Université Pierre et Marie Curie 2009–2010
LM270, Corrigé du devoir 4b du 19 mai 2010 (groupes 2,3,10)

Exercice 1 (20 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Pour chaque matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminez une base orthonormée de vecteurs propres, ou bien montrez qu'il n'en existe pas :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : La matrice B est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc son polynôme caractéristique est $P_B(X) = (1-X)^3$: la seule valeur propre est 1. Si B était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice diagonale de termes diagonaux $(1,1,1)$, i.e. à la matrice identité, et donc B serait la matrice identité, ce qui n'est pas le cas. Donc B n'est pas diagonalisable. De plus, on peut vérifier que $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ est de dimension 1 (ce qui montre aussi que B n'est pas diagonalisable).

La matrice A est symétrique réelle, donc définit un endomorphisme auto-adjoint u de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, donc on sait que A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminons les valeurs propres et vecteurs propres de A. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On remarque d'abord que dans chaque ligne la somme des coefficients vaut 6, d'où $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $v_1' = e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 6$, et est de norme $\sqrt{3}$, donc on prendra $v_1 = v_1'/\sqrt{3}$.

Considérons le plan $P = \mathbb{R}(v_1')^\perp$, d'équation $x + y + z = 0$. Une base (non orthonormée) de P est $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)$. On a

$$A(e_1 - e_2) = 2e_1 - 9e_2 + 7e_3 = 2(e_1 - e_2) - 7(e_2 - e_3),$$
$$A(e_2 - e_3) = -e_1 + 15e_2 - 14e_3 = -(e_1 - e_2) + 14(e_2 - e_3)$$

donc la restriction à P de A à pour matrice dans la base $\mathcal{B}$: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 16X + 21$, son discriminant réduit est $8^2 - 21 = 43$, et ses racines

$$\lambda_+ = 8 + \sqrt{43}, \qquad \lambda_- = 8 - \sqrt{43}.$$

Déterminons un vecteur propre associé à $\lambda_\pm$: on doit résoudre le système de rang 1

$$\begin{cases} (2 - \lambda_\pm)x - y = 0 \\ -7x + (14 - \lambda_\pm)y = 0 \end{cases}$$

qui donne $y = (2 - \lambda_\pm)x$. Donc un vecteur propre pour $\lambda_\pm$ est

$$v_\pm' = 1 \cdot (e_1 - e_2) + (2 - \lambda_\pm)(e_2 - e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \lambda_\pm \\ \lambda_\pm - 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$v_+' = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 - \sqrt{43} \\ 6 + \sqrt{43} \end{pmatrix} \qquad v_-' = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 + \sqrt{43} \\ 6 - \sqrt{43} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints, on sait que les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux, donc les vecteurs propres v_1', v_+', v_-' doivent être deux-à-deux orthogonaux ; on vérifie que l'on a bien $(v_1 \mid v_\pm') = 1 + 6 - 7 + \sqrt{43} - \sqrt{43} = 0$, et $(v_+' \mid v_-') = 1 + 49 - 43 + 36 - 43 = 86 - 86 = 0$.

Enfin, remplaçons $v_\pm'$ par le vecteur unitaire $v_\pm = v_\pm'/\|v_\pm'\|$. Calculons le carré de la norme de v_+' et v_-' :

$$\|v_+'\|^2 = 1 + 49 + 43 + 14\sqrt{43} + 36 + 43 + 12\sqrt{43} = 176 + 26\sqrt{43}$$
$$\|v_-'\|^2 = 1 + 49 + 43 - 14\sqrt{43} + 36 + 43 - 12\sqrt{43} = 176 - 26\sqrt{43}$$

donc finalement on trouve la base orthonormée de vecteurs propres :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad v_+ = \frac{1}{\sqrt{176+26\sqrt{43}}}\begin{pmatrix}1\\-7-\sqrt{43}\\6+\sqrt{43}\end{pmatrix} \qquad v_- = \frac{1}{\sqrt{176-26\sqrt{43}}}\begin{pmatrix}1\\-7+\sqrt{43}\\6-\sqrt{43}\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (20 pts)**.** (cf. Feuille 6, exos 2,3,4) Soient $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et (x, y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_0$. Soient A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathcal{R}_1$ le repère $(A, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$, et (X, Y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$.

