Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, corrigé du partiel du 1er avril 2011 (2h)

Exercice 1 (20 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

1. (3 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.

   Solution : On a $P_A(X) = \begin{vmatrix} -2-X & 1 & 3 \\ -3 & 2-X & 3 \\ -1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$. En ajoutant C_3 à C_1 et mettant $(1-X)$ en facteur, on obtient : $P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-X & 3 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$. Soustrayant alors L_1 de L_3, on obtient

$$P_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-X & 3 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = -(1-X)(2-X)(1+X).$$

2. (2 pts) Montrer, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, que A est diagonalisable.

   Solution : $P_A(X)$ est scindé et a toutes ses racines distinctes, donc A est diagonalisable (2.2.10 du cours).

3. (9 pts) Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et écrire les matrices $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis calculer P^{-1}.

   Solution : Comme $P_A(X)$ n'a que des racines simples, on sait d'avance que chaque espace propre est de dimension 1, donc pour chaque $\lambda \in \{1, 2, -1\}$, il suffira de trouver un vecteur non nul dans $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$. On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et l'on voit que $C_1 + C_3 = 0$, donc $V_1 = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis on a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   et l'on voit que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc $V_2 = \mathbb{R}v_2$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin, on a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   et l'on voit que $C_1 + C_2 = 0$, donc $V_{-1} = \mathbb{R}v_3$ où $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice de u est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_1]{C_2 \to C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to -C_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. À titre de vérification, calculons

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Quand on a choisi une base de vecteurs propres $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$, la matrice diagonale D qu'on trouve a pour i-ème coefficient diagonal la valeur propre correspondant au vecteur v_i. Par exemple si l'on prend $\mathcal{C}' = (v_3, v_1, v_2)$, ce qui correspond à la matrice de passage $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. (3 pts) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle $X'(t) = A \cdot X(t)$. On pose $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$. Montrer que la fonction $t \mapsto Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$, pour une matrice B que l'on déterminera. Résoudre cette équation différentielle, c.-à.-d., exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$ (on rappelle que la solution d'une équation différentielle $f'(t) = \lambda f(t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est donnée par $f(t) = e^{\lambda t} f(0)$).

Solution : Dérivons l'égalité $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$. Comme P^{-1} ne dépend pas de t, on obtient $Y'(t) = P^{-1} \cdot X'(t)$, et comme $X'(t) = A \cdot X(t)$, on obtient que

$$Y'(t) = (P^{-1}AP) \cdot Y(t) = D \cdot Y(t), \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a vu en cours que ceci entraîne que

$$Y(t) = \exp(tD) \cdot Y(0) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Y(0) = \begin{pmatrix} e^t\, y_1(0) \\ e^{2t}\, y_2(0) \\ e^{-t}\, y_3(0) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, l'énoncé suggérait la méthode directe suivante (pour ceux n'ayant pas vu les exponentielles de matrices en cours ou en TD, par exemple les étudiants en télé-enseignement) : écrivant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, l'équation $Y'(t) = D \cdot Y(t)$ équivaut aux trois équations différentielles

$$y_1'(t) = y_1(t), \qquad y_2'(t) = 2y_2(t) \qquad y_3'(t) = -y_3(t)$$

et d'après le rappel donné dans l'énoncé, les solutions sont données par

$$y_1(t) = e^t\, y_1(0), \qquad y_2(t) = e^{2t}\, y_2(0), \qquad y_3(t) = e^{-t}\, y_3(0),$$

d'où $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t\, y_1(0) \\ e^{2t}\, y_2(0) \\ e^{-t}\, y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Y(0)$.

5. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $Y(0)$ puis $Y(100)$ puis $X(100)$.

