# Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
# LM270, Corrigé du devoir 4a du 18 mai 2010 (groupes 4,5,7,8,9)

**Exercice 1** (20 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : La matrice $A$ est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, donc son polynôme caractéristique est $P_A(X) = -X^3$ : la seule valeur propre est 0. Si $A$ était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice diagonale de termes diagonaux $(0, 0, 0)$, i.e. à la matrice nulle, et donc $A$ serait la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc $A$ n'est pas diagonalisable. De plus, on peut vérifier que $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1 (ce qui montre aussi que $A$ n'est pas diagonalisable).

La matrice $B$ est symétrique réelle, donc définit un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, donc on sait que $B$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminons les valeurs propres et vecteurs propres de $B$. Notons $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On remarque d'abord que dans chaque ligne la somme des coefficients vaut 3, d'où

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $v_1' = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 3$, et est de norme $\sqrt{3}$, donc on prendra $v_1 = v_1'/\sqrt{3}$.
Considérons le plan $P = \mathbb{R}(v_1')^\perp$, d'équation $x + y + z = 0$. Une base (non orthonormée) de $P$ est $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)$. On a

$$B(e_1 - e_2) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3), \qquad B(e_2 - e_3) = -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_2) - (e_2 - e_3)$$

donc la restriction à $P$ de $B$ à pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Donc, posant $v_2' = (e_1 - e_2) - (e_2 - e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3$, on a $Bv_2' = 0$, i.e. $v_2'$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = 0$, et est de norme $\sqrt{6}$, donc on prendra $v_2 = v_2'/\sqrt{6}$. Enfin, en prenant la trace de la matrice $2 \times 2$ ci-dessus, on voit que la dernière valeur propre est $\lambda_3 = -2$, et un vecteur propre correspondant est $v_3' = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3$, de norme $\sqrt{2}$, donc on prendra $v_3 = v_3'/\sqrt{2}$. On obtient donc la base orthonormée de vecteurs propres ci-dessous :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints, on sait que les espaces propres de $B$ sont deux à deux orthogonaux, donc les vecteurs $v_1, v_2, v_3$ sont deux-à-deux orthogonaux ; à titre de vérification, on le vérifie directement :

$$(v_1 \mid v_2) = \frac{1}{\sqrt{18}}(1 - 2 + 1) = 0, \qquad (v_1 \mid v_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 - 1) = 0, \qquad (v_2 \mid v_3) = \frac{1}{\sqrt{12}}(1 - 1) = 0.$$

**Exercice 2** (20 pts)**.** (cf. Feuille 6, exos 2,3,4) Soient $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère du plan affine $\mathcal{P}$ et $(x, y)$ les coordonnées dans $\mathcal{R}_0$. Soient $a \in \mathbb{R}$, $A$ le point de coordonnées $(0, a)$, et $\mathcal{D}_a$ la droite affine de direction $\mathbb{R}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ passant par $A$. On note $(X, Y)$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a = (A, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$.

1. Exprimer $(x, y)$ en fonction de $(X, Y)$, et $(X, Y)$ en fonction de $(x, y)$.

   Solution : Notons $\mathcal{B}_0$ la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$. La matrice de passage est

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+2Y \\ X+3Y+a \end{pmatrix}.$$
D'autre part, on a dét$(P) = 1$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y+2a \\ -x+y-a \end{pmatrix}.$$

2. Soit $f$ la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_a$ parallèlement à la droite $A+\mathbb{R}(2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(x,y)$ dans $\mathcal{R}_0$ et $(X,Y)$ dans $\mathcal{R}_a$, déterminer les coordonnées $(X',Y')$ puis $(x',y')$ de $f(M)$.

   Solution : On a $(X',Y') = (X,-Y)$ et donc
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-4y+4a \\ 6x-5y+6a \end{pmatrix}.$$

3. Soit $t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, et soit $g = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} \circ f$. Déterminer $a$ pour que $g(O)$ soit le point $I$ de coordonnées $(5,7)$ dans $\mathcal{R}_0$.

   Solution : D'après ce qui précède, les coordonnées $(x'',y'')$ de $g(M)$ sont
$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-4y+4a+1 \\ 6x-5y+6a+1 \end{pmatrix}.$$
   Donc, $g(O)$ est le point de coordonnées $(4a+1, 6a+1)$, ceci égale $(5,7)$ si et seulement si $a = 1$.