1. Exprimer (x, y) en fonction de (X, Y), et (X, Y) en fonction de (x, y).

   Solution : Notons $\mathcal{B}_0$ la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$. La matrice de passage est $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, on a donc

   $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X+Y+1\\X-Y\end{pmatrix}.$$

   D'autre part, on a $\text{dét}(P) = -2$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & -1/2\end{pmatrix}$, d'où

   $$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y-1\\x-y-1\end{pmatrix}.$$

2. Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}_1$ d'équation $x - y = 1$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ et (X, Y) dans $\mathcal{R}_1$, déterminer les coordonnées (X', Y') puis (x', y') de $M' = \sigma(M)$.

   Solution : Notons que $\mathcal{D}_1$ contient A et a pour direction la droite vectorielle D d'équation $x - y = 0$, i.e. $D = \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, donc $\mathcal{D}_1 = A + \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, et $D^\perp = \mathbb{R}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$. Donc, si

   $$\overrightarrow{AM} = X(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + Y(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \qquad \text{alors} \qquad \overrightarrow{AM'} = X(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) - Y(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$$

   et donc $(X', Y') = (X, -Y)$. Puis

   $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+1\\x-1\end{pmatrix}.$$

3. Soit $t_{\overrightarrow{w}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et soit $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ \sigma$. Déterminer l'ensemble des points $I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.

   Solution : Notons (x'', y'') les coordonnées de $M'' = f(M) = t_{\overrightarrow{w}}(M')$, on a $(x'', y'') = (y + 4, x)$. Donc, pour $I \in \mathcal{P}$ arbitraire, de coordonnées (x, y), on a $\overrightarrow{If(I)} = \begin{pmatrix}y-x+4\\x-y\end{pmatrix}$, et ce vecteur appartient à $\mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ si et seulement si $x - y = y - x + 4$, i.e. $2(x - y) = 4$ soit $x - y = 2$. Donc l'ensemble cherché est la droite affine $\mathcal{D}_2$ d'équation $x - y = 2$; elle passe par le point $B = (2, 0)$ et égale $B + \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. De plus, d'après le calcul précédent, on a :

   $$\forall I \in \mathcal{D}, \qquad \overrightarrow{If(I)} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}).$$

4. Montrer que f est une symétrie orthogonale glissée, dont on déterminera l'axe $\mathcal{D}$ et le vecteur de translation $\overrightarrow{u}$.

   Solution : Comme la partie linéaire d'une translation est l'identité, la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f est la même que celle de σ, c.-à.-d., c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $D = \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. Donc f est une symétrie orthogonale ou bien une symétrie orthogonale glissée ; dans les deux cas, l'axe $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points I tels que $\overrightarrow{If(I)} \in \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, et le vecteur de translation (éventuellement nul) est le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{If(I)}$ (qui ne dépend pas de $I \in \mathcal{D}$). Donc, d'après la question précédente, f est la symétrie orthogonale glissée d'axe la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $x - y = 2$, et de vecteur de translation $\overrightarrow{u} = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.

Exercice 3 (16 pts)**.** (cf. Feuille 4, Exos 4,5 et Feuille 5, Exo 9) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz$.

1. Montrer que Q est définie positive.
2. Calculer $Q(1,1,1)$.

Solution : Réduisons Q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes. On a :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz = (x-y-z)^2 - 2yz + y^2 + 2z^2 = (x-y-z)^2 + (y-z)^2 + z^2$$

donc $Q(x,y,z) \geq 0$, et si $Q(x,y,z) = 0$ alors $z = 0$, $y = z = 0$ et $x = y + z = 0$. Ceci montre que Q est définie positive. On a $Q(1,1,1) = 1+2+3-2-2 = 6-4 = 2$.

3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $Q(x,y,z) \leq 1$. Montrer que $(-x+y+2z)^2 \leq 2$; dans quel cas a-t-on $(-x+y+2z)^2 = 2$?

Solution : Notons ϕ la forme polaire de Q, i.e. l'unique forme bilinéaire symétrique telle que $\phi(u,u) = Q(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' + 2yy' + 3zz' - (xy' + yx') - (xz' + zx')$$

et ϕ est un **produit scalaire** puisque Q est définie positive. Donc ϕ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \qquad \phi(u,v)^2 \leq \phi(u,u)\phi(v,v) = Q(u)Q(v)$$

avec égalité si et seulement si u et v sont liés.