   Solution : On a
$$Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donc $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y(100) = \begin{pmatrix} e^{100} \\ e^{200} \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, on a
$$X(100) = P\,Y(100) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{100} \\ e^{200} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{100} + e^{200} \\ e^{200} \\ e^{100} + e^{200} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (10 pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel, $u \in \mathrm{End}_k(V)$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $x \in V$ tels que $u^d(x) = 0$ mais $u^{d-1}(x) \neq 0$ (par définition, $u^0 = \mathrm{id}_V$). Montrer que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\}$ est libre. (Considérer une relation de dépendance linéaire $a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{d-1}u^{d-1}(x) = 0$; on pourra soit lui appliquer u et procéder par récurrence sur d, soit appliquer u^{d-1}, etc.)

Solution : Considérons une relation de dépendance linéaire

$$(*) \qquad a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{d-1}u^{d-1}(x) = 0$$

avec $a_0, \dots, a_{d-1} \in k$.
<u>1ère méthode</u> (celle du cours). En appliquant u^{d-1}, on obtient $a_0u^{d-1}(x) = 0$, et comme $u^{d-1}(x) \neq 0$ ceci donne $a_0 = 0$. Appliquant alors u^{d-2} à $(*)$, on obtient $a_1u^{d-1}(x) = 0$, d'où $a_1 = 0$. Appliquant alors u^{d-3} à $(*)$, on obtient $a_2u^{d-1}(x) = 0$, d'où $a_2 = 0$, etc. On obtient ainsi que $a_0 = 0 = a_1 = \cdots = a_{d-1}$. (Si on veut faire une récurrence, on peut écrire : supposons avoir montré que $a_0 = 0 = \cdots = a_n$ pour un certain $n < d-1$, alors $(*)$ devient
$$a_{n+1}u^{n+1}(x) + \cdots + a_{d-1}u^{d-1}(x) = 0.$$
Appliquant u^{d-n-2}, on obtient $a_{n+1}u^{d-1}(x) = 0$, d'où $a_{n+1} = 0$.)
<u>2ème méthode</u>. On procède par récurrence sur d. Si $d = 1$, alors $x \neq 0$ et la famille $\{x\}$ est libre. On peut donc supposer $d \geq 2$ et le résultat établi pour $d-1$. Appliquant u à l'égalité $(*)$ on obtient, en posant $y = u(x)$:
$$a_0y + a_1u(y) + \cdots + a_{d-2}u^{d-2}(y) = 0.$$
Alors $u^{d-2}(y) = u^{d-1}(x)$ est $\neq 0$ mais $u^{d-1}(y) = u^d(x) = 0$, et l'on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à y ; ceci donne $a_0 = 0 = a_1 = \cdots = a_{d-2}$. Reportant ceci dans $(*)$ on obtient que $a_{d-1} = 0$. Ceci montre que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\}$ est libre.

Exercice 3 (30 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit D l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui à tout $f \in \mathcal{E}$ associe la fonction dérivée f'. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$, on note E_P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des $f \in \mathcal{E}$ qui sont annulés par l'endomorphisme $P(D)$, c.-à.-d., si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, alors

$$E_P = \{f \in \mathcal{E} \mid D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_1D(f) + a_0f = 0\}.$$

On admet que $\dim E_P = n = \deg(P)$.

1. (2 pts) Montrer que chaque sous-espace E_P est stable par D.

Solution : Soit $f \in E_P$. Alors $P(D)(f) = 0$ donc

$$0 = D\big((P(D)(f)\big) = (D \circ P(D))(f) = (P(D) \circ D)(f) = P(D)\big(D(f)\big),$$

et ceci montre que $D(f) \in E_P$. Il revient au même de dire que, si on écrit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, alors comme $f \in E_P$ on a l'égalité

$$D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_1 D(f) + a_0 f = 0$$

et en dérivant cette égalité on obtient $D^{n+1}(f) + a_{n-1}D^n(f) + \cdots + a_1 D^2(f) + a_0 D(f) = 0$, qui montre que $D(f) \in E_P$.

2. (3 pts) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, écrire, en utilisant la formule du binôme, $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})^p$ comme une somme de termes $a_i D^i$. Quelle est la dimension de $E_{(X-\lambda)^p}$?

