc $x = 0 = y = z$, et ceci prouve que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont linéairement indépendants.

Comme $\dim(E) = 3$, on en déduit que dans ce cas $\mathscr{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de E.

5. (1,5 pts) On suppose que $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$ et $\lambda_3 = 2$. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 4 = t_2$. Déterminer t_{99} et t_{100}.

Solution : D'après la question précédente, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\mathbf{t} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}$. Alors (x, y, z) est solution du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \\ x + y + 4z = 4. \end{cases}$$

Alors $L_3 - L_1$ donne $3z = 3$ d'où $z = 1$; alors L_1 puis L_2 donnent $y = -x$ et $2x = 2$, d'où $x = 1 = z$ et $y = -1$. Donc $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $t_n = 1 - (-1)^n + 2^n$. En particulier

$$t_{99} = 2 + 2^{99} = 2(1 + 2^{98}) \qquad \text{et} \qquad t_{100} = 2^{100}.$$

6. (2 pts) Montrer qu'une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si $(a_3D^3+a_2D^2+a_1D+a_0\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$, pour un certain polynôme $Q = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ que l'on déterminera.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = D(\mathbf{u})_n$. On en déduit que $u_{n+2} = D(\mathbf{u})_{n+1} = D^2(\mathbf{u})_n$ et, de même, $u_{n+3} = D^3(\mathbf{u})_n$. Par conséquent la relation $(*)$ qui caractérise E est équivalente à la relation

$$0 = D^3(\mathbf{u})_n - aD^2(\mathbf{u})_n - bD(\mathbf{u})_n - cu_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui équivaut à dire que $(D^3 - aD^2 - bD + c\,\mathrm{id})(\mathbf{u})$ est la suite nulle, c.-à.-d., que $\mathbf{u}$ est annulée par l'endomorphisme $P(D)$. On a donc $Q = P$.

7. (3 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ les suites définies par $u_n = \lambda^n$, $v_n = n\lambda^{n-1}$ et $w_n = \binom{n}{2}\lambda^{n-2}$, où $\binom{n}{2}$ est le coefficient binomial $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Calculer $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u})$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{v})$ pour $i = 1, 2$, puis $(D - \lambda\mathrm{id})^i(\mathbf{w})$ pour $i = 1, 2, 3$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\big((D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u})\big)_n = u_{n+1} - \lambda u_n = \lambda^{n+1} - \lambda \cdot \lambda^n = 0,$$

donc $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$. Puis

$$\big((D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{v})\big)_n = v_{n+1} - \lambda v_n = (n + 1)\lambda^n - n\lambda \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^n$$

d'où $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ et donc $(D - \lambda\mathrm{id})^2(\mathbf{v}) = (D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$. Enfin,

$$\big((D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{w})\big)_n = w_{n+1} - \lambda w_n = \frac{(n + 1)n}{2}\lambda^{n-1} - \frac{n(n - 1)}{2}\lambda \cdot \lambda^{n-2} = n\lambda^{n-1}$$

d'où $(D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ et donc $(D - \lambda\mathrm{id})^2(\mathbf{w}) = (D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ puis $(D - \lambda\mathrm{id})^3(\mathbf{w}) = (D - \lambda\mathrm{id})(\mathbf{u}) = 0$.

8. (3 pts) Déduire des questions précédentes que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une racine double (resp. triple) de P, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$) appartiennent à E. Montrer d'autre part que les suites $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont linéairement indépendantes (considérer, pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, le système $xu_i + yv_i + zw_i = 0$ pour $i = 0, 1, 2$).

Solution : Remarquons que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une racine double (resp. triple) de P alors le polynôme $(X - \lambda)^2$ divise P (resp. $(X - \lambda)^3$ égale P). Or, d'après ce qui précède, la suite $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{w}$) est annulée par $(D - \lambda\mathrm{id})^2$ (resp. par $(D - \lambda\mathrm{id})^3$). Donc si λ est une racine double de P alors $\mathbf{v}$ est annulée par $P(D)$ donc appartient à E, et si λ est une racine triple de P alors $\mathbf{w}$ est aussi annulée par $P(D)$ donc appartient à E.

D'autre part, soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$. Comme $u_0 = 1$ et $v_0 = 0 = w_0$, on a $x = 0$. Puis comme $v_1 = 1$ et $w_1 = 0$, on obtient $y = 0$, d'où aussi $z = 0$. Ceci montre que les suites $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont linéairement indépendantes.

