Université Pierre et Marie Curie 2009–2010

LM270, Corrigé du TE no. 2

Exercice 1 (4×2 = 8pts)**.** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $M_2(\mathbf{R})$? Dans chaque cas, justifiez votre réponse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution : On rappelle que le polynôme caractéristique $P_M(X)$ d'une matrice M de taille 2 est

$$P_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \mathrm{dét}(M).$$

Calculons alors les polynômes caractéristiques de A, B, C, D. D'abord $P_A(X) = X^2 - 5X - 2$, son discriminant est > 0 donc $P_A(X)$ a deux racines réelles distinctes, donc A est diagonalisable. Puis, $P_B(X) = X^2 - 3X + 14$, son discriminant est < 0 donc $P_B(X)$ n'a pas de racines réelles, donc B n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$ (mais l'est dans $M_2(\mathbf{C})$). Enfin,

$$P_C(X) = X^2 - 10X + 25 = (X-5)^2 \qquad \text{resp.} \qquad P_D(X) = X^2 - 8X + 16 = (X-4)^2$$

a une racine double, mais C (resp. D) n'est pas une homothétie, donc n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (4+2 = 6pts)**.** Pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $M_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbf{C})$?

Solution : Le polynôme caractéristique de M_t est $X^2 - 6X + (5 - 2t)$, son discriminant est $36 - 20 + 8t = 8(2 + t)$. Donc : si $t > -2$, M_t a deux valeurs propres réelles distinctes, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$. Si $t < -2$, M_t a deux valeurs propres complexes (conjuguées) distinctes, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{C})$ mais pas dans $M_2(\mathbf{R})$. Enfin, si $t = -2$, M_{-2} a une seule valeur propre, mais n'est pas une homothétie, donc M_{-2} n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$ ni dans $M_2(\mathbf{C})$.

Exercice 3 (22pts)**.** (5pts pour le polynôme caractéristique, 5pts pour chaque vecteur propre, 2 pts pour la matrice de passage) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation choisie.

Solution : Calculons

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix}$$

en développant suivant la 3ème colonne :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 3 & -2-X \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(1-X)\begin{vmatrix} -X & 2 \\ 3 & -2-X \end{vmatrix} \\ &= -\big(6 - 2(2+X)\big) + (1-X)\big(X(X+2) - 6\big) = (1-X)(-2 + X^2 + 2X - 6) ; \end{aligned}$$

or $X^2 + 2X - 8 = (X-2)(X+4)$ donc $P_A(X) = (1-X)(X-2)(X+4)$ a pour racines $1, 2, -4$. Calculons maintenant les espaces propres $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ pour $\lambda = 1, 2, -4$; ils sont non nuls et sont en somme directe, donc chacun est de dimension 1 (n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n).

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on voit que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, i.e. le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Puis

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'on voit que $4C_1 + 3C_2 = 2C_3$, donc le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$.

Enfin,

$$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

et l'on voit que $2C_1 - 3C_2 = -2C_3$, donc le vecteur $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A + 4I_3)$.

La matrice de passage P de la base canonique à la base de diagonalisation (v_1, v_2, v_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (10pts)**.** Calculez le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 16 & 1 & 4 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Solution : Notons D ce déterminant. En échangeant les lignes 1 et 2, puis en faisant glisser la dernière ligne au-dessus des trois précédentes, on obtient

$$D = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1/3 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 16 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

puis, mettant en facteur 1/3 (resp. 1/4, resp. 1/2) dans la 1ère (resp. 2ème, resp. 4ème) colonne, on obtient

$$D = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 16 & 1 & 4 \\ 27 & 64 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

et l'on reconnaît là un déterminant de Vandermonde. Donc

$$D = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 2}(4-3)(1-3)(2-3)(1-4)(2-4)(2-1) = (-1)^4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5 (5 + 5 = 10pts)**.** Soit k un corps. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, on définit sa trace $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (somme des coefficients diagonaux).

1. Soient $A, B \in M_n(k)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   Solution : On a

   $$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

   et ceci égale

   $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA).$$

2. Soient $A, A' \in M_n(k)$ des matrices semblables. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

   Solution : Par hypothèse, A et A' sont semblables, i.e. il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $A' = P^{-1}AP$. Alors, d'après la question 1., on a

   $$\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(A).$$

Exercice 6 (5 + 1 + 9 = 15pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbf{R})$.

