Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Corrigé du TE3a Groupes 1,2,3 (28/4/2011)

Exercice 1 (10pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (2 pts) Exprimez $q(x_1, \dots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : Notons X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$. On a $q(x_1, \dots, x_5) = {}^tXAX = 2\big(x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2\big)$.

2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Solution : En suivant l'algorithme de réduction des formes quadratiques en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned}
q(x_1, \dots, x_5) &= \boxed{2\Big(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\Big)^2} + q_2(x_2, \dots, x_5) \\
\text{avec } q_2(x_2, \dots, x_5) &= 2(x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \\
&= \frac{3}{2}x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + \frac{3}{2}x_4^2 + x_4x_5 + \frac{3}{2}x_5^2 \\
&= \boxed{\frac{3}{2}\Big(x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5)\Big)^2} + q_3(x_3, x_4, x_5) \\
\text{avec } q_3(x_3, x_4, x_5) &= \frac{3}{2}x_3^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + \frac{3}{2}x_4^2 + x_4x_5 + \frac{3}{2}x_5^2 - \frac{1}{6}(x_3 + x_4 + x_5)^2 \\
&= \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_3x_4 + \frac{2}{3}x_3x_5 + \frac{4}{3}x_4^2 + \frac{2}{3}x_4x_5 + \frac{4}{3}x_5^2 = \boxed{\frac{4}{3}\Big(x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5)\Big)^2} + q_4(x_4, x_5) \\
\text{avec } q_4(x_4, x_5) &= \frac{4}{3}x_4^2 + \frac{2}{3}x_4x_5 + \frac{4}{3}x_5^2 - \frac{1}{12}(x_4 + x_5)^2 = \frac{5}{4}x_4^2 + \frac{1}{2}x_4x_5 + \frac{5}{4}x_5^2 \\
&= \boxed{\frac{5}{4}\Big(x_4 + \frac{1}{5}x_5\Big)^2} - \frac{1}{20}x_5^2 + \frac{5}{4}x_5^2 = \frac{5}{4}\Big(x_4 + \frac{1}{5}x_5\Big)^2 + \boxed{\frac{6}{5}x_5^2}
\end{aligned}$$

D'où $q(x_1, \dots, x_5) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} L_i(x_i, \dots, x_5)^2$ avec :

$$L_1(x_1, \dots, x_5) = \sqrt{2}\Big(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\Big) \qquad L_3(x_3, x_4, x_5) = \sqrt{\frac{4}{3}}\Big(x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5)\Big) \qquad L_5(x_5) = \sqrt{\frac{6}{5}}x_5$$

$$L_2(x_2, \dots, x_5) = \sqrt{\frac{3}{2}}\Big(x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5)\Big) \qquad L_4(x_4, x_5) = \sqrt{\frac{5}{4}}\Big(x_4 + \frac{1}{5}x_5\Big)$$

C'est-à-dire, $\forall i = 1, \dots, 5 : L_i(x_i, \dots, x_5) = \displaystyle\sqrt{\frac{i+1}{i}}\Big(x_i + \frac{1}{i+1}\sum_{j=i+1}^{5} x_j\Big)$.

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(5, 0)$ et $\mathrm{rang}(q) = 5$. Ce résultat s'obtient également à partir de l'égalité $q(x_1, \dots, x_5) = \displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{5} x_i\Big)^2 + \sum_{i=1}^{5} x_i^2$ qui permet de vérifier directement que q est définie positive.

Exercice 2 (12pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (2 pts) Exprimez $q(x_1,\dots,x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1,\dots,x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : $q(x_1,\dots,x_5) = 2(x_1x_2 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5)$.

2. (8 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Première solution : Comme q ne comporte pas de « terme carré », on en introduit grâce au changement de variables $\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ x_2' = \dfrac{x_1-x_2}{2} \end{cases}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} q(x_1,\dots,x_5) &= Q_1(x_1',x_2',x_3,x_4,x_5) \\ &= 2\big((x_1'+x_2')(x_1'-x_2') + (x_1'+x_2')x_5 + (x_1'-x_2')x_3 + x_3x_4 + x_4x_5\big) \\ &= 2(x_1'^2 + x_1'x_3 + x_1'x_5 - x_2'^2 - x_2'x_3 + x_2'x_5 + x_3x_4 + x_4x_5) \\ &= 2\Big(x_1' + \frac{1}{2}(x_3+x_5)\Big)^2 - 2\Big(x_2' + \frac{1}{2}(x_3-x_5)\Big)^2 + q_3(x_3,x_4,x_5) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_5)^2 - \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_5)^2} + q_3(x_3,x_4,x_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } q_3(x_3,x_4,x_5) &= 2(x_3x_4 + x_4x_5) - \frac{1}{2}(x_3+x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_3-x_5)^2 \\ &= 2(x_3x_4 - x_3x_5 + x_4x_5) \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\begin{cases} x_3 = x_3' + x_4' \\ x_4 = x_3' - x_4' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_3' = \dfrac{x_3+x_4}{2} \\ x_4' = \dfrac{x_3-x_4}{2} \end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned} q_3(x_3,x_4,x_5) &= 2\big((x_3'+x_4')(x_3'-x_4') - (x_3'+x_4')x_5 + (x_3'-x_4')x_5\big) \\ &= 2(x_3'^2 - x_4'^2 - 2x_4'x_5) \\ &= 2x_3'^2 - 2(x_4'+x_5)^2 + 2x_5^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{2}(x_3+x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_3-x_4+2x_5)^2 + 2x_5^2} \end{aligned}$$

