Université Pierre et Marie Curie 2010–2011

LM270, corrigé du TE2a Groupes 1,2,3 (22/3/2011)

Noté sur 75

Exercice 1 (52 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ associé à A.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

1. (5 pts) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

   Solution : On a $P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-X & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1-X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2-X \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la 2ème colonne, puis par rapport à la 3ème, on obtient

   $$P_A(X) = (1-X)^2 \begin{vmatrix} 2-X & 2 & -1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ -1 & 2 & -2-X \end{vmatrix}$$

   puis en remplaçant C_1 par $C_1 - C_3$ et C_2 par $C_2 + 2C_3$, on obtient

   $$P_A(X) = (1-X)^2 \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & -1-X & -1 \\ X+1 & -2-2X & -2-X \end{vmatrix}$$

   mettant $-(X+1)$ en facteur dans la 2ème colonne puis remplaçant C_3 par $C_3 + C_2$, ceci donne

   $$P_A(X) = -(1+X)(1-X)^2 \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ X+1 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

   puis développant le déterminant par rapport à la 2ème ligne, on obtient

   $$P_A(X) = -(1+X)(1-X)^2(X^2 - 3X + X + 1) = -(1+X)(1-X)^4.$$

2. (5 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$ donner, **sans calculs** et en citant un résultat du cours, la dimension de l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$.

   Solution : D'après le cours, on sait que la dimension de $V_{(\lambda)}$ est la multiplicité algébrique de λ, c.-à.-d., la multiplicité de λ comme racine de $P_A(X)$. On a donc $\dim V_{(1)} = 4$ et $\dim V_{(-1)} = 1$. En particulier, $V_{(-1)}$ égale l'espace propre V_{-1}.

3. (10 pts) Pour chaque racine λ de $P_A(X)$, déterminer une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)$ puis, si nécessaire, de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)^2$, $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_5)^3$, etc.

   Solution : Commençons par $\lambda = -1$, pour laquelle on sait que $V_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_5)$ est de dimension 1. On a

   $$A + I_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   On voit que $C_4 + 2C_5 = 0$, donc V_{-1} est la droite engendrée par le vecteur $e_4 + 2e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Considérons maintenant $\lambda = 1$ et écrivons :

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_5'=C_5+C_1']{\substack{C_1'=C_1+C_3 \\ C_4'=C_4-2C_1'}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_5'+C_4']{C_5''=} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc les vecteurs e_2 et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\operatorname{Ker}(A - I_5)$, qui est donc de dimension 2.

Remarquons que $w - e_2 = (A - I_5)(e_1)$ est le vecteur v_1 indiqué dans la question 5) ; donc (v_1, e_2) est aussi une base de $\operatorname{Ker}(A - I_5)$. Calculons $(A - I_5)^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc une base de $\operatorname{Ker}(A - I_5)^2$ est donnée par les vecteurs e_1, e_2, e_3 et $e_4 + e_5$. Comme $\operatorname{Ker}(A - I_5)^2$ est de dimension 4, il égale l'espace caractéristique $V_{(1)}$ et donc le calcul de la suite des noyaux s'arrête ici.

4. (4 pts) Déterminer la forme normale de Jordan J_A de A.

   Solution : Pour la valeur propre -1, de multiplicité 1, le bloc de Jordan est $J_1(-1) = (-1)$. Pour la valeur propre 1, les dimensions de la suite des noyaux sont (0,2,4), donc la partition associée est (2,2), qui est égale à sa transposée. Donc pour la valeur propre 1, la matrice de Jordan est

$$J_{2,2}(1) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   et donc la forme normale de Jordan de A est

$$J_A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

5. (5 + 4 = 9 pts) Plus précisément, pour chaque racine λ de $P_A(X)$, donner une base $\mathcal{C}_\lambda$ de $V_{(\lambda)}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ réunion des $\mathcal{C}_\lambda$, égale J_A. **Indication :** on prendra $v_1 = (A - I_5)(e_1)$ et v_5 un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda \neq 1$. Écrire la matrice de passage $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, puis déterminer P^{-1} (exprimer les vecteurs e_j en fonction des vecteurs v_i).