9. (2 pts) On suppose que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est racine triple de P. Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de E tel que $t_0 = 1$ et $t_1 = 0 = t_2$. Exprimer t_n en fonction de n et de λ. D'autre part, notant d l'endomorphisme de E induit par D, écrire la matrice de d dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ introduite à la question précédente.

Solution : D'après la question précédente, $\mathscr{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de E, donc il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\mathbf{t} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}$. Alors (x, y, z) est solution du système :

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ \lambda x + y & = & 0 \\ \lambda^2 x + 2\lambda y + z & = & 0, \end{cases}$$

ce qui donne $x = 1$, $y = -\lambda$ et $z = \lambda^2$. Donc $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \lambda\mathbf{v} + \lambda^2\mathbf{w}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$t_n = \lambda^n - n\lambda \cdot \lambda^{n-1} + \frac{n(n - 1)}{2}\lambda^2 \cdot \lambda^{n-2} = \lambda^n\frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}\lambda^n.$$

D'autre part, d'après les calculs effectués à la question 7), on a $d(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, $d(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}$ et $d(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v}$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(d) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

i.e. c'est le bloc de Jordan $J_3(\lambda)$.

10. (2 pts) On suppose que $P=(X-\lambda)^2(X-\mu)$ avec $\mu\neq\lambda$ et $\lambda\mu\neq 0$. Donner trois suites $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ appartenant à E et montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

Solution : D'après les questions précédentes, les suites $\mathbf{u},\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ données par $u_n=\lambda^n$, $v_n=n\lambda^{n-1}$ et $w_n=\mu^n$ appartiennent à E. Montrons que $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sont linéairement indépendantes. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ tels que $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w}=0$.

1ère méthode : appliquant $D-\lambda\mathrm{id}$, on trouve $y\mathbf{u}+z(\mu-\lambda)\mathbf{w}=0$ et comme $\mathbf{u},\mathbf{w}$ sont des vecteurs propres de D pour les valeurs propres $\lambda\neq\mu$, ils sont linéairement indépendants, donc l'égalité précédente entraîne que $y=z=0$, d'où aussi $x=0$.

2ème méthode : (x,y,z) est solution du système :

$$\begin{cases} x+z &= 0\\ \lambda x+y+\mu z &= 0\\ \lambda^2x+2\lambda y+\mu^2 z &= 0\end{cases}$$

Faisant $L_2-\lambda L_1$ et $L_3-\lambda L_2$, on obtient le système

$$\begin{cases} y+(\mu-\lambda)z=0\\ \lambda y+\mu(\mu-\lambda)z=0\end{cases}$$

d'où $(\mu-\lambda)^2z=0$ et donc $z=0$, puis $y=0$ et $x=0$.

Exercice 3 (8pts)**.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x,y,z,t)=x^2+4z^2+t^2+4xz-2xt-3zt-yz+2yt.$$

Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer sa signature et son rang.

Solution : Considérant le terme x^2 et les termes contenant x, on a

$$q(x,y,z,t)=(\underbrace{x+2z-t}_{X})^2+4zt-3zt-yz+2yt=X^2+zt-yz+2yt.$$

Puis $zt-yz+2yt=(\underbrace{z+2y}_{z'})(\underbrace{t-y}_{t'})+2y^2=Z'^2-T'^2+2y^2$, où l'on a posé $Z'=\dfrac{z'+t'}{2}$ et $T'=\dfrac{z'-t'}{2}$. Donc $q(X,y,Z',T')=X^2+2y^2+Z'^2-T'^2$ et donc q est de rang 4 et de signature $(3,1)$.

Remarque : pour la 2ème étape, on pouvait aussi faire le changement de variable $Z=\dfrac{z+t}{2}$ et $T=\dfrac{z-t}{2}$, c'est-à-dire $z=Z+T$ et $t=Z-T$, qui donne

$$zt-yz+2yt=Z^2-T^2+yZ-3yT=(\underbrace{Z+\frac{y}{2}}_{Z'})^2-\frac{y^2}{4}-(\underbrace{T+\frac{3y}{2}}_{T'})^2+\frac{9y^2}{4}=Z'^2-T'^2+2y^2.$$

Exercice 4 (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0=(O,\mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1,e_2,e_3). Soit $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ définie par : pour tout point $M=(x,y,z)$, les coordonnés (x',y',z') du point $M'=f(M)$ sont

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-x+\sqrt{2}y+z\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}z\\ x+\sqrt{2}y-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

1. (1 pt) Soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f. Écrire la matrice $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$.

