Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Corrigé du TE4a Groupes 1,2,3 (19/5/2011)

D'abord, un **ERRATUM IMPORTANT** au Chap. 5 du polycopié. Page 110, dans le Lemme 5.3.17, le coefficient en bas à droite de la matrice M est 1 (et non -1) ; par conséquent, la conclusion de 5.3.17 est que le déterminant $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est du **même signe** que $\sin(\theta)$ (et non du signe opposé...). Et dans le Théorème 5.3.18, point (2), ligne 4, remplacer également « de signe opposé » par : « **de même signe** ».

Exercice 1 (11 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, e_1, e_2, e_3)$, où O désigne le point $(0,0,0)$. Soit f la symétrie orthogonale glissée par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + z = 2$, de vecteur de glissement $u = e_1 - e_3$.

1. (2 pts) Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.

Solution : D'après la définition d'une symétrie orthogonale glissée, la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f est la symétrie orthogonale s par rapport au plan vectoriel P d'équation $x + 2y + z = 0$. Notons que $P^\perp = \mathbb{R}v$, où $v = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

2. (1 pt) Déterminer un point $I \in \mathcal{P}$.

Solution : Le point $I = (0,1,0)$ appartient à $\mathcal{P}$, ainsi que le point $J = (1,0,1)$ (par exemple).

3. (2 pts) Si v est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et si s désigne la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $(\mathbb{R}v)^\perp$, rappeler la formule exprimant $s(w)$ en fonction de w et v, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$.

Solution : On a $s(w) = w - 2\dfrac{(w \mid v)}{(v \mid v)}v$.

4. (6 pts) Soit g la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. Pour tout point $M = (x,y,z)$ de $\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{Ig(M)}$ puis le vecteur $\overrightarrow{If(M)}$ en fonction de (x,y,z), puis donner les coordonnées $(x', y,', z')$ du point $M' = f(M)$.

Solution : D'abord, on a $f(M) = g(M) + \overrightarrow{u}$. Puis, comme $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ et $g(I) = I$, on a

$$\overrightarrow{Ig(M)} = \overrightarrow{g(I)g(M)} = s(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM} - 2\frac{(\overrightarrow{IM} \mid v)}{(v \mid v)}v.$$

Comme $\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, d'où $\dfrac{2}{(v \mid v)}v = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, on obtient

$$\overrightarrow{Ig(M)} = \begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix} - \frac{x + 2(y-1) + z}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x - 2y - z + 2\\-2x - y - 2z + 1\\-x - 2y + 2z + 2\end{pmatrix}.$$

Puis $\overrightarrow{If(M)} = u + \overrightarrow{Ig(M)} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2x - 2y - z + 2\\-2x - y - 2z + 1\\-x - 2y + 2z + 2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2x - 2y - z + 5\\-2x - y - 2z + 1\\-x - 2y + 2z - 1\end{pmatrix}$. Enfin

$$\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{If(M)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x - 2y - z + 5\\-2x - y - 2z + 1\\-x - 2y + 2z - 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x - 2y - z + 5\\-2x - y - 2z + 4\\-x - 2y + 2z - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (12 pts)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien, muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Soit e un réel ≥ 0 ; on considère l'ensemble $\mathcal{C}_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (1-e)x^2 - 2x = 0\}$.

1. (1,5 pt) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_e$ lorsque $e = 0$?

Solution : Pour $e = 0$, on a $y^2 + x^2 - 2x = y^2 + (x-1)^2 - 1$, d'où l'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$, donc $\mathcal{C}_0$ est le cercle de rayon 1 et de centre le point $I_0 = (1,0)$.

2. (7,5 pts) Désormais, on suppose $e > 0$. Donner la forme normale de l'équation de $\mathcal{C}_e$ et déterminer en fonction de e la nature de la conique $\mathcal{C}_e$. Lorsque $\mathcal{C}_e$ est une ellipse, déterminer les coordonnées de son centre de symétrie I_e et de ses deux foyers F_e et F'_e.

Solution : On suppose $e > 0$. Pour $e = 1$, on a l'équation $y^2 = 2x$, donc $\mathcal{C}_1$ est une parabole d'axe Ox et de paramètre $p = 1$; son sommet est le point O et elle passe par les deux points $(\frac{1}{2}, \pm 1)$.

Pour $e \neq 1$, on a $(1-e)x^2 - 2x = (1-e)\big(x - \frac{1}{1-e}\big)^2 - \frac{1}{1-e}$ et donc l'équation s'écrit

$$(1-e)^2X^2 + (1-e)y^2 = 1,$$

où l'on a posé $X = x - \frac{1}{1-e}$. Donc on voit que $\mathcal{C}_e$ est une ellipse pour $0 < e < 1$, et une hyperbole pour $e > 1$. Dans les deux cas, les droites $y = 0$ et $X = 0$ (i.e. $x = \frac{1}{1-e}$) sont des axes de symétrie de $\mathcal{C}_e$, et le centre de symétrie de $\mathcal{C}_e$ est l'intersection de ces deux droites, i.e. le point $I_e = (\frac{1}{1-e}, 0)$.