   Solution : On a vu que $v_1 = (A - I_5)(e_1)$ et $e_2 = (A - I_5)(e_3)$ forment une base de $\operatorname{Ker}(A - I_5)$, donc si l'on prend $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2$ et $v_4 = e_3$, puis $v_5 = e_4 + 2e_5$ (le vecteur propre trouvé plus haut pour $\lambda = -1$) alors la matrice de u dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

c'est-à-dire J_A. La matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer son inverse, écrivons que $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2$, $v_4 = e_3$ et

$$\begin{aligned} v_5 &= e_4 + 2e_5 \\ v_1 &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 = v_2 - v_3 + v_4 - e_4 - e_5. \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$e_5 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5$$

puis $e_4 = -2v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 2v_4 - v_5$, d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $(1 + 2 + 4 = 7$ pts) Soit s l'endomorphisme égal à $\lambda\mathrm{id}$ sur chaque espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ de u et soit S sa matrice dans la base $\mathcal{C}$. Écrire la matrice $N = J_A - S$ et calculer N^2 puis $\exp(tN)$ et $\exp(tJ_A)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Solution : On a

$$N = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad N^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(tN) = I_5 + tN = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Puis, comme S et N commutent (puisque N est diagonale par blocs et que S est une homothétie sur chaque bloc), on a $\exp(tJ_A) = \exp(tS)\exp(tN)$ et donc

$$\exp(tJ_A) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{array}\right).$$

7. $(4 + 3 + 2 = 9$ pts) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} \quad \text{telles que} \quad X'(t) = A \cdot X(t).$$

   Soit $\mathcal{C}$ la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de la question 5. On définit les fonctions $(y_1(t), \dots, y_5(t))$ par l'égalité $X(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2 + \cdots + y_5(t)v_5$ et l'on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_5(t) \end{pmatrix}.$$

Exprimer $Y(t)$ en fonction de $X(t)$ et P, puis la dérivée $Y'(t)$ en fonction de $X'(t)$ et P. Montrer que $Y(t)$ est solution d'une équation différentielle $Y'(t) = B \cdot Y(t)$ pour une matrice B que l'on déterminera, puis calculer $\exp(tB)$ et exprimer $Y(t)$ en fonction de $Y(0)$, puis en fonction de $X(0)$.

Solution : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les $y_i(t)$ sont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du vecteur $X(t)$; donc d'après la formule de changement de coordonnées, on a $X(t) = P \cdot Y(t)$, et comme P est à coefficients constants (c.-à.-d., ne dépendant pas de t), on obtient aussi $X'(t) = P \cdot Y'(t)$. Comme $X'(t) = A \cdot X(t)$, on obtient donc que :

$$Y'(t) = (P^{-1}AP) \cdot Y(t) = J_A \cdot Y(t).$$

On a vu en cours que ceci entraîne que

$$Y(t) = \exp(tJ_A)Y(0) = y_1(0)\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2(0)\begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + y_5(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

et d'autre part, on a $Y(0) = P^{-1}X(0)$.

8. (3 pts) On suppose que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le vecteur $Y(100)$.

Solution : On a $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ te^t \\ e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad Y(100) = \begin{pmatrix} e^{100} \\ 0 \\ 100\,e^{100} \\ e^{100} \\ e^{-100} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (23 pts). Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_9)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{10}$ et soit u l'endomorphisme défini par $u(e_j) = e_{j+2}$ pour $j = 0, 1, \ldots, 7$ et $u(e_8) = e_0$, $u(e_9) = e_1$, c.-à.-d., qui envoie $e_{j \bmod 10}$ sur $e_{j+2 \bmod 10}$.

1. (6 pts) Montrer, **sans calculer les espaces propres** et en citant un résultat du cours, que u est diagonalisable.

Solution : Remarquons d'abord que le résultat demandé est vrai dans le cadre plus général suivant : soit $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$), soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et soit u l'endomorphisme « de décalage » défini par $u(e_j) = e_{j+k}$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1-k$ et $u(e_{n-k}) = e_0$, $u(e_{n+1-k}) = e_1$, ..., $u(e_n) = e_k$, c.-à.-d., $u(e_{j \bmod n}) = e_{j+k \bmod n}$. Alors u vérifie $u^n = \mathrm{id}$: en effet, supposons avoir montré que $u^d(e_{j \bmod n}) = e_{j+dk \bmod n}$ (pour $d = 1$, c'est la définition de u), alors

$$u^{d+1}(e_{j \bmod n}) = u(e_{j+dk \bmod n}) = e_{j+dk+k \bmod n} = e_{j+(d+1)k \bmod n}$$

et l'on en conclut par récurrence que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a $u^d(e_{j \bmod n}) = e_{j+dk \bmod n}$. En particulier, pour $d = n$, comme $j + nk = j \bmod n$, on a $u^n = \mathrm{id}$.