Solution : $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{2}&1\\ \sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\ 1&\sqrt{2}&-1\end{pmatrix}$.

2. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux et de somme égale à $\mathbb{R}^3$.

Solution : A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée (et donc $\overrightarrow{f}$ également). Les espaces propres de A (c'est-à-dire ceux de $\overrightarrow{f}$) sont donc deux à deux orthogonaux et engendrent $\mathbb{R}^3$.

3. (4,5 pts) Montrer d'autre part que $A \in O(3)$. Que peut-on dire alors de ses valeurs propres ? Déterminer une base de chaque espace propre.

Solution : Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A. On a :

$$C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_3 = (1/4) \times (\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 0, \qquad C_1 \cdot C_3 = (1/4) \times (-1 + 2 - 1) = 0$$

$$\|C_1\|^2 = \|C_3\|^2 = (1/4)(1 + 2 + 1) = 1, \qquad \|C_2\|^2 = (1/4)(2 + 2) = 1.$$

Les colonnes de A forment donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, d'où $A \in O(3)$. Il en résulte que les valeurs propres de A sont 1 ou -1. De plus, comme A est diagonalisable, 1 et -1 sont toutes deux valeurs propres, sinon $\mathbb{R}^3$ tout entier serait espace propre et A serait déjà diagonale (égale à $\pm I_3$).

Donc les valeurs propres sont $1, 1, -1$ ou bien $1, -1, -1$. Comme $\mathrm{Tr}(A) = (1/2)(-1 - 1) = -1$, on est dans le second cas, donc on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A + I_3) = 2$ et que $\mathrm{dét}(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$, donc A est une rotation d'axe $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$. Et comme la restriction de A au plan $P = D^\perp$ est $-\mathrm{id}$, on sait que A est le demi-tour d'axe D. (On peut aussi calculer l'angle de rotation θ en disant que $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{Tr}(A) = -1$, d'où $\cos(\theta) = -1$ et donc $\theta = \pi$ modulo $2\pi\mathbb{Z}$.)

Ceci étant dit, on a $A - I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ et $A + I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. On voit alors que $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ est le plan P engendré par $u = e_1 - e_3$ et $v = \sqrt{2}e_1 - e_2$. Alors $D = P^\perp$ est l'ensemble des vecteurs $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tels que $0 = w \cdot u = x - z$ et $0 = w \cdot v = \sqrt{2}x - y$, d'où $y = \sqrt{2}x$ et $z = x$, donc D est la doite engendrée par le vecteur $w = e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3$. On pouvait aussi faire des opérations sur les colonnes de $2(A - I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc} -3 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 \to C_1 + 3C_3]{C_2 \to C_2 - \sqrt{2}C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 4\sqrt{2} & -4 & \sqrt{2} \\ -8 & 4\sqrt{2} & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -\sqrt{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 + \sqrt{2}C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array}\right)$$

et l'on retrouve bien que $D = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (1 pt) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $\overrightarrow{f}$.

Solution : On a vu dans la question précédente que $\overrightarrow{f}$ est le demi-tour d'axe $D = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points I tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et, pour tout $I \in \mathscr{D}$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{If(I)}$.

Solution : Soit $I = (x, y, z)$, alors $\overrightarrow{If(I)} \in D = P^\perp$ si et seulement si $0 = u \cdot \overrightarrow{If(I)} = v \cdot \overrightarrow{If(I)}$. Comme

$$\overrightarrow{If(I)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3x + \sqrt{2}y + z + 4 \\ \sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - 3z \end{pmatrix}$$

on obtient les équations

$$0 = u \cdot \overrightarrow{If(I)} = (1/2)(-4x + 4z + 4), \qquad 0 = v \cdot \overrightarrow{If(I)} = (1/2)(-4\sqrt{2}x + 4y + 4\sqrt{2}).$$

La première donne $x = z + 1$, et remplaçant dans la seconde on obtient $y = \sqrt{2}z$. Donc $\mathscr{D}$ est la droite affine donnée par ces équations, c.-à.-d., la droite $A + D$ où A est le point $(1, 0, 0)$. On sait, d'après le cours, que le vecteur $\overrightarrow{If(I)}$ ne dépend pas du point I choisi dans $\mathscr{D}$; pour $I = A$ on trouve :

$$\overrightarrow{Af(A)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+4 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = w.$$

6. (1,5 pts) Déduire de ce qui précède la nature et les caractéristiques géométriques de f.