1. Montrer que A est de rang 1, puis déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$. (5 pts)

   Solution : On voit aussitôt que A est de rang 1, puisque $C_i = iC_1$ pour $i = 2, 3, 4, 5$. Donc, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$.

2. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$; en déduire que 55 est valeur propre de A et que A est diagonalisable.

   Solution : Soit $(v_1, \dots, v_4)$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$, complétons-la en une base $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_5)$ de $V = \mathbf{C}^5$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^5$ dont la matrice dans la base canonique est A ; alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est de la forme

   $$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix}$$

   et l'on sait (d'après l'exercice 5) que $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A)$ donc $b_5 = \mathrm{Tr}(A) = 55$. Il en résulte que

   $$P_A(X) = P_{A'}(X) = X^4\,(55 - X)$$

   donc 55 est valeur propre de A ; soit w_5 un vecteur propre associé. Comme les espaces propres sont en somme directe, $(v_1, \dots, v_4, w_5)$ est une base de $\mathbf{C}^5$, et dans cette base la matrice de u est diagonale, avec pour termes diagonaux $(0, 0, 0, 0, 55)$.

Exercice 7 (15 pts)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbf{C}^5$. L'endomorphisme u de $\mathbf{C}^5$ défini par $u(e_i) = e_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, 4$, et $u(e_5) = e_1$, est-il diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Solution : On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad P_u(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la 1ère ligne, on trouve :

$$P_u(X) = (-1)^{1+1}(-X) \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix} + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -X^5 + 1.$$

Or le polynôme $X^5 - 1$ a 5 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, à savoir les racines 5èmes de l'unité

$$\exp\big(\frac{2ik\pi}{5}\big) = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} \qquad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Donc u a 5 valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable dans $M_5(\mathbf{C})$.

Exercice 8 (7 + 7 = 14pts)**.** Soient V un k-espace vectoriel de dimension n, E, F deux sous-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_r)$ une base de F. Soit $E + F$ le sous-espace vectoriel de V engendré par E et F, et soit π la projection de $E + F$ sur l'espace quotient $(E + F)/E$.
1) Montrer que $\pi(f_1), \dots, \pi(f_r)$ engendrent $(E + F)/E$.

Solution : Par définition, $E + F$ est l'ensemble des sommes $x + y$, où $x \in E$ et $y \in F$. (Ceci est bien un espace vectoriel, il contient E et F, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant E et F, car un tel sous-espace contient nécessairement toutes les sommes $x + y$.) Le quotient de $E + F$ par le sous-espace E est l'ensemble des classes $\pi(z) = z + E$, pour $z \in E + F$. Soit $z \in E + F$, il s'écrit $z = x + y$ avec $x \in E$ et $y \in F$, et comme $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de F, on a $y = t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r$ pour certains scalaires (uniques) $t_1, \dots, t_r$. Comme $\pi : E+F \to (E+F)/E$ est linéaire, et comme $\pi(x) = 0$ (puisque $x \in E$), on a

$$\pi(z) = \pi(y) = t_1\pi(f_1) + \cdots + t_r\pi(f_r).$$

Ceci montre que $(E + F)/E$ est engendré par les éléments $\pi(f_1), \dots, \pi(f_r)$.

2) On note i l'inclusion $F \hookrightarrow E + F$. Montrer que $\pi \circ i$ est surjective et déterminer son noyau.

Solution : D'abord, l'inclusion $i : F \hookrightarrow E + F$ n'est rien d'autre que l'application qui $F \to E + F$, $x \mapsto x$. On vient de voir que tout élément de $(E + F)/E$ est de la forme $\pi(y) = \pi(i(y))$, avec $y \in F$, c.-à.-d., que $\pi \circ i$ est surjectif. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\pi \circ i) = \{y \in F \mid \pi(i(y)) = 0\} &= \{y \in F \mid i(y) \in \mathrm{Ker}(\pi)\} \\ &= \{y \in F \mid y \in \mathrm{Ker}(\pi)\} \end{aligned}$$

or, par définition du quotient, on a $\mathrm{Ker}(\pi) = E$, d'où $\mathrm{Ker}(\pi \circ i) = F \cap E$.