Université Pierre et Marie Curie 2009–2010

LM270, Corrigé du TE1

Exercice 1. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par $a_0 = 513/512$ et $a_1 = -255/256$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

   Solution : On montre facilement que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. Il est de dimension 2, car il est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ par l'application linéaire :

   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

   En effet, une suite de $\mathcal{S}$ est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers éléments, les autres s'en déduisant par la relation de récurrence.

2. Donner deux suites géométriques non nulles $\mathbf{v} = (p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $p \neq r$) appartenant à $\mathcal{S}$.

   Solution : Cherchons des suites géométriques non nulles éléments de $\mathcal{S}$. Si $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, la suite u définie par $u_n = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si :

   $$r^{n+2} = r^{n+1} + 2r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   En divisant par r^n qui est non nul, on voit que ceci équivaut à $r^2 = r + 2$. En résolvant cette équation du second degré, on trouve les racines $r = 2$ ou $r = -1$. On obtient donc que les deux suites $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ définies par $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.

3. Montrer que les deux suites $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ forment une base de $\mathcal{S}$.

   Solution : Les suites $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux éléments linéairement indépendants de $\mathcal{S}$: en effet, si $s, t \in \mathbb{R}$ vérifient $s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w} = 0$ alors en prenant les termes d'indices 0 et 1 ($v_0 = 1 = w_0$ et $v_0 = -1$, $w_1 = 2$) on obtient le système

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} s + t & = & 0 \\ -s + 2t & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{d'où } s = -t \text{ et } 3t = 0,$$

   d'où $t = 0 = s$. Donc $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathcal{S}$, puisque $\mathcal{S}$ est de dimension 2.

4. Déterminer $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{a} = s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w}$.

   Solution : Comme $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathcal{S}$, la suite $\mathbf{a}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$: il existe des réels λ, μ tels que $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$, d'où

   $$a_n = \lambda v_n + \mu w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   On détermine λ et μ grâce aux conditions initiales $a_0 = 513/512$ et $a_1 = -255/256$. On obtient le système d'équations suivant :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 513/512 & = & \lambda + \mu \\ -255/256 & = & -\lambda + 2\mu \end{array} \right.$$

   d'où $3\mu = \dfrac{513 - 510}{512} = 3/512$, donc $\mu = 1/512$, puis $\lambda = 1$. Donc, comme $512 = 2^9$, on obtient

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = (-1)^n + \frac{1}{512}2^n = (-1)^n + 2^{n-9}.$$

5. Calculer a_{15}.

   Solution : On trouve pour $n = 15$: $\boxed{a_{15} = 2^6 - 1 = 63}$

Exercice 2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $P^{(i)}$ le i-ème polynôme dérivé de P, c.-à.-d., $P^{(1)} = P'$ et $P^{(i+1)} = (P^{(i)})'$ pour $i \geq 1$. On fixe un entier $d \geq 2$ et des réels $a_1, \ldots, a_d$. On considère l'application

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \qquad P \mapsto P + \sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}.$$

1. Montrer que ϕ est linéaire et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ envoie le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ dans lui-même.

   Solution : La dérivation D sur les polynômes est une application linéaire. Pour tout entier $i \geq 1$, l'application $D^i : P \mapsto P^{(i)}$ est linéaire car c'est la composée de D, i fois avec elle-même. L'application ϕ est donc **linéaire** en tant que combinaison linéaire d'applications linéaires. (On peut également écrire explicitement $\phi(\lambda P + Q)$ pour deux polynômes P et Q et un réel λ).

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le degré de $P^{(i)}$ est $< n$, donc $\phi(P) = P + \sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci montre que ϕ envoie le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

2. Montrer que ϕ est injective.

   Solution : Supposons $P \neq 0$, alors P est de degré p, pour un certain $p \in \mathbb{N}$; alors P' est de degré $p-1$ (si $p \geq 1$) ou est nul (si $p = 0$), et P'' est de degré $p-2$ (si $p \geq 2$) ou nul (si $p < 2$) ; plus généralement, la dérivée i-ème $P^{(i)}$ est de degré $p - i$ si $p - i \geq 0$, ou est nulle si $p < i$. En tout cas, la somme $\sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}$ est de degré $< p$ ou bien nulle, donc $\phi(P) = P + \sum_{i=1}^{d} a_i P^{(i)}$ est, comme P, de degré p, donc ne peut être nul. Ceci montre que ϕ est injective.
   (Remarque : pour éviter de distinguer les cas $p \geq i$ ou $p < i$, on peut convenir que le polynôme nul est de degré $-\infty$, alors il est toujours vrai que $\deg(P^{(i)}) \leq \deg(P) - i$.)