Supposons que $0 < e < 1$ et posons $a = \frac{1}{1-e}$ et $b = \sqrt{a}$, alors l'équation s'écrit

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $1 < b < a$, donc le grand axe est Ox et l'on a vu en cours que les foyers sont les points de Ox à distance c de I_e, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ici, $a^2 - b^2 = a^2 - a = a(a-1)$ égale $\frac{e}{(1-e)^2}$, d'où $c = \frac{\sqrt{e}}{1-e}$ et les foyers F_e et F'_e ont pour coordonnés $(\frac{1 \pm \sqrt{e}}{1-e}, 0)$.

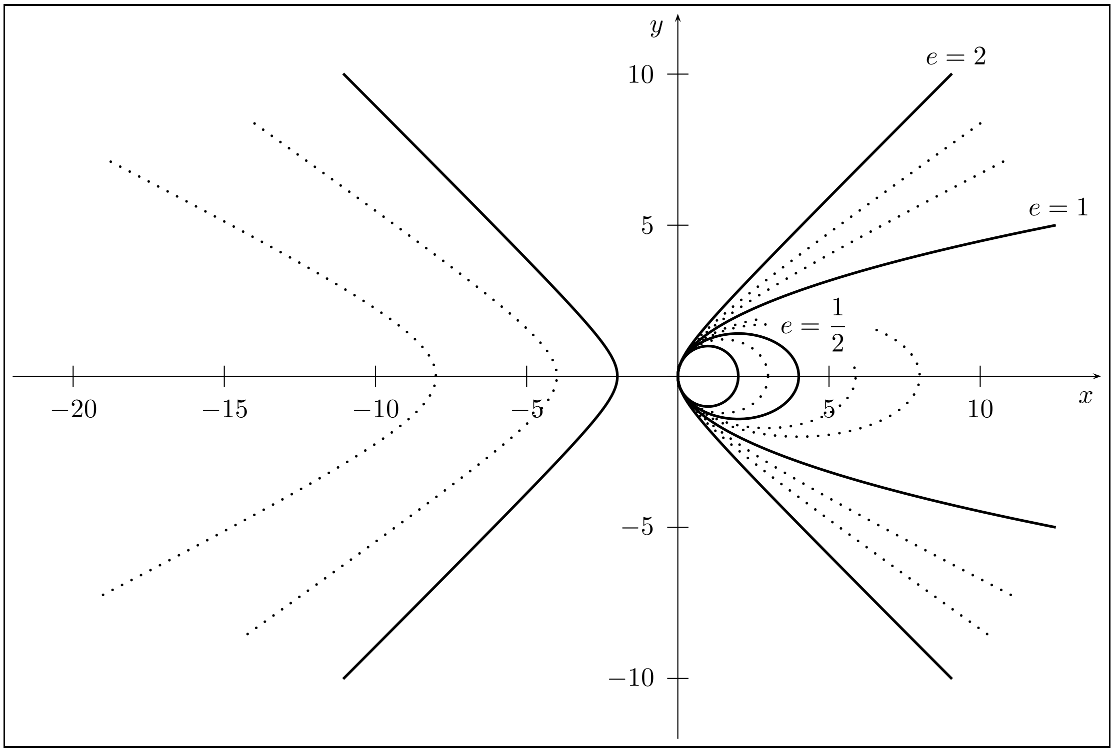
Pour $e > 1$, posons $a = \frac{1}{e-1}$ et $b = \sqrt{a}$, alors l'équation s'écrit

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donc on obtient une hyperbole de grand axe Ox, de centre $I_e = (-a, 0)$, d'asymptotes $y = \frac{\pm b}{a}(x+a) = \frac{\pm 1}{\sqrt{a}}(x+a)$, et dont un sommet est le point O ; le second sommet étant le symétrique de O par rapport à I_e, i.e. le point $(-2a, 0)$.

3. (3 pts) Pour $e = \frac{1}{2}, 1, 2$, faire un dessin représentant $\mathcal{C}_e$.

   Solution : On a ainsi obtenu une famille de coniques de sommet O : d'abord le cercle $\mathcal{C}_0$, puis des ellipses (tangentes à $\mathcal{C}_0$ au point O) qui « grossissent » jusqu'à devenir la parabole $\mathcal{C}_1$ (toujours tangente à $\mathcal{C}_0$ en O), puis des hyperboles d'abord « très aplaties » (avec un centre très loin de O) lorsque e est proche de 1, et qui se « redressent » (avec un centre qui tend vers O) lorsque $e \to +\infty$ (posant $e = 1 + \varepsilon$, les asymptotes $y = \pm\sqrt{\varepsilon}\,x$ tendent vers l'horizontale quand $\varepsilon \to 0_+$, et vers la verticale quand $\varepsilon \to +\infty$). Pour $e = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$, on obtient la figure suivante :



Exercice 3 (10 pts)**.** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (1,5 pts) Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.