Donc u est annulé par le polynôme $X^n - 1$, qui a n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, à savoir $\exp\left(\dfrac{2im\pi}{n}\right)$ (où $i^2 = -1$), pour $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Ceci entraîne, d'après le cours, que u est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont contenues dans l'ensembles des racines n-èmes de l'unité. Mais attention, toutes les racines n-èmes de l'unité ne sont pas nécessairement des valeurs propres de u (ceci dépend du pgcd de k et n ...).

Revenant à l'exercice, on a $n = 10$ et $k = 2$ (donc $n = 5k$). D'après le calcul général précédent, on sait que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $u^d(e_{j \bmod 10}) = e_{j+2d \bmod 10}$. Donc on obtient ici que $u^5 = \mathrm{id}$ (puisque $2 \cdot 5 \equiv 0$ modulo 10). Donc, comme u est annulé par le polynôme $X^5 - 1$, qui a 5 racines distinctes dans $\mathbb{C}$, on sait, d'après le cours, que u est diagonalisable.

2. (4 pts) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de u est contenu dans un ensemble E à 5 éléments, que l'on précisera.

   Solution : Comme u est annulé par le polynôme $P = X^5 - 1$, alors toute valeur propre λ de u est racine de ce polynôme. En effet, si v est un vecteur propre pour λ, alors $0 = (u^5 - \mathrm{id})(v) = (\lambda^5 - 1)\, v$, et donc $\lambda^5 = 1$.

3. (3 pts) On note ξ le nombre complexe $\exp(2i\pi/5)$ (où $i = \sqrt{-1}$). Calculer l'image par u des vecteurs $v_0 = e_0 + e_2 + e_4 + e_6 + e_8$ et $v_1 = e_0 + \xi^{-1}e_2 + \xi^{-2}e_4 + \xi^{-3}e_6 + \xi^{-4}e_8$.

   Solution : On a $u(v_0) = e_2 + e_4 + e_6 + e_8 + e_0 = v_0$ et
$$u(v_1) = e_2 + \xi^{-1}e_4 + \xi^{-2}e_6 + \xi^{-3}e_8 + \xi^{-4}e_0 = \xi v_1$$
   (on a $\xi^{-4} = \xi$ puisque $\xi^5 = 1$). Donc v_0 et v_1 sont des vecteurs propres de u.

4. $(4 + 4 + 2 = 10$ pts) Construire des vecteurs propres $v_2, \dots, v_9$ de u, similaires aux précédents, et montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{C}^{10}$, puis écrire la matrice de u dans cette base.

   Solution : Posons
$$v_2 = e_0 + \xi^{-2}e_2 + \xi^{-4}e_4 + \xi^{-6}e_6 + \xi^{-8}e_8,$$
   alors
$$u(v_2) = e_2 + \xi^{-2}e_4 + \xi^{-4}e_6 + \xi^{-6}e_8 + \xi^{-8}e_0 = \xi^2 v_2.$$
   Si l'on pose de même, pour $k = 3, 4$,
$$v_k = e_0 + \xi^{-k}e_2 + \xi^{-2k}e_4 + \xi^{-3k}e_6 + \xi^{-4k}e_8,$$
   alors $u(v_k) = \xi^k v_k$. Donc, pour $k = 0, 1, \dots, 4$, v_k est un vecteur propre de u pour la valeur propre ξ^k.
   Posons de même $w_0 = e_1 + e_3 + e_5 + e_7 + e_9$ et $w_1 = e_1 + \xi^{-1}e_3 + \xi^{-2}e_5 + \xi^{-3}e_7 + \xi^{-4}e_9$, alors $u(w_0) = w_0$ et $u(w_1) = \xi w_1$. Pour $k = 2, 3, 4$, posons alors
$$w_k = e_1 + \xi^{-k}e_3 + \xi^{-2k}e_5 + \xi^{-3k}e_7 + \xi^{-4k}e_9.$$
   Le même calcul que précédemment montre que $u(w_k) = \xi^k w_k$.
   Donc, pour chaque $k = 0, 1, \dots, 4$, v_k et w_k appartiennent à l'espace propre V_{ξ^k}. Comme v_k et w_k sont linéairement indépendants, et comme les espaces propres sont en somme directe, il en résulte que les dix vecteurs $v_0, w_0, \dots, v_4, w_4$ sont linéairement indépendants, donc forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^{10}$. La matrice de u dans cette base est
$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \xi I_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \xi^2 I_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \xi^3 I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^4 I_2 \end{array}\right)$$
   et si l'on considère la base $\mathcal{C}' = (v_0, v_1, \dots, v_4, w_0, w_1, \dots, w_4)$, on obtient la matrice
$$\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^4 \end{pmatrix}.$$