4. Vérifier votre résultat en calculant $g(I)$.

   Solution : Posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. On a :
$$g^2 = t_{\overrightarrow{w}} \circ f \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ f = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})} \circ f^2 = t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w})}$$
   puisque $f^2 = \mathrm{id}$. De plus, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$, donc $g^2 = t_{2\overrightarrow{w}}$. On doit donc trouver $g(I) = g^2(O) = O+2\overrightarrow{w}$. Vérifions ceci : appliquant la formule $(*)$, avec $a = 1$ et $x = 5$, $y = 7$, on trouve que $g(I)$ a pour coordonnées :
$$x'' = 25-28+5 = 2, \qquad y'' = 30-35+7 = 2,$$
   et l'on retrouve bien que $g(I) = O+2\overrightarrow{w} = (2,2)$.

**Exercice 3** (16 pts)**.** (cf. Feuille 5, exo 9)

1. Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+2y+5z)^2 \leq 30$ ; dans quel cas a-t-on $(x+2y+5z)^2 = 30$ ?

   Solution : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Notons
$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   alors $(u \mid v) = x+2y+5z$, $(v \mid v) = 1+4+25 = 30$, et $(u \mid u) = x^2+y^2+z^2 \leq 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$(x+2y+5z)^2 = (u \mid v)^2 \leq (v \mid v)(u \mid u) = 30(u \mid u) \leq 30$$
   (la seconde inégalité d'après l'hypothèse $(u \mid u) \leq 1$). Ceci prouve l'inégalité voulue. De plus, $(x+2y+5z)^2 = 30$ si et seulement si les deux inégalités ci-dessus sont des égalités. On sait que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont liés, i.e. s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Alors $(u \mid u) = \lambda^2(v \mid v) = 30\lambda^2$ égale 1 si et seulement si $\lambda = \pm 1/\sqrt{30}$. Donc finalement on a l'égalité $(x+2y+5z)^2 = 30$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leq 17/10$ ; dans quel cas a-t-on $(x+y+z)^2 = 17/10$ ?

   Solution : Donnons deux solutions. La 1ère : On munit cette fois $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\phi$ défini par

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = ax + 2by + 5cz.$$

   Prenons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ comme plus haut, et cette fois $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, alors

$$\phi(u,v) = x + y + z, \qquad \phi(v,v) = 1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{25} = \frac{17}{10}, \qquad \phi(u,u) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1.$$

   D'après Cauchy-Schwarz et l'hypothèse, on a donc :

$$(x+y+z)^2 = \phi(u,v)^2 \leq \phi(v,v)\phi(u,u) = \frac{17}{10}\,\phi(u,u) \leq \frac{17}{10}.$$

   Comme précédemment, on obtient que l'on a l'égalité si et seulement si $u = \mu v$ et $\phi(u,u) = \mu^2\phi(v,v) = \mu^2\dfrac{17}{10}$ égale 1, c.-à.-d., si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\dfrac{10}{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

   2ème solution : on munit encore $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel, et l'on considère les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}y \\ \sqrt{5}z \end{pmatrix} \qquad\qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

   choisis de sorte que $(u \mid u) = x^2+2y^2+5z^2$ et $(u \mid v) = x+y+z$. On a alors $(v \mid v) = 1+(1/2)+(1/5) = 17/10$, et l'on conclut comme précédemment.

**Exercice 4** (20pts)**.** (cf. Feuille 5, Exos 16,15,14 et Feuille 6, Exos 3,4,5) Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et $(x,y,z)$ les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z+2 \\ x \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de $f$.

   Solution : Si $M$ et $M'$ ont pour coordonnées $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$, alors $\overrightarrow{f(M)f(M')}$ est le vecteur :

$$\begin{pmatrix} (z'+2)-(z+2) \\ x'-x \\ (y'-1)-(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'-z \\ x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$$

   Ceci montre que $f$ est affine, et que sa partie linéaire est l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est

$$(*) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.