Prenons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\phi(v,v) = Q(v) = 2$ et

$$\phi(u,v) = x + 2y + 3z - (x+y) - (x+z) = -x + y + 2z\,.$$

D'après Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $Q(x,y,z) \leq 1$, on a donc :

$$(-x+y+2z)^2 = \phi(u,v)^2 \leq Q(v)Q(u) = 2Q(u) \leq 2\,.$$

De plus, $(-x+y+2z)^2 = 2$ si et seulement si les deux inégalités ci-dessus sont des égalités. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont liés, i.e. s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Alors $Q(u) = \lambda^2 Q(v) = 2\lambda^2$ égale 1 si et seulement si $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. Donc finalement, pour $Q(x,y,z) \leq 1$, on a l'égalité $(-x+y+2z)^2 = 2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (20pts)**.** (cf. Feuille 5, Exos 14,15,16 et Feuille 6, Exos 3,4,5) Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et (x,y,z) les coordonnées dans $\mathcal{R}$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.

Solution : Notons A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ ci-dessus. Si M a pour coordonnées (x,y,z), alors $\overrightarrow{f(O)f(M)}$ est le vecteur :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ceci montre que f est affine, et que sa partie linéaire est l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est A .

2. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.

Solution : On voit que pour chaque colonne de A, le carré de la norme égale $(1/9)(1+4+4) = 1$. Vérifions que les colonnes sont deux à deux orthogonales, on a :

$$(C_1 \mid C_2) = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0 = (C_1 \mid C_3) = (C_2 \mid C_3).$$

Ceci montre que $A \in O(3)$. Pour déterminer sa nature, on va calculer son déterminant : si c'est 1, on saura que f est une rotation, si c'est -1, on saura que f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P, ou bien la composée commutative d'une telle symétrie et d'une rotation d'axe la droite $P^\perp$. Dans ce qui suit, on notera (e_1, e_2, e_3) au lieu de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base $\mathcal{B}_0$.

Avant de se lancer dans le calcul de $\text{dét}(A)$, remarquons qu'il y a trois coefficients égaux à $1/3$, tous les autres étant $-2/3$; on se dit que le calcul sera peut-être plus simple (plus symétrique) si ces coefficients étaient sur la diagonale, c.-à.-d., si on permutait les lignes de A en envoyant L_1 à la 3ème place, et en remontant les deux autres lignes, ce qui revient à multiplier à gauche A par la matrice de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ qui envoie e_1 sur e_3, e_2 sur e_1, et e_3 sur e_2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = S.$$

Remarquons que la matrice B ci-dessus appartient à $O(3)$, puisque ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. Donc $S = BA$ appartient encore à $O(3)$. De plus, on calcule facilement que $\text{dét}(B) = 1$, donc $\text{dét}(A) = \text{dét}(S)$. Remarquons maintenant que

$$S - I_3 = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 : les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_2 - e_3$ appartiennent à $\text{Ker}(S - I_3)$, i.e. à l'espace fixe de S. Donc S est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle l'espace des points fixes est de dimension ≥ 2. D'après la classification des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ (cf. le cours), ceci entraîne $S = \text{id}$ ou bien S est une symétrie orthogonale. Comme $S \neq \text{id}$, on en conclut que S est la symétrie orthogonale σ_P par rapport au plan $P = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$; en particulier $\text{dét}(S) = -1 = \text{dét}(A)$.

Reste à déterminer ce qu'est $A = B^{-1}S$. On a vu plus haut que $B \in O(3)$ et $\text{dét}(B) = 1$, donc B est une rotation $\neq \text{id}$, de même que B^{-1}. Comme l'on a $Be_1 = e_3$, $Be_2 = e_1$, et $Be_3 = e_2$, alors $B^{-1}e_3 = e_1$, $B^{-1}e_1 = e_2$ et $B^{-1}e_2 = e_3$, i.e. $C = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, C permute entre eux les vecteurs e_1, e_2, e_3, et donc le vecteur $f_3' = e_1 + e_2 + e_3$ vérifie $Cf_3' = f_3'$. Donc C est une rotation d'axe $\mathbb{R}f_3' = \mathbb{R}f_3$, où f_3 est le vecteur unitaire $f_3'/\sqrt{3}$. De plus, comme $\mathbb{R}f_3' = P^\perp$, on voit que C et S commutent :

$$CS(f_3') = -f_3' = SC(f_3') \qquad \text{et} \qquad \forall x \in P, \quad CS(x) = C(x) = SC(x)$$

donc $A = CS = SC$ est une « rotation gauche » d'axe $\mathbb{R}f_3'$ et d'angle θ (= une « symétrie orthogonale tournée » par rapport au plan P, d'angle θ), pour un angle θ que nous allons déterminer.