D'où $q(x_1,\dots,x_5) = L_1(x_1,\dots,x_5)^2 - L_2(x_1,\dots,x_5)^2 + L_3(x_3,x_4,x_5)^2 - L_4(x_3,x_4,x_5)^2 + L_5(x_5)^2$ avec :

$$L_1(x_1,\dots,x_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2+x_3+x_5) \qquad L_3(x_3,x_4,x_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3+x_4) \qquad L_5(x_5) = \sqrt{2}x_5$$

$$L_2(x_1,\dots,x_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2+x_3-x_5) \qquad L_4(x_3,x_4,x_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3-x_4+2x_5)$$

Seconde solution : Comme q ne comporte pas de « terme carré » on utilise la 2e méthode de l'algorithme de réduction des formes quadratiques en somme de carrés de formes linéaires indépendantes en écrivant $q(x_1,\dots,x_5)$ sous la forme $\lambda \cdot \big(x_1 + \ell_1(x_3,x_4,x_5)\big)\big(x_2 + \ell_2(x_3,x_4,x_5)\big) + q_3(x_3,x_4,x_5)$:

$$q(x_1,\dots,x_5) = \boxed{2(x_1+x_3)(x_2+x_5)} + q_3(x_3,x_4,x_5) \qquad \text{avec} \qquad q_3(x_3,x_4,x_5) = 2(x_3x_4 + x_4x_5) - 2x_3x_5$$

et on procède de façon similaire avec q_3 :

$$q_3(x_3,x_4,x_5) = \boxed{2(x_3+x_5)(x_4-x_5)} + q_5(x_5) \qquad \text{avec} \qquad q_5(x_5) = \boxed{2x_5^2}$$

L'identité $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ donne alors $\begin{cases} 2(x_1+x_3)(x_2+x_5) = L_1(x_1,\dots,x_5)^2 - L_2(x_1,\dots,x_5)^2 \\ 2(x_3+x_5)(x_4-x_5) = L_3(x_3,x_4,x_5)^2 - L_4(x_3,x_4,x_5)^2 \end{cases}$ et on retrouve le résultat précédent.

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(3,2)$ et $\mathrm{rang}(q) = 5$.

Exercice 3 (4 + 4 pts). En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1,\dots,x_5 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

Solution : Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a $\|V\|^2 = 1+4+9+16+25 = 55$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|V \cdot X| \leq ||V|| \cdot ||X||$ donne alors

$$|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5| \leq \sqrt{55}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}$$

d'où l'inégalité demandée. Il y a égalité si et seulement si V et X sont colinéaires, c'est-à-dire si $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$, $x_4 = 4x_1$ et $x_5 = 5x_1$.

Exercice 4 (10 pts). On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ et soit F la droite engendrée par le vecteur $f = \begin{pmatrix} p^2 - q^2 \\ 2pq \end{pmatrix}$.

1. (3 pts) Calculer $\|f\|$ et déterminer un vecteur v de norme 1 orthogonal à $u = \dfrac{1}{\|f\|} f$.

Solution : $||f||^2 = (p^2-q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2+q^2)^2$ donc $||f|| = p^2 + q^2$, $u = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2 - q^2 \\ 2pq \end{pmatrix}$ et $v = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -2pq \\ p^2 - q^2 \end{pmatrix}$.