   Solution : On voit que les colonnes de $A$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, donc (puisque la base de départ $\mathcal{B}_0$ est orthonormée) $A \in O(3)$. On peut aussi montrer que $\overrightarrow{f}$ préserve la norme, comme suit :

$$\|\overrightarrow{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\| = \|\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}\| = \sqrt{z^2+x^2+y^2} = \|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\|$$

donc $\overrightarrow{f}$ est une isométrie, i.e. un élément de $O(3)$.
De plus, en développant par rapport à la 1ère ligne (par exemple), on voit que $\text{dét}(A) = 1$, donc $A$ (et $\overrightarrow{f}$) est une rotation (distincte de id). Déterminons son axe (orienté) et son angle. Comme $A$ permute les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, on voit que le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ vérifie $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$, donc l'axe de $\overrightarrow{f}$ est la droite $D = \mathbb{R}\overrightarrow{v}$. Notons $f_3$ le vecteur unitaire $f_3 = \overrightarrow{v}/\sqrt{3}$.
Pour déterminer l'angle de rotation $\theta$, on sait que si $(f_1, f_2)$ est une base orthonormée de $P$, la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(f_1, f_2, f_3)$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \, ]-\pi, \pi]$ n'est défini qu'au signe près (car si on remplace la base $(f_1, f_2, f_3)$ par $(f_2, f_1, f_3)$, on change $\theta$ en $-\theta$). Mais $\cos\theta$ (qui détermine $\theta$ au signe près) est bien déterminé par la matrice précédente : on a

$$\text{Tr}(\overrightarrow{f}) = \text{Tr}(A') = 1 + 2\cos\theta \qquad \text{d'où} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Tr}(\overrightarrow{f}) - 1}{2}.$$

En considérant la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\overrightarrow{f})$ donnée en $(*)$ plus haut, on voit que $\text{Tr}(\overrightarrow{f}) = \text{Tr}(A) = 0$, d'où $\cos\theta = -1/2$ et donc $\theta = \pm 2\pi/3$.

Pour fixer le signe de $\theta$, on munit $\mathbb{R}^3$ de l'orientation définie par la base $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et l'on choisit un vecteur directeur de l'axe, disons le vecteur unitaire $f_3$. Alors $\theta$ est donné, sans ambiguïté de signe, par la matrice $A'$ ci-dessus, lorsqu'on impose à la base orthonormée $(f_1, f_2, f_3)$ d'être **directe**, i.e. telle que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(f_1, f_2, f_3) > 0$. Calculons donc $\theta$, ayant orienté l'axe $D$ par le choix de $f_3$. Donnons deux méthodes.

La première est plus longue, mais permettra d'expliquer la deuxième. Le plan $P = (\mathbb{R}\overrightarrow{v})^\perp$ a pour équation $x + y + z = 0$, et une base (non-orthonormée) de $P$ est $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$. On la rend orthonormée en prenant

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}), \qquad f_2' = (\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) - (f_1 \mid \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})f_1 = (\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_1 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) - \overrightarrow{k}$$

alors $(f_2' \mid f_2') = 3/2$ et l'on prend $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k})$. Voyons si la base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est directe. Posons

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

alors $\text{dét}(Q)$ vaut $1/6$ fois le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

donc $\text{dét}(Q) = 1$ donc la base $\mathcal{B}$ est bien directe lorsqu'on munit $\mathbb{R}^3$ de l'orientation définie par la base canonique $\mathcal{B}_0$ (ici $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, qui correspond aux coordonnées $(x, y, z)$). Déterminons maintenant l'angle de la rotation. Comme $A\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$, $A\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$ et $A\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, on a :

$$Af_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_1$$

donc la restriction de $f$ au plan $P$ a pour matrice dans la base $(f_1, f_2)$ :

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(il n'est pas nécessaire de calculer $Af_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 2\overrightarrow{i}) = -\dfrac{1}{2}f_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_1$ puisqu'on sait que la matrice est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$).

Donc $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ et donc $\theta = 2\pi/3$. Il en résulte que $f$ est la rotation d'axe orienté par $f_3 = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})/\sqrt{3}$ et d'angle $+2\pi/3$.