Notons $\overrightarrow{r}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par C. Pour déterminer l'angle de rotation θ, on sait que si (f_1, f_2) est une base orthonormée de P, la matrice de $\overrightarrow{r}$ dans la base (f_1, f_2, f_3) est de la forme

$$C' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\theta \in\,]-\pi, \pi]$ n'est défini qu'au signe près (car si on remplace la base (f_1, f_2, f_3) par (f_2, f_1, f_3), on change θ en $-\theta$). Mais $\cos\theta$ (qui détermine θ au signe près) est bien déterminé par la matrice précédente : on a $0 = \text{Tr}(C) = \text{Tr}(C') = 1 + 2\cos\theta$ d'où $\cos\theta = -1/2$ et donc $\theta = \pm 2\pi/3$.

Pour fixer le signe de θ, on munit $\mathbb{R}^3$ de l'orientation définie par la base $\mathcal{B}_0$ et l'on choisit un vecteur directeur de l'axe, disons le vecteur unitaire f_3. Alors θ est donné, sans ambiguïté de signe, par la matrice C' ci-dessus, lorsqu'on impose à la base orthonormée (f_1, f_2, f_3) d'être **directe**, i.e. telle que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(f_1, f_2, f_3) > 0$. Calculons donc θ, ayant orienté l'axe $\mathbb{R}f_3$ par le choix de f_3. Donnons deux méthodes.

La première est plus longue, mais permettra d'expliquer la deuxième. Le plan $P = (\mathbb{R}\overrightarrow{v})^\perp$ a pour équation $x + y + z = 0$, et une base (non-orthonormée) de P est $\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_2 - e_3)$. On la rend orthonormée en prenant

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \qquad f_2' = (e_2 - e_3) - (f_1 \mid e_2 - e_3)f_1 = (e_2 - e_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) - e_3$$

alors $(f_2' \mid f_2') = 3/2$ et l'on prend $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$. Voyons si la base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est directe. Posons

$$Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

alors $\text{dét}(Q)$ vaut $1/6$ fois le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

donc $\text{dét}(Q) = 1$ donc la base $\mathcal{B}$ est bien directe lorsqu'on munit $\mathbb{R}^3$ de l'orientation définie par la base canonique $\mathcal{B}_0$ (ici $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, qui correspond aux coordonnées (x, y, z)). Déterminons maintenant l'angle de la rotation. Comme $Ce_1 = e_2$, $Ce_2 = e_3$ et $Ce_3 = e_1$, on a :

$$Cf_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_1$$

donc la restriction de $\overrightarrow{r}$ au plan P a pour matrice dans la base (f_1, f_2) :

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(il n'est pas nécessaire de calculer $Cf_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_2 + e_3 - 2e_1) = -\dfrac{1}{2}f_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_1$ puisqu'on sait que la matrice est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$).

Donc $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ et donc $\theta = 2\pi/3$. Il en résulte que $\overrightarrow{r}$ est la rotation d'axe orienté par $f_3 = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})/\sqrt{3}$ et d'angle $+2\pi/3$.

Deuxième méthode. Soit x un vecteur $\neq 0$ arbitraire dans P, posons $\rho = \|x\|$ et $g_1 = x/\rho$. Il existe dans P deux vecteurs unitaires orthogonaux à g_1, et seul l'un d'eux, g_2, est tel que $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3) = 1$. Alors $\overrightarrow{r}(g_1) = (\cos\theta)\, g_1 + (\sin\theta)\, g_2$ (cf. la 1ère méthode), et comme $x = \rho g_1$ on a :

$$M = \text{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\text{dét}(M) = \rho^2 \sin\theta$ est du signe de $\sin\theta$. Posons alors $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3)$, on a

$$M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3) \cdot \text{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3) = QM,$$

où l'on a posé $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g_1, g_2, f_3)$. Or on a $\text{dét}(Q) = 1$ et donc

$$\text{dét}(M') = \text{dét}(Q)\,\text{dét}(M) = \rho^2 \sin\theta \qquad \textbf{est du signe de } \sin\theta.$$

De plus, remarquons que si on remplace $x \neq 0$ dans P par $x' = x + \lambda f_3$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraire, alors $\overrightarrow{r}(x') = \overrightarrow{x} + \lambda f_3$ et donc la matrice

$$\mathrm{Mat}_{(g_1,g_2,f_3)}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est encore de déterminant $\rho^2 \sin\theta$. Donc : **pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à l'axe de rotation $\mathbb{R}f_3$, $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}_0}(x, \overrightarrow{r}(x), f_3)$ est du signe de $\sin\theta$. C'est le point à retenir** de la 2ème méthode ; ce qui précède est la justifiation de la méthode.