Solution : Comme D est linéaire, elle commute à $\lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et donc on peut appliquer la formule du binôme, qui donne ici :

$$(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-\lambda)^{p-i} D^i.$$

D'autre part, comme $(X - \lambda)^p$ est un polynôme unitaire de degré $p \geq 1$, on a $\dim E_{(X-\lambda)^p} = p$.

3. (6 pts) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N}$, soit $f_{\lambda,i} \in \mathcal{E}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{t^i}{i!} \exp(\lambda t)$. On pose $Q = (X - \lambda)^p$. Pour tout $i = 0, 1, \ldots, p-1$, calculer $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(f_{\lambda,i})$. En utilisant l'exercice 2, montrer que les fonctions $f_{\lambda,i}$, pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$, forment une base $\mathcal{C}_Q$ de E_Q.

Solution : On a $D(f_{i,0}) = \lambda f_{i,0}$ et, pour tout $i \geq 1$, la formule $D(gh) = D(g)h + gD(h)$ montre que $D(f_{\lambda,i})$ est la fonction

$$t \mapsto \lambda f_{\lambda,i} + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \exp(\lambda t) = \lambda f_{\lambda,i} + f_{\lambda,i-1}$$

d'où $(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(f_{\lambda,i}) = f_{\lambda,i-1}$ pour tout $i \geq 1$. Pour tout $i, d \in \mathbb{N}$, on a donc

$$(D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}})^p (f_{\lambda,i}) = \begin{cases} f_{\lambda,i-d} & \text{si } d \leq i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $f_{\lambda,0}, f_{\lambda,1}, \ldots, f_{\lambda,p-1}$ appartiennent à E_Q, qui est de dimension p. De plus, posant $u = D - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, on a $u^p(f_{\lambda,p-1}) = 0$ mais $u^{p-1}(f_{\lambda,p-1}) = f_{\lambda,0} \neq 0$ donc, d'après l'exercice 2, ces p vecteurs sont linéairement indépendants ; ils forment donc une base $\mathcal{C}_Q$ de E_Q.

4. (3 pts) Soit $P = \displaystyle\prod_{s=1}^{r} (X - \lambda_s)^{p_s}$ et soient $V = E_P$ et $n = \dim(V) = p_1 + \cdots + p_r$. On note u l'endomorphisme de V induit par D, c.-à.-d., $u(f) = D(f)$ pour tout $f \in V$. Montrer que λ_s est valeur propre de u, pour $s = 1, \ldots, r$. On note $V_{(\lambda_s)}$ l'espace caractéristique de u correspondant à λ_s.

Solution : La fonction $f_{\lambda_s,0} : t \mapsto \exp(\lambda_s t)$ est annulée par $D - \lambda_s \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, donc aussi par $P(D)$, puisque P est un multiple de $(X - \lambda_s)$. Donc $f_{\lambda_s,0}$ appartient à V et c'est un vecteur propre de u pour la valeur propre λ_s.

5. (3 pts) Pour $s = 1, \ldots, r$, soit $Q_s = (X - \lambda_s)^{p_s}$. Montrer que $E_{Q_s} \subset E_P = V$.

Solution : Si $f \in E_{Q_s}$ alors f est annulée par $Q_s(D)$ donc aussi par $P(D)$, puisque P est un multiple de Q_s. Donc $f \in E_P$ et ceci montre que $E_{Q_s} \subset E_P = V$.

6. (7 pts) Pour toute valeur propre λ de u, de multiplicité algébrique m, on rappelle que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^m = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^{m+1} = \cdots = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_V)^n.$$

Montrer que chaque E_{Q_s} est contenu dans l'espace caractéristique $V_{(\lambda_s)}$ de u. En utilisant un résultat du cours, en déduire qu'on a l'égalité $E_{Q_s} = V_{(\lambda_s)}$ pour tout $s = 1, \ldots, r$, et que le polynôme caractéristique de u est $(-1)^n P$.