<u>Deuxième méthode</u>. Soit $x$ un vecteur $\neq 0$ arbitraire dans $P$, posons $r = \|x\|$ et $g_1 = x/r$. Il existe dans $P$ deux vecteurs unitaires orthogonaux à $g_1$, et seul l'un d'eux, $g_2$, est tel que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3) = 1$. Alors $\overrightarrow{f}(g_1) = (\cos\theta)\, g_1 + (\sin\theta)\, g_2$ (cf. la 1ère solution), et comme $x = rg_1$ on a :

$$Q = \text{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{f}(x), f_3) = \begin{pmatrix} r & r\cos\theta & 0 \\ 0 & r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\text{dét}(Q) = r^2 \sin\theta$ est du signe de $\sin\theta$. Posons alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(x, u(x), f_3)$, on a

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3) \cdot \text{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{f}(x), f_3) = PQ,$$

où l'on a posé $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3)$. Or on a $\text{dét}(P) = 1$ et donc

$$\text{dét}(M) = \text{dét}(P)\,\text{dét}(Q) = r^2 \sin\theta \qquad \textbf{est du signe de } \sin\theta.$$

De plus, remarquons que si on remplace $x \neq 0$ dans $P$ par $x' = x + \lambda f_3$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraire, alors $\overrightarrow{r}(x') = \overrightarrow{x} + \lambda f_3$ et donc la matrice

$$\text{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est encore de déterminant $\rho^2 \sin\theta$. Donc : **pour tout** $x \in \mathbb{R}^3$ **n'appartenant pas à l'axe de rotation** $\mathbb{R}f_3$, $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3)$ **est du signe de** $\sin\theta$. **C'est le point à retenir** de la 2ème méthode ; ce qui précède est la justifiation de la méthode.

Appliquant ceci à $x = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, on trouve la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = 2\pi/3$, et l'on conclut comme dans la 1ère méthode que $f$ est la rotation d'axe orienté par $f_3 = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})/\sqrt{3}$ et d'angle $+2\pi/3$.

3. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{id})$, et calculer dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{If(I)}$. Quelle est la nature de $f$ ?

Solution : Pour $I$ de coordonnées $(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{If(I)} = \begin{pmatrix} z + 2 - x \\ x - y \\ y - 1 - z \end{pmatrix}$ et ce vecteur appartient à $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{id}) = \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \lambda = z - x + 2 \\ \lambda = x - y \\ \lambda = y - z - 1. \end{cases}$$

Faisant la somme des 3 égalités, on trouve $3\lambda = 1$ d'où $\lambda = 1/3$, puis :

$$x = y + \frac{1}{3}, \qquad z = y - \frac{4}{3}.$$

Donc l'ensemble en question est la droite affine $\mathcal{D}$ de direction $\mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ passant par le point $(1/3, 0, -4/3)$. Pour tout $I \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{If(I)}$ égale le vecteur $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})/3 = f_3/\sqrt{3}$. Il en résulte que $f$ est le vissage de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{u}$, et d'angle $2\pi/3$.

**Exercice 5** (24 pts). Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x, y)$ pour indiquer que $(x, y)$ sont les coordonnées de $M$ dans $\mathcal{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est **convexe** si elle vérifie : pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, le **segment**

$$[A, B] = \{tA + (1-t)B \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans $\mathcal{C}$. Si $A \neq B$, on notera $]A, B[$ le **segment ouvert**

$$]A, B[\, = \{tA + (1-t)B \mid t \in \,]0, 1[\,\} = [A, B] - \{A, B\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est convexe, on dit qu'un point $P \in \mathcal{C}$ est un **point extrémal** s'il vérifie : pour tous $A \neq B$ dans $\mathcal{C}$, $P \notin \,]A, B[$.

1. Soit $C = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1\}$. Montrer que $C$ est convexe.
2. Faire un dessin représentant $C$. Déterminer les points extrémaux de $C$.

Solution : $C$ est bien sûr le carré de sommets les quatre points $(\pm 1, \pm 1)$. « On voit bien » que $C$ est convexe, et que ses points extrémaux sont les quatre sommets. Démontrons ceci.

