Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé du partiel du 9 avril 2010

Exercice 1 (20pts)**.** Déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Solution : Plaçant la matrice I_4 en-dessous de A_t, on part de :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutant $2C_1$ à C_2 et retranchant $3C_1$ à C_3 et à C_4, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -6 & -8 \\ 2-t & 6-3t & 4t-7 & 4t-8 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, divisant C_2 par 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -6 & -8 \\ 2-t & 2-t & 4t-7 & 4t-8 \\ 1 & 2/3 & -3 & -3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, remplaçant C_3 par $C_3 + 3C_2$, et C_4 par $C_4 + 4C_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2-t & 2-t & t-1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte :

1. Si $t \neq 1$, A_t est de rang 3, une base de l'image est formée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le noyau est de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Pour $t = 1$, A_1 est de rang 2, une base (resp. du noyau) de l'image est formée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix}-1\\4\\0\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (20pts)**.** Pour tout $n \geq 2$, on considère les matrices $n \times n$ suivantes, à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

c.-à.-d., pour A_n : les coefficients diagonaux valent 2, ceux juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale valent -1, les autres sont nuls; pour B_n : les coefficients diagonaux sont les entiers impairs $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$, ceux juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale sont les entiers $1, 2, 3, \dots, n-1$, les autres sont nuls. On pose $\Delta_n = \text{dét}(A_n)$ et $D_n = \text{dét}(B_n)$.

Solution : 1. On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ et, en développant par rapport à la 1ère ligne :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_2 - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_2 + (-1) \cdot 2 = 4.$$

La même méthode s'applique pour n arbitraire : en développant par rapport à la 1ère ligne, on obtient :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_{n-2} \\ 0 & \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2},$$

ce qui est la formule voulue. Appliquant cette formule, on trouve

$$\Delta_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 5, \qquad \Delta_5 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Ceci suggère que $\Delta_k = k + 1$ pour tout $k \geq 2$ (et aussi, en fait, pour $k = 1$). On peut supposer $n \geq 3$ et le résultat établi pour tout $k \leq n$; alors

$$\Delta_{n+1} = 2\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(n+1) - n = n + 2.$$

Ceci montre que $\Delta_n = n + 1$ pour tout $n \geq 2$ (et c'est aussi vrai pour $n = 1$).

2. On a $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$ et, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_2 - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 5D_2 - 2 \cdot 2 = 6.$$

La même méthode s'applique pour n arbitraire : en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$D_n = (2n-1)D_{n-1} - (n-1)\begin{vmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ B_{n-2} & 0 \\ & n-2 \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$D_n = (2n-1)D_{n-1} - (n-1)^2 D_{n-2},$$

ce qui est la formule voulue. Appliquant cette formule, on trouve

$$D_4 = 7 \cdot 6 - 9 \cdot 2 = 24, \qquad D_5 = 9 \cdot 24 - 16 \cdot 6 = 24 \cdot (9-4) = 120.$$

Ceci suggère que $D_k = k!$ pour tout $k \geq 2$ (et aussi, en fait, pour $k = 1$). On peut supposer $n \geq 4$ et le résultat établi pour tout $k \leq n-1$; alors

$$D_n = (2n-1)(n-1)! - (n-1)^2(n-2)! = n! + (n-1)(n-1)! - (n-1)(n-1)! = n!\,.$$

Ceci montre que $D_n = n!$ pour tout $n \geq 2$ (et c'est aussi vrai pour $n = 1$).

Exercice 3 (16pts)**.** Décomposer en sommes de carrés les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ suivantes et déterminer leur rang, signature et noyau.

1. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_3^2 + x_4^2$.
2. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Solution : 1. On a

$$\begin{aligned} q(x) &= (\overbrace{x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4}^{y_1})^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 5x_3^2 - 4x_3x_4 - 3x_4^2 \\ &= y_1^2 - (\underbrace{x_2 + 2x_3 + 2x_4}_{y_2})^2 - x_3^2 + x_4^2 + 4x_3x_4 \\ &= y_1^2 - y_2^2 - (x_3 - 2x_4)^2 + 5x_4^2 \end{aligned}$$

donc

$$q(y) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 5y_4^2$$

lorsqu'on a fait le changement de coordonnées

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ y_2 &= x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ y_3 &= x_3 - 2x_4 \\ y_4 &= x_4 \end{cases}$$

(C'est bien un changement de coordonnées, car la matrice exprimant les y_j en fonction des x_i est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc **inversible**.) Ceci montre que q est de rang 4 (i.e. non-dégénérée, $N(q) = \{0\}$) et de signature $(2, 2)$.

2. Donnons deux méthodes (qui reviennent au même).
<u>1ère méthode</u>. Faisons le changement de coordonnées $x_1 = x'_1 + x'_2$ et $x_2 = x'_1 - x'_2$, alors

$$\begin{aligned} Q(x'_1, x'_2, x_3, x_4) &= {x'_1}^2 - {x'_2}^2 + (x'_1 + x'_2)(x_3 + x_4) + (x'_1 - x'_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 \\ &= (x'_1 + x_3 + x_4)^2 - {x'_2}^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_3x_4 \\ &= (x'_1 + x_3 + x_4)^2 - {x'_2}^2 - (x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 - \frac{3}{4}x_4^2. \end{aligned}$$

Donc Q est de rang 4 (i.e. non-dégénérée, $N(Q) = \{0\}$) et de signature $(1, 3)$.