2. (1 + 6 pts) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite F. Écrire la matrice de s dans la base $\mathcal{C} = (u, v)$, puis dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Solution : La matrice de s dans la base $\mathcal{C}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si l'on note $P = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, alors $P^{-1} = {}^tP$ car P est orthogonale par construction de u et v. La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s)\,P^{-1} &= \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ -2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(p^2+q^2)^2}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ 2pq & -p^2+q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^2-q^2 & 2pq \\ -2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(p^2+q^2)^2}\begin{pmatrix} (p^2-q^2)^2 - (2pq)^2 & 2(p^2-q^2)(2pq) \\ 2(p^2-q^2)(2pq) & -(p^2-q^2)^2 + (2pq)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{P^2+Q^2}\begin{pmatrix} P^2-Q^2 & 2PQ \\ 2PQ & -P^2+Q^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (P,Q) = (p^2-q^2, 2pq) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}.
\end{aligned}$$

Remarque : Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$, on pouvait aussi calculer $s(e_1)$ et $s(e_2)$ en appliquant la formule $s(x) = x - 2\dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}v$ à $x = e_1$ puis à $x = e_2$.

Exercice 5 (12 pts). On admet que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

Remarque : Cette identité découle de l'égalité $\forall k$: $({}^tA)^k = {}^t(A^k)$ et de la définition de l'exponentielle de ${}^tA$: $\exp({}^tA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{({}^tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{{}^t(A^k)}{k!} \underset{(*)}{=} {}^t\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right) = {}^t\exp(A)$, l'égalité $(*)$ résultant de la simple identification des 2 matrices, coefficient par coefficient.

1. (2 pts) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\exp(A) \in O(n)$.

Solution : On a ${}^t\exp(A) \times \exp(A) = \exp({}^tA) \times \exp(A) = \exp(-A) \times \exp(A) = I_n$, ce qu'il fallait démontrer.

2. (5 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ considérée comme élément de $M_2(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Déterminer $P_A(X)$ et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A. Écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, calculer son inverse P^{-1}, et déterminer sans calcul la matrice $D = P^{-1}AP$.

Solution : $P_A(X) = \text{dét}(A - X \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Les valeurs propres de A sont donc i et $-i$. On a $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix_1 - x_2 \\ x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x_1 = ix_2$. L'espace propre V_i est donc engendré par $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}$. De même $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 - x_2 \\ x_1 + ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $x_2 = ix_1$. L'espace propre V_{-i} est donc engendré par $\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$. La famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^2$ est libre car les espaces propres V_i et V_{-i} sont en somme directe. C'est donc une base de $\mathbb{C}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}}$. Elle est de déterminant -2.

On rappelle que l'inverse d'une matrice de taille 2 inversible $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donnée par la formule

$$Q^{-1} = \frac{1}{\text{dét}\, Q}\ {}^t(\text{com}\, Q) = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}}$. Enfin, comme $v_1 \in V_i$ et $v_2 \in V_{-i}$, on a $\boxed{D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}$.

3. (3 pts) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tD)$, puis écrire $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$ comme une matrice à coefficients réels (on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

Solution : $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ et $\exp(tA) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ie^{it} & e^{-it} \\ e^{it} & ie^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

4. (2 pts) Donner une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = -I_2$.

Solution : De la question précédente on déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\exp\big((2k+1)\pi A\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc toutes les matrices $B_k = (2k+1)A = \begin{pmatrix} 0 & -(2k+1)\pi \\ (2k+1)\pi & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\exp(B_k) = -I_2$.

Exercice 6 (8 pts)**.** Pour tout $n \geq 2$, on considère dans $M_n(\mathbb{R})$ la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c.-à.-d., les coefficients diagonaux valent 2, ceux juste au-dessus ou en-dessous de la diagonale valent 1, les autres sont nuls. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$. 1. (0,5 + 1 pt) Calculer D_2 et D_3.

Solution : $D_2 = 3$ et $D_3 = 4$.

2. En développant D_n par rapport à la première colonne, montrer que $D_n = aD_{n-1} - bD_{n-2}$, pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ que l'on déterminera (2,5 pts). En utilisant cette formule, calculer D_4 et D_5 (0,5 + 0,5 pt).

Solution : $D_n = 2D_{n-1} - \text{dét}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette deuxième matrice est de taille $(n-1) \times (n-1)$ et la sous-matrice de taille $(n-2) \times (n-2)$ dans le coin inférieur droit est A_{n-2}. En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient donc D_{n-2}. D'où la relation : $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. On a alors $D_4 = 2 \times 4 - 3 = 5$ et $D_5 = 2 \times 5 - 4 = 6$.

3. Les calculs précédents vous suggèrent-ils une formule pour la valeur de D_n (1 pt) ? Si oui, démontrer cette formule par récurrence sur n (2 pts).

Solution : On conjecture que $D_n = n+1$, ce qui est déjà vérifié pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. On le montre alors par récurrence : supposons que pour tout $k < n$ on a $D_k = k + 1$; on a alors $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n + 1$, ce qu'il fallait démontrer.