Solution : A est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. (6,5 pts) Déterminer les valeurs propres de A (pour calculer $P_A(X)$, on pourra faire des opérations sur les colonnes pour faire apparaître au moins un zéro), puis une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Solution : $P_A(X) = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} -7-3X & 4 & -4 \\ 4 & 5-3X & -2 \\ -4 & -2 & 5-3X \end{vmatrix}$. Remplaçant C_3 par $C_3 + C_2$, on obtient

$$P_A(X) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -7-3X & 4 & 0 \\ 4 & 5-3X & 3(1-X) \\ -4 & -2 & 3(1-X) \end{vmatrix} = \frac{1-X}{9}\begin{vmatrix} -7-3X & 4 & 0 \\ 4 & 5-3X & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis remplaçant C_2 par $C_2 + 2C_3$ et C_1 par $C_1 + 4C_3$, on obtient

$$P_A(X) = \frac{1-X}{9}\begin{vmatrix} -7-3X & 4 & 0 \\ 8 & 7-3X & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-X}{9}(9X^2 - 81) = (1-X)(X^2-9)$$

donc les valeurs propres sont $1, 3$ et -3. De plus, il résulte du calcul précédent que $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1 (puisque $C_2 + C_3$ s'annule pour $X = 1$). Considérons $A - 3I_3$; pour simplifier les calculs, on peut remplacer $A - 3I_3$ par $3(A - 3I_3)$, qui a même noyau. Faisons des opérations sur les colonnes :

$$\left(\begin{array}{ccc} -16 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \to C_2 - 2C_3]{C_1 \to C_1 + 2C_3} \left(\begin{array}{ccc} -24 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -12 & 6 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 + 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, on sait que le dernier espace propre V_{-3} est engendré par un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à v_1 et à v_2, d'où $z = -y$ et $0 = x + 2y - 2z = x + 4y$, donc $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre V_{-3}. Pour vérifier, calculons

$$Av_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -36 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = -3v_3.$$

En divisant chaque vecteur par sa norme, on obtient les vecteurs

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui forment une base orthonormée de vecteurs propres.

3. (2 pts) En déduire la signature de la forme quadratique $Q(x, y, z) = -7x^2 + 8xy - 8xz + 5y^2 - 4yz + 5z^2$.

Solution : Soit ϕ la forme polaire de Q et soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = 3A$. Posons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Alors $P \in O(3)$ et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi) = 3({}^tPAP) = 3(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

et donc la signature de q est $(2, 1)$. On pouvait aussi citer directement le théorème de diagonalisation simultanée, pour dire que la signature (p, q) de Q est donnée par : p (resp. q) égale le nombre de valeurs propres de $3A$ qui sont > 0 (resp. < 0).

Exercice 4 (18 pts)**.** On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, pour lequel la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormée. Soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

1. (3 pts) Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire et bijective.

Solution : D'abord, il résulte de la bilinéarité de $(\ |\ )$ que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire. Son noyau est

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \phi_x = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in E, \quad (x \mid y) = 0\}$$

qui est le noyau de $(\ |\ )$. Or ce noyau est nul, puisque $(x \mid x) = 0$ entraîne $x = 0$. Ceci montre que θ est injective. Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, il résulte du théorème du rang que θ est aussi surjective, donc bijective.

2. (2 pts) Pour tout $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w)$ pour tout $w \in E$.

Solution : u, v étant fixés, l'application $\gamma_{u,v} : E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$ est linéaire, i.e. est un élément de E^*. Donc, d'après la question précédente, il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\gamma_{u,v} = \phi_{f(u,v)}$, i.e. tel que

$$\forall w \in E, \qquad \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w).$$

3. (3 pts) Montrer que l'application $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est bilinéaire, et qu'elle est alternée (i.e. $f(u, u) = 0$ pour tout $u \in E$).

Solution : Soient $u, u', v, v' \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $w \in E$, on a

$$\begin{aligned}(tf(u, v) + f(u', v) \mid w) = t(f(u, v), w) + (f(u', v) \mid w) &= t\,\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) + \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u', v, w) \\ &= \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(tu + u', v, w) = (f(tu + u', v) \mid w).\end{aligned}$$

Comme $(\ |\ )$ est non dégénéré (i.e. de noyau nul), ceci entraîne $tf(u, v) + f(u', v) = f(tu + u', v)$. On montre de même que $f(u, tv + v') = tf(u, v) + f(u, v')$. Donc l'application $f : E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ est bilinéaire. De plus, pour tout $u \in E$, on a $0 = \mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, u, f(u, u)) = (f(u, u) \mid f(u, u))$, d'où $f(u, u) = 0$, i.e. f est alternée.