Solution :
D'après ce qui précède, f est un vissage d'axe $\mathscr{D} = A + \mathbb{R}w$, orienté par w, d'angle π et de vecteur de vissage w. (En fait, comme l'angle est π, qui égale $-\pi$ modulo 2π, l'orientation de l'axe n'a ici pas d'importance).

Exercice 5 (12 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0, 0, 0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient I le point $(0, 2, 0)$, w le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, et $\mathscr{D}$ la droite affine $I + \mathbb{R}w$. Soit f le vissage d'axe $\mathscr{D}$ orienté par w, d'angle $\pi/4$ et de vecteur de vissage $\sqrt{2}w = e_1 - e_3$, et soit $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.

1. (4 pts) Déterminer un vecteur unitaire v tel que $\mathscr{C} = (e_2, v, w)$ soit une BON directe. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ et son inverse P^{-1}.

Solution : On cherche d'abord un vecteur $v' = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $0 = e_2 \cdot v' = y$ et $0 = (e_1 - e_3) \cdot v' = x - z$; on peut donc prendre $v' = e_1 + e_3$. On doit alors prendre $v = \pm \frac{1}{\|v'\|} v'$, le choix du signe étant déterminé par la condition que la base (e_2, v, w) soit directe, i.e. que le déterminant $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(e_2, v, w)$ soit > 0. Or pour v' on obtient le déterminant

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$$

donc on prend $v = \frac{1}{\|v'\|} v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$. Alors

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et comme $P \in O(3)$ (puisque $\mathscr{C}$ est une BON), $P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2. (4 pts) Écrire la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\overrightarrow{f})$, puis la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \frac{1}{4}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $p + q\sqrt{2}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$).

Solution : Comme $\mathscr{C} = (e_2, v, w)$ est une BON directe et comme $\overrightarrow{f}$ est une rotation d'axe $\mathbb{R}w$ orienté par w et d'angle $\pi/4$, on a

$$C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, comme $C = P^{-1}BP$, on a $B = PCP^{-1}$. Calculons PC :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

puis

$$B = PCP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 & -2+\sqrt{2} \\ -2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ -2+\sqrt{2} & 2 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions que B est bien orthogonale : on a $C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_3 = (1/16)\big(4+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}\big) = 0$ et $C_1 \cdot C_3 = (1/16)(-2+4-2) = 0$, et C_1, C_3 sont de norme $(1/16)(6+2\sqrt{2}+4+6-2\sqrt{2}) = 1$, et C_2 de norme $(1/16)(4+8+4) = 1$.

3. (3 pts) Soit g la rotation d'axe $\mathscr{D}$ orienté par w, et d'angle $\pi/4$. Pour tout point $M = (x, y, z)$, déterminer les vecteurs $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis $\overrightarrow{If(M)}$.

Solution : D'abord, comme $f = t_{e_1-e_3} \circ g$, on a $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. Puis, comme $I \in \mathscr{D}$ on a $g(I) = I$ et donc $\overrightarrow{Ig(M)} = \overrightarrow{g(I)g(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM})$, qui égale

$$B\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x+2y+(-2+\sqrt{2})z-4 \\ -2x+2\sqrt{2}y-2z-4\sqrt{2} \\ (-2+\sqrt{2})x+2y+(2+\sqrt{2})z-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x+2y+(-2+\sqrt{2})z \\ -2x+2\sqrt{2}y-2z \\ (-2+\sqrt{2})x+2y+(2+\sqrt{2})z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $\overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{Ig(M)} + e_1 - e_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x+2y+(-2+\sqrt{2})z \\ -2x+2\sqrt{2}y-2z \\ (-2+\sqrt{2})x+2y+(2+\sqrt{2})z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. (1 pt) Déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = f(M)$.

Solution : On a $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{If(M)}$ et donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x+2y+(-2+\sqrt{2})z \\ -2x+2\sqrt{2}y-2z \\ (-2+\sqrt{2})x+2y+(2+\sqrt{2})z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2-\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (15 pts)**.** Soit $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé canonique $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B})$, où O désigne le point $(0,0)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique (e_1, e_2). On fixe un réel $h > 0$. Pour tout réel $e > 0$ soit alors $\mathscr{C}_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = e^2(x+h)^2\}$. (Remarque : $\mathscr{C}_e$ est la conique de foyer O, de directrice la droite d'équation $x = -h$, et d'excentricité e, cf. le polycopié du cours.)