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, la restriction ϕ_n de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ est bijective. En déduire que chaque ϕ_n est bijective.

   Solution : Comme ϕ est injective, alors *a fortiori* $\phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'est aussi. Donc ϕ_n est un endomorphisme injectif de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$ et donc, d'après le théorème du rang, ϕ_n est aussi surjectif, donc bijectif.

4. Montrer que ϕ est bijective.

   Solution : On a déjà vu que ϕ est injective, il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul, et soit $d = \deg(P)$, alors $P \in \mathbb{R}_d[X]$, et comme ϕ_d est bijective, il existe $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\phi(Q) = \phi_d(Q)$ égale P. Ceci montre que ϕ est surjective.

Exercice 3. Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{aligned} u(\vec{i}) &= \vec{i} + (1+\sqrt{3})\vec{j} + (1-\sqrt{3})\vec{k} \\ u(\vec{j}) &= (1-\sqrt{3})\vec{i} + \vec{j} + (1+\sqrt{3})\vec{k} \\ u(\vec{k}) &= (1+\sqrt{3})\vec{i} + (1-\sqrt{3})\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

1. Écrire dans la base $\mathcal{B}$ la matrice A de u, puis celle de $u^2 = u \circ u$.

   Solution : La matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ exprime, en colonnes, les vecteurs $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$, $u(\vec{k})$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, donc on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

   On rappelle que (u étant un endomorphisme) la notation u^n désigne la composée $u \circ \cdots \circ u$ (n fois) ; en particulier $u^2 = u \circ u$. Alors la matrice de u^2 est

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

   Remarque pratique. Pour calculer des sommes et produits d'expressions de la forme $p + q\sqrt{n}$, avec $p, q, n \in \mathbb{Z}$, on calcule séparément la partie p et le coefficient q de $\sqrt{n}$, par exemple :

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})(5+7\sqrt{3}) &= (10 + 7 \cdot 3) + \sqrt{3}(5 + 14) = 31 + 19\sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} + 1 - 2(1-\sqrt{3}) &= (1 + 1 - 2) + \sqrt{3}(1 - 2(-1)) = 0 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = \sqrt{3}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $v_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $v_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Écrire la matrice P exprimant les vecteurs v_1, v_2, v_3, montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice P^{-1}.

   Solution : On doit exprimer les vecteurs v_1, v_2, v_3, en colonnes, en fonction des éléments $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ de la base $\mathcal{B}$, donc la matrice à considérer est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Il faut montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui équivaut à dire que la matrice P est de rang 3. On va montrer que P est de rang 3, et en même temps calculer son inverse de P, en effectuant des opérations sur les lignes. On part de

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   et on change L_2 en $L_2' = L_2 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   puis on change L_3 en $L_3' = L_3 + L_2'$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   Ceci montre déjà que P est de rang 3, puisque la matrice ci-dessus à gauche l'est. Pour calculer l'inverse de P, on repart dans l'autre sens, pour annuler les coefficients au-dessus de la diagonale : changeant L_2' en $L_2'' = L_2' - (2/3)L_3'$ et L_1 en $L_1' = L_1 - (1/3)L_3'$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   puis, changeant L_1' en $L_1'' = L_1' - (1/2)L_2''$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{3} & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   enfin, divisant la 1ère (resp. 2ème, resp. 3ème) par $\sqrt{3}$ (resp. 2, resp. 3) on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

   donc

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

3. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

   Solution : D'après la formule de changement de base, on a $A' = P^{-1}AP$. Calculons d'abord :

$$(*) \qquad AP = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 3\sqrt{3} & 3 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

puis

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 3\sqrt{3} & 3 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Résoudre au choix l'une des questions suivantes :

1. Déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des bases de $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

   Solution : Faisons des opérations sur les colonnes. L'espace de départ étant de dimension 5, on part de $(A \mid I_5)$. Soustrayant iC_1 à la colonne C_i, pour $i = 2, 3, 4, 5$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -19/3 & -7 & -23/3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   puis ajoutant $-(4/3)C'_2$, resp. $-(5/3)C'_2$, resp. $-2C'_2$ à C'_3, resp. C'_4, resp. C'_5 on obtient

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1/3 & -2/3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & -5/3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   enfin, remplaçant (C''_3, C''_4, C''_5) par $(C''_4, C''_3 - 3C''_4, C''_5 + C''_4)$ on obtient

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2/3 & 5/3 & -5/3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 & 11/3 & -11/3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Donc $\mathrm{rang}(A) = 3$ et, d'une part, une base de $\mathrm{Im}(A)$ est donnée par les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   D'autre part, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est donnée par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   donc aussi par les vecteurs

$$v_1 = (u_1 + u_2)/3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = u_2.$$

2. Déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et des équations de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

Solution : Faisons des opérations sur les lignes :

$$\left(A\left|\begin{matrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{matrix}\right.\right) \xrightarrow{L_3\to L_3-2L_1,\quad L_4\to L_4-3L_1} \left(\begin{matrix}1&2&3&4&5\\0&3&4&5&6\\0&-3&-1&-4&-7\\0&-4&-19/3&-7&-23/3\end{matrix}\left|\begin{matrix}y_1\\y_2\\y_3-2y_1\\y_4-3y_1\end{matrix}\right.\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3+L_2,\quad L_4\to L_4+4/3L_2} \left(\begin{matrix}1&2&3&4&5\\0&3&4&5&6\\0&0&3&1&-1\\0&0&-1&-1/3&1/3\end{matrix}\left|\begin{matrix}y_1\\y_2\\y_3-2y_1+y_2\\y_4-3y_1+4y_2/3\end{matrix}\right.\right)$$

$$\xrightarrow{L_4\to L_4+1/3L_3} \left(\begin{matrix}1&2&3&4&5\\0&3&4&5&6\\0&0&3&1&-1\\0&0&0&0&0\end{matrix}\left|\begin{matrix}y_1\\y_2\\y_3-2y_1+y_2\\y_4+y_3/3-11y_1/3+5y_2/3\end{matrix}\right.\right)$$

On peut s'arrêter là et on en déduit que :

$$\boxed{\operatorname{rang}(A)=3}$$

que des équations de $\operatorname{Ker}(A)$ sont :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}x+2y+3z+4s+5t&=&0\\3y+4z+5s+6t&=&0\\3z+s-t&=&0\end{array}\right.}$$

et que $\operatorname{Im}(A)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\boxed{3y_4+y_3-11y_1+5y_2=0}$$

De plus, on peut obtenir des bases de $\operatorname{Im}(A)$ et de $\operatorname{Ker}(A)$, en utilisant les équations trouvées ci-dessus. On trouve que :

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}-5\\-11\\1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-11\\3\\-3\\6\end{pmatrix}\right)\text{ est une base de }\operatorname{Ker}(A).}$$

Ici, on a utilisé $(s,t)=(1,4)$ puis $(s,t)=(-3,6)$ dans les équations donnant $\operatorname{Ker}(A)$. Tout autre choix de deux couples (s,t) libres donne une autre base de $\operatorname{Ker}(A)$. Pour trouver une base un peu plus propre, il est possible de continuer à transformer la matrice A afin de faire apparaître la matrice identité 3×3 en haut à gauche car alors x, y et z s'expriment simplement en fonction de s et t.

Pour l'image, on exprime y_3 en fonction de (y_1,y_2,y_4) grâce à l'équation de $\operatorname{Im}(A)$ trouvée précédemment puis on choisit pour ce triplet $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ successivement. (Là encore tout autre choix de trois triplets libres donne une autre base de $\operatorname{Im}(A)$.) On trouve que :

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\11\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right)\text{ est une base de }\operatorname{Im}(A).}$$