Solution : Le rappel ci-dessus signifie que $V_{(\lambda_s)}$ est la réunion des $\mathrm{Ker}(u-\lambda_s)^i$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ (ceux-ci étant égaux à $V_{(\lambda_s)}$ à partir du cran $i = r$, pour un certain $r \leq m$). D'après la question précédente, on sait que $E_{Q_s} \subset V$; donc si $f \in E_{Q_s}$ alors f est un élément de V annulé par $(u-\lambda_s)^{p_s}$, donc $f \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_s \mathrm{id}_V)^{p_s} \subset V_{(\lambda_s)}$. Ceci montre que $E_{Q_s} \subset V_{(\lambda_s)}$.

D'après la question 3., on sait que $\dim E_{Q_s} = p_s$. D'autre part, d'après le cours (2.3.11), on sait que la somme des espaces caractérisiques $V_{(\lambda)}$, pour λ parcourant l'ensemble de toutes les valeurs propres de u, est directe et égale à V. En particulier, la somme des $V_{(\lambda_s)}$, pour $s = 1, \dots, r$ est directe, et comme chaque $V_{(\lambda_s)}$ contient E_{Q_s}, on obtient que

$$\dim \bigoplus_{s=1}^{r} V_{(\lambda_s)} = \sum_{s=1}^{r} \dim V_{(\lambda_s)} \geq p_1 + \cdots + p_r = n = \dim(V).$$

Il en résulte d'une part que, pour tout $s = 1, \dots, r$, on a $\dim V_{(\lambda_s)} = p_s$ et donc $V_{(\lambda_s)} = E_{Q_s}$, et d'autre part que les seules valeurs propres de u sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Donc les racines de $P_u(X)$ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et, pour tout s, la multiplicité algébrique de λ_s est $\dim V_{(\lambda_s)} = p_s$. Il en résulte que

$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{s=1}^{r} (X - \lambda_s)^{p_s} = (-1)^n\, P.$$

7. (3 pts) En utilisant le même résultat du cours, montrer que les fonctions

$$f_{\lambda_1,0}, \dots, f_{\lambda_1,p_1-1},\ f_{\lambda_2,0}, \dots, f_{\lambda_2,p_2-1},\ \cdots,\ f_{\lambda_r,0}, \dots, f_{\lambda_r,p_r-1}$$

(c.-à.-d., les fonctions f_{λ_s,i_s}, pour $s = 1, \dots, r$ et $0 \leq i_s \leq p_s - 1$), forment une base $\mathcal{C}$ de V.

Solution : Fixons $s \in \{1, \dots, r\}$. D'après la question précédente, on a $V_{(\lambda_s)} = E_{Q_s}$, et d'après la question 3., les fonctions $f_{\lambda_s,0}, \dots, f_{\lambda_s,p_s-1}$ en forment une base $\mathcal{C}_{Q_s}$, qu'on notera simplement $\mathcal{C}_s$. D'après la question précédente (et le théorème 2.3.11 du cours), V est la somme directe des $V_{(\lambda_s)}$, pour $s = 1, \dots, r$, et donc les f_{λ_s,i_s}, pour $s = 1, \dots, r$ et $0 \leq i_s \leq p_s - 1$, forment une base $\mathcal{C}$ de V.

8. (3 pts) Écrire la matrice de u dans cette base. (La présenter sous la forme d'une matrice diagonale par blocs.)

Solution : D'après la question 3., on a $(u - \lambda_s \mathrm{id}_V)(f_{s,0}) = 0$ et $(u - \lambda_s \mathrm{id}_V)(f_{s,i}) = f_{s,i-1}$ pour tout $i = 1, \dots, p_s - 1$, donc la matrice de u dans la base $\mathcal{C}_s$ de $E_{Q_s} = V_{(\lambda_s)}$ est le bloc de Jordan $J_{p_s}(\lambda_s)$. Il en résulte que la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice de Jordan :

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{p_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{p_r}(\lambda_r) \end{array}\right)$$