1. (1 pt) Montrer que l'intersection de $\mathscr{C}_e$ avec la droite d'équation $x = 0$ est formée de deux points D_e^+ et D_e^- que l'on déterminera.

Solution : Pour $x = 0$ on a l'équation $y^2 = e^2h^2$, donc on obtient les deux points $D_e^+ = (0, eh)$ et $D_e^- = (0, -eh)$.

2. (3 pts) Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme $q(x,y) + \alpha x + \beta y = k$, où q est une forme quadratique et α, β, k des réels que l'on déterminera, puis déterminer les valeurs de e pour lesquelles $\mathscr{C}_e$ est une parabole, resp. une ellipse, resp. une hyperbole.

Solution : L'équation de $\mathscr{C}_e$ s'écrit $(1-e^2)x^2 + y^2 - 2e^2hx = e^2h^2$. Donc $\mathscr{C}_e$ est une ellipse pour $e \in]0,1[$, une parabole pour $e = 1$, et une hyperbole pour $e > 1$.

3. (0,5 pt) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une parabole. Montrer que l'intersection de $\mathscr{C}_e$ avec la droite d'équation $y = 0$ est un point P que l'on déterminera.

Solution : On a donc $e = 1$ et $\mathscr{C}_e$ est la parabole d'équation $y^2 = 2hx + h^2 = 2h\big(x + \frac{h}{2}\big)$. Alors l'intersection de $\mathscr{C}_e$ avec la droite d'équation $y = 0$ est le point $P = (\frac{-h}{2}, 0)$.

4. (2,5 pts) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une ellipse. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme

$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

pour des réels μ, a, b (avec $a, b>0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^-<x_e^+$ des points d'intersection $S_e^-=(x_e^-, 0)$ et $S_e^+=(x_e^+, 0)$ de $\mathscr{C}_e$ avec la droite $y=0$, puis montrer que $\mathscr{C}_e$ coupe la droite $\Delta_e=C_e+\mathbb{R}e_2$ en deux points T_e^- et T_e^+ que l'on déterminera.

<u>Solution</u> : On est dans le cas où $0<e<1$. L'équation de $\mathscr{C}_e$ s'écrit

$$\frac{(x-\frac{e^2h}{1-e^2})^2}{(\frac{eh}{1-e^2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{eh}{\sqrt{1-e^2}})^2}=1$$

donc $\mu=\frac{e^2h}{1-e^2}$, et $a=\frac{eh}{1-e^2}$ et $b=\frac{eh}{\sqrt{1-e^2}}$.
Pour $y=0$, on a $x-\mu=\pm a$, donc

$$x_e^-=\frac{e^2h}{1-e^2}-\frac{eh}{1-e^2}=\frac{eh(e-1)}{1-e^2}, \qquad x_e^+=\frac{e^2h}{1-e^2}+\frac{eh}{1-e^2}=\frac{eh(e+1)}{1-e^2}.$$

Puis, pour $x=\mu=\frac{e^2h}{1-e^2}$, on a $y^2=\left(\frac{eh}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2$, donc $\mathscr{C}_e\cap\Delta_e$ est formé des deux points

$$T_e^-=\left(\frac{e^2h}{1-e^2}, \frac{-eh}{\sqrt{1-e^2}}\right), \qquad T_e^+=\left(\frac{e^2h}{1-e^2}, \frac{eh}{\sqrt{1-e^2}}\right).$$

5. (4 pts) On suppose que $\mathscr{C}_e$ est une hyperbole. Écrire l'équation de $\mathscr{C}_e$ sous la forme

$$\frac{(x-\mu)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

pour des réels μ, a, b (avec $a, b>0$) que l'on déterminera. Soit C_e le point $(\mu, 0)$. Calculer les abscisses $x_e^-<x_e^+$ des points d'intersection $S_e^-=(x_e^-, 0)$ et $S_e^+=(x_e^+, 0)$ de $\mathscr{C}_e$ avec la droite $y=0$. D'autre part, soit $\mathscr{D}_e^+$ (resp. $\mathscr{D}_e^-$) la droite affine passant par le point C_e et de vecteur directeur ae_1+be_2 (resp. ae_1-be_2), et soit $A_e^+=(0, y_e^+)$ (resp. $A_e^-=(0, y_e^-)$) le point d'intersection de $\mathscr{D}_e^+$ (resp. $\mathscr{D}_e^-$) avec la droite $x=0$. Déterminer y_e^+ et y_e^-.