Soient $A(a, b)$ et $B(p, q)$ deux points distincts de $C$, soit $t \in [0, 1]$ et soit $P = tA + (1-t)B$. Comme $-1 \leq a, b, p, q \leq 1$, en multipliant par $t$ ou $1 - t$ (qui sont $\geq 0$) on obtient

$$\begin{array}{lllll} -t \leq ta \leq t & \text{et} & -(1-t) \leq (1-t)p \leq (1-t) & \text{d'où} & -1 \leq x_P = ta + (1-t)p \leq 1 \\ -t \leq tb \leq t & \text{et} & -(1-t) \leq (1-t)q \leq (1-t) & \text{d'où} & -1 \leq y_P = tb + (1-t)q \leq 1\,. \end{array}$$

Ceci montre que $C$ est convexe. Supposons de plus $t \in \,]0, 1[$. Alors, si $P$ appartient au côté $x = 1$ du carré, i.e. si $x_P = ta + (1-t)p = 1$, alors les inégalités $ta \leq t$ et $(1-t)p \leq (1-t)$ sont des égalités, et comme $t$ et $1 - t$ sont $> 0$, ceci entraîne que $a = 1 = p$, i.e. les points $A$ et $B$ sont aussi sur le côté $x = 1$ de $C$. Le même argument s'applique à chacun des côtés et l'on obtient donc : **si** $P \in \,]A, B[$ **appartient à un côté du carré, alors** $A, B$ **appartiennent à ce même côté**.

Ceci entraîne que : **les sommets du carré sont des points extrémaux**. En effet, soit $S$ un sommet, et supposons que $S \in \,]A, B[$, où $A, B$ sont deux points distincts de $C$. D'après ce qui précède, $A$ et $B$ appartiennent aux deux côtés qui contiennent $S$, or ces deux côtés ne se rencontrent qu'en $S$, donc on aurait $A = S = B$, contrairement à l'hypothèse $A \neq B$.

Réciproquement, il est clair que tout point $P$ de $C$ qui n'est pas un sommet, n'est pas extrémal : si $P$ est sur un côté (mais pas un sommet), il appartient au segment ouvert défini par ce côté ; si $P$ est à l'intérieur du carré, soient $H, K$ ses projections orthogonales sur deux côtés opposés, alors $P \in \,]H, K[$.

3. Soit $\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y^2 \leq 2x\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Faire un dessin représentant $\mathcal{C}$.
4. Soient $A(a, b)$ et $B(p, q)$ deux points distincts de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout $P(x, y) \in \,]A, B[$, on a $y^2 < 2x$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$ ?

Solution : L'ensemble $\mathcal{F} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid y^2 = 2x\}$ est une parabole, d'axe $Ox$ et de sommet $O$, et $\mathcal{C}$ est « l'intérieur » de la parabole. Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points de $\mathcal{C}$, il s'agit de montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$(1) \qquad \big(ty_1 + (1-t)y_2\big)^2 \leq 2tx_1 + 2(1-t)x_2.$$

Par hypothèse $y_1^2 \leq 2x_1$ et $y_2^2 \leq 2x_2$, d'où

$$(2) \qquad ty_1^2 + (1-t)y_2^2 \leq 2tx_1 + 2(1-t)x_2.$$

donc il suffit de montrer que :

$$(3) \qquad \big(ty_1 + (1-t)y_2\big)^2 \leq ty_1^2 + (1-t)y_2^2.$$

Or ceci équivaut à

$$(4) \qquad 0 \leq t(1-t)y_1^2 + (1-t)(1-(1-t))y_2^2 - 2t(1-t)y_1y_2 = t(1-t)(y_1 - y_2)^2,$$

qui est bien vérifié. Ceci montre que $\mathcal{C}$ est convexe. Supposons de plus $t \in \,]0, 1[$. Alors l'inégalité (4) (et donc aussi (3)) est stricte si $y_1 \neq y_2$, et l'inégalité (2) est stricte sauf si $2x_1 = y_1^2$ et $2x_2 = y_2^2$. Donc, pour $t \in \,]0, 1[$, l'inégalité (1) est toujours stricte sauf si $M_1 = M_2$ appartient à la parabole $\mathcal{F}$. Ceci montre que les points de $\mathcal{F}$ sont des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Réciproquement, si $P(x_0, y_0)$ est un point de $\mathcal{C}$ qui n'est pas sur la parabole, on a $y_0^2 < 2x_0$, i.e. $|y_0| < \sqrt{2x_0}$ et la droite verticale $x = x_0$ rencontre $\mathcal{F}$ en deux points $H, K$, d'ordonnée $\pm\sqrt{2x_0}$, et $P$ appartient au segment $]H, K[$. Ceci montre que les points de $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ ne sont pas extrémaux. Donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$ est la parabole $\mathcal{F}$.