4. (2 pts) Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et prenant $w = e_1$, puis $w = e_2$ et $w = e_3$, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) dans $\mathcal{B}_0$ de $f(u, v)$.

Solution : On a $f_1 = (f(u,v) \mid e_1) = \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, e_1) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2$. On montre de même que $f_2 = (f(u,v) \mid e_2) = u_3v_1 - u_1v_3$ et $f_3 = (f(u,v) \mid e_3) = u_1v_2 - u_2v_1$. Ceci montre que $f(u,v)$ n'est autre que le produit vectoriel $u \wedge v$.

5. (2 pts) Soient $u, v, w \in E$. Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, montrer que $\text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w)$.

Solution : Soit $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = v$ et $g(e_3) = w$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(g) = P \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$$

d'où $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = \text{dét}(P) \cdot \text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$. Or par hypothèse $P \in \text{SO}(3)$, d'où $\text{dét}(P) = 1$ et donc $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(u, v, w) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$.

6. (3 pts) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et soit $p \in E$ l'unique vecteur tel que $\mathcal{B} = (u, v, p)$ soit une base orthonormée directe de E. En utilisant la question précédente montrer que, pour tout $w \in E$, on a $(f(u, v) \mid w) = (p \mid w)$. Que peut-on en conclure ?

Solution : Tout $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = au + bv + cp$, avec $c = (p \mid w)$ (et de même $a = (u \mid w)$, etc.) donc

$$(f(u,v) \mid w) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & (p \mid w) \end{vmatrix} = (p \mid w).$$

Comme $(\ \mid\ )$ est non-dégénéré (car défini positif), il en résulte que $p = f(u,v)$. Donc : *étant donnés deux vecteurs unitaires orthogonaux u, v, le produit vectoriel $u \wedge v$ est l'unique p tel que (u, v, p) soit une base orthonormée directe.* Et donc si $\mathcal{B}' = (u, v, p')$ est une base orthonormée, on a les équivalences :

$$\mathcal{B}' \text{ directe} \iff p' = p, \qquad \mathcal{B}' \text{ indirecte} \iff p' = -p,$$

7. (3 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \in O(3)$. On suppose que $t_3 \neq 0$. Déduire des questions 4. et 6. que $u_1v_2 - u_2v_1 = \pm t_3$ et que $A \in SO(3)$ si et seulement si $u_1v_2 - u_2v_1 = t_3$.

Solution : D'après la question précédente (et la question 4.), on sait que $u \wedge v = \pm t$ et qu'on a l'équivalence

$$A \in \text{SO}(3) \iff u \wedge v = t.$$

De plus, puisque $u \wedge v = \pm t$ et que $t_3 \neq 0$, on a $t = u \wedge v$ si et seulement si $u_1v_2 - u_2v_1 = t_3$.

Exercice 5 (9 pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (1 pt) Exprimez $q(x_1, \dots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \dots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : D'après la formule $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$, on a $q(x_1, \dots, x_5) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{3}{4}x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + x_4x_5$.

2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Solution : En regroupant x_1^2 et les termes contenant x_1 on obtient :

$$\begin{aligned} q(x_1,\dots,x_5) &= (x_1+x_2+x_4)^2 - x_2^2 - x_4^2 - 2x_2x_4 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{3}{4}x_4^2 - 2x_2x_3 + x_4x_5 \\ &= X_1^2 \underbrace{-2x_2^2 - 2x_2x_4 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - 2x_2x_3 + x_4x_5}_{q_2(x_2,x_3,x_4,x_5)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $X_1 = x_1 + x_2 + x_4$. Puis

$$\begin{aligned} q_2(x_2,x_3,x_4,x_5) &= -2\big(x_2 + \frac{1}{2}(x_3+x_4)\big)^2 + \frac{1}{2}(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + x_4x_5 \\ &= -2X_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + \frac{1}{4}x_4^2 + x_4x_5 \\ &= -2X_2^2 + X_3^2 + x_4x_5, \end{aligned}$$

où l'on a posé $X_2 = x_2 + \dfrac{1}{2}(x_3+x_4)$ et $X_3 = x_3 + \dfrac{1}{2}x_4$. Enfin, faisant le changement de variable

$$\begin{cases} X_4 = \dfrac{x_4+x_5}{2} \\ X_5 = \dfrac{x_4-x_5}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x_4 = X_4 + X_5 \\ x_5 = X_4 - X_5 \end{cases}$$

on obtient

$$q(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) = X_1^2 - 2X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - X_5^2.$$

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(3,2)$ et l'on a $\mathrm{rang}(q) = 3+2 = 5$.