<u>Solution</u> : On est dans le cas où $e>1$, donc $e^2-1>0$. L'équation de $\mathscr{C}_e$ s'écrit

$$\frac{(x-\frac{e^2h}{1-e^2})^2}{(\frac{eh}{e^2-1})^2}-\frac{y^2}{(\frac{eh}{\sqrt{e^2-1}})^2}=1$$

donc $\mu=\frac{e^2h}{1-e^2}<0$, et $a=\frac{eh}{e^2-1}$ et $b=\frac{eh}{\sqrt{e^2-1}}$.
Pour $y=0$, on a $x-\mu=\pm a$, donc

$$x_e^-=\frac{e^2h}{1-e^2}-\frac{eh}{e^2-1}=\frac{-eh(e+1)}{e^2-1}, \qquad x_e^+=\frac{e^2h}{1-e^2}+\frac{eh}{e^2-1}=\frac{-eh(e-1)}{e^2-1}.$$

Ensuite, $\overrightarrow{IA_e^+}=\begin{pmatrix}-\mu\\ y_e^+\end{pmatrix}$ est multiple de $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ si et seulement si $y_e^+=-\mu\cdot\frac{b}{a}=\frac{e^2h}{\sqrt{e^2-1}}$ et l'on obtient de même que $y_e^-=\frac{-e^2h}{\sqrt{e^2-1}}$.

6. (4 pts) On prend maintenant $h = 3$ et l'on fixe e_0 tel que $\mathscr{C}_{e_0}$ soit une parabole. Représenter sur un même dessin les coniques $\mathscr{C}_e$ pour $e = e_0/2, e_0, \sqrt{2}e_0$, en faisant figurer les points $D_e^{\pm}$ de la question 1), le point P de la question 3), les points $S_e^{\pm}$, C_e et $T_e^{\pm}$ des questions 4) et 5), ainsi que les points $A_e^{\pm}$ et les droites $\mathscr{D}_e^{\pm}$ de la question 5). (Lorsque $\mathscr{C}_e$ est une hyperbole, on pourra ne représenter que la partie de $\mathscr{C}_e$ et de $\mathscr{D}_e^{\pm}$ contenue dans le demi-plan $x \geq \mu$. D'autre part, on rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$.)

Solution : On a $e_0 = 1$ et $\mathscr{C}_1$ est la parabole d'équation $y^2 = 6\big(x + \frac{3}{2}\big)$. Son sommet est le point $P = (\frac{-3}{2}, 0)$ et elle coupe la droite $x = 0$ en les points $D_1^{\pm} = (0, \pm 3)$.

$\mathscr{C}_{1/2}$ est l'ellipse d'équation $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$; ses sommets sont les points $S_{1/2}^- = (-1, 0)$ et $S_{1/2}^+ = (3, 0)$ ainsi que $T_{1/2}^{\pm} = (1, \pm\sqrt{3})$ et son centre est le point $C_{1/2} = (1, 0)$. Elle coupe la droite $x = 0$ en les points $D_{1/2}^{\pm} = \big(0, \pm\frac{3}{2}\big)$.

$\mathscr{C}_{\sqrt{2}}$ est l'hyperbole d'équation $\dfrac{(x+6)^2}{18} - \dfrac{y^2}{18} = 1$; ses sommets sont les points $S_{\sqrt{2}}^{\pm} = (-6 \pm 3\sqrt{2}, 0)$, son centre le point $C_{\sqrt{2}} = (-6, 0)$ et elle coupe la droite $x = 0$ en les points $D_{\sqrt{2}}^{\pm} = (0, \pm 3\sqrt{2})$. La droite $\mathscr{D}_{\sqrt{2}}^+$ (resp. $\mathscr{D}_{\sqrt{2}}^-$) a pour équation $y = x + 6$ (resp. $y = -x - 6$) et coupe la droite $x = 0$ en le point $A_{\sqrt{2}}^+ = (0, 6)$ (resp. $A_{\sqrt{2}}^- = (0, -6)$).