<u>2ème méthode</u>. Éliminons en même temps les variables x_1 et x_2 en écrivant :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (\overbrace{x_1 + x_3 + x_4}^{y_1})(\overbrace{x_2 + x_3 + x_4}^{y_2}) - (x_3 + x_4)^2 + x_3x_4 \\ &= y_1y_2 - x_3^2 - x_3x_4 - x_4^2 \\ &= y_1y_2 - (\underbrace{x_3 + \frac{1}{2}x_4}_{y_3})^2 - \frac{3}{4}x_4^2 \end{aligned}$$

puis faisons le changement de coordonnées $y_1 = y'_1 + y'_2$, $y_2 = y'_1 - y'_2$, $y'_3 = y_3$, $y'_4 = x_4$, alors

$$Q(y') = {y'_1}^2 - {y'_2}^2 - {y'_3}^2 - \frac{3}{4}{y'_4}^2$$

et l'on retrouve que Q est de rang 4 et de signature $(1, 3)$.

Exercice 4 (24pts)**.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2$, et on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique.

1. Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Donner une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $u \in D$ puis, en utilisant la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, déterminer la matrice de s_D dans la base canonique.

   Solution : Un vecteur directeur de D est $w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sa norme est $\sqrt{5}$. Le vecteur $w' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à w, donc à tout vecteur de D, et est de norme $\sqrt{5}$. On peut donc prendre $u = w/\sqrt{5}$ et $v = w'/\sqrt{5}$. Posant $\mathcal{B} = (u, v)$ on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On cherche $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s_D)$, on a $A' = Q^{-1}AQ$ où $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) = P^{-1}$. De plus, $P \in O(2)$ puisque $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, donc $P^{-1} = {}^tP$ qui ici égale P. On obtient donc

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Soit $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in O(2)$ et calculer A^2. En déduire la nature géométrique de A.

   Solution : Les colonnes de A sont orthogonales et de norme 1, donc $A \in O(2)$. De plus, $\text{dét}(A) = 1$ donc $A \in \mathrm{SO}(2)$, i.e. A est une rotation. Calculons

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On reconnaît la rotation d'angle $\pi/4$, donc A est la rotation d'angle $\pi/8$.

3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soit $B = \dfrac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} p^2 - q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2 - p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in O(2)$ et donner une équation et un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(B - I_2)$. Quelle est la nature géométrique de B ?

   Solution : Les colonnes de B sont orthogonales et le carré de leur norme est

$$\frac{1}{(p^2+q^2)^2} \Big((p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 \Big) = 1,$$

   donc $A \in O(2)$. La matrice

$$B - I_2 = \frac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} -2q^2 & 2pq \\ 2pq & -2p^2 \end{pmatrix}$$

   est de rang 1, et le vecteur $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ appartient à son noyau. Donc $\mathrm{Ker}(B - I_2)$ est une droite $D = D_{p,q}$ qui admet $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, et $qx - py = 0$ pour équation. Puisque $B \in O(2)$, il en résulte que B est la symétrie orthogonale par rapport à D.

Exercice 5 (20pts)**.** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

Construire une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ en appliquant la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs v_1, v_2, v_3.

Solution : On a $\|v_1\|^2 = 2 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 8$, donc $\|v_1\| = 2\sqrt{2}$ et l'on prend

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, v_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, v_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 2 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On sait que $f_2' = v_2 - (v_2 \mid f_1)f_1$ est orthogonal à f_1, d'où en particulier, d'après le théorème de Pythagore (*cf.* le polycopié) :

$$\|f_2'\|^2 = \|v_2\|^2 - (v_2 \mid f_1)^2. \tag{2}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} (v_2 \mid f_1) &= \frac{1}{4}\big(5\sqrt{2} + 6 + 6\sqrt{2} - 6 + 5\sqrt{2}\big) = 4\sqrt{2} \\ (v_2 \mid v_2) &= 8 + 1 + 4\sqrt{2} + 18 + 8 + 1 - 4\sqrt{2} = 36 \\ \|f_2'\|^2 &= 36 - (4\sqrt{2})^2 = 4 \end{aligned}$$

donc

$$f_2' = v_2 - 4\sqrt{2}f_1 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+2 \\ 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$f_2 = \frac{1}{2}f_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Enfin, on sait que $f_3' = v_3 - (v_3 \mid f_2)f_2 - (v_3 \mid f_1)f_1$ est orthogonal à f_1 et f_2, d'où en particulier, d'après le théorème de Pythagore (*cf.* le polycopié) :

$$\|f_3'\|^2 = \|v_3\|^2 - (v_3 \mid f_2)^2 - (v_3 \mid f_1)^2. \tag{4}$$

Calculons :

$$\begin{aligned} (v_3 \mid f_1) &= \frac{1}{4}\big(\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\big) = \sqrt{2} \\ (v_3 \mid f_2) &= \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{2}\big) = 2 \\ (v_3 \mid v_3) &= 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 8 \\ \|f_3'\|^2 &= 8 - 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2 \end{aligned}$$

donc

$$f_3' = v_3 - 2f_2 - \sqrt{2}f_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

puis

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, f_3' = \frac{\sqrt{2}}{2}\, f_3' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -2 \\ 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$