Appliquant ceci à $x = e_1 - e_2 \in P$, on trouve la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

De façon encore plus simple, si l'on prend $x = e_1$, on a $Ce_1 = e_2$ et l'on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est de déterminant 1. Donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = 2\pi/3$, et l'on conclut comme dans la 1ère méthode que C est la rotation d'axe orienté par $f_3 = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})/\sqrt{3}$ et d'angle $+2\pi/3$.

3. Déterminer l'ensemble des points fixes de ϕ et de f.

Solution : Comme $\overrightarrow{f}$ est une rotation gauche d'angle $\theta \neq 0$, on sait que $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \{0\}$. Donc, d'après le cours, on sait que f admet un unique point fixe I. Ses coordonnées (x_0, y_0, z_0) sont solutions du système :

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} -5x_0 - 2y_0 + z_0 = -3 \\ x_0 - 5y_0 - 2z_0 = -3 \\ -2x_0 + y_0 - 5z_0 = -3 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} x_0 - 5y_0 - 2z_0 = -3 \\ 3y_0 + z_0 = 2 \\ y_0 + z_0 = 1 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x_0 - 5y_0 - 2z_0 = -3 \\ y_0 + z_0 = 1 \\ 2z_0 = 1 \end{cases}$$

d'où $z_0 = \dfrac{1}{2} = y_0$ et $x_0 = -3 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 (24 pts)**.** Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Si $M \in \mathcal{P}$, on écrira $M(x, y)$ pour indiquer que (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est **convexe** si elle vérifie : pour tous points $A, B \in \mathcal{C}$, le **segment**

$$[A, B] = \{tA + (1-t)B \mid t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans $\mathcal{C}$. Si $A \neq B$, on notera $]A, B[$ le **segment ouvert**

$$]A, B[= \{tA + (1-t)B \mid t \in]0, 1[\,\} = [A, B] - \{A, B\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est convexe, on dit qu'un point $P \in \mathcal{C}$ est un **point extrémal** s'il vérifie : pour tous $A \neq B$ dans $\mathcal{C}$, $P \notin\,]A, B[$.

1. Soit $T = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1\}$. Montrer que T est convexe.
2. Faire un dessin représentant T. Déterminer les points extrémaux de T.

Solution : T est le triangle de sommets les trois points $S_1 = O$, $S_2(1, 0)$ et $S_3(0, 1)$. En faisant un dessin, « on voit bien » que T est convexe, et que ses points extrémaux sont les trois sommets. Démontrons ceci.

Soient $A(a, b)$ et $B(p, q)$ deux points distincts de T, soit $t \in [0, 1]$ et soit $P = tA + (1-t)B$. Comme $a, b, p, q \geq 0$ et $a + b, p + q \leq 1$, en multipliant par t ou $1 - t$ (qui sont ≥ 0) on obtient :

$$\begin{array}{rcccl} ta \geq 0 & \text{et} & (1-t)p \geq 0 & \text{d'où} & x_P = ta + (1-t)p \geq 0 \\ tb \geq 0 & \text{et} & (1-t)q \geq 0 & \text{d'où} & y_P = tb + (1-t)q \geq 0 \\ t(a+b) \leq t & \text{et} & (1-t)(p+q) \leq (1-t) & \text{d'où} & x_P + y_P = t(a+b) + (1-t)(p+q) \leq 1. \end{array}$$

Ceci montre que T est convexe. Supposons de plus $t \in]0,1[$. Alors, si P appartient au côté $x = 0$ du triangle, i.e. si $x_P = ta + (1-t)p = 0$, alors les inégalités $ta \geq 0$ et $(1-t)p \geq 0$ sont des égalités, et comme t et $1-t$ sont > 0, ceci entraîne que $a = 0 = p$, i.e. les points A et B sont aussi sur le côté $x = 0$ de T. Le même argument s'applique à chacun des côtés et l'on obtient donc : **si $P \in]A, B[$ appartient à un côté du triangle, alors A, B appartiennent à ce même côté**.

Ceci entraîne que : **les sommets du triangle sont des points extrémaux**. En effet, soit S un sommet, et supposons que $S \in]A, B[$, où A, B sont deux points distincts de T. D'après ce qui précède, A et B appartiennent aux deux côtés qui contiennent S, or ces deux côtés ne se rencontrent qu'en S, donc on aurait $A = S = B$, contrairement à l'hypothèse $A \neq B$.

Réciproquement, il est clair que tout point P de T qui n'est pas un sommet, n'est pas extrémal : si P est sur un côté (mais pas un sommet), il appartient au segment ouvert défini par ce côté ; si P est à l'intérieur du triangle, la droite (OP) (par exemple) coupe le côté $[S_2, S_3]$ en un point K, et $P \in]O, K[$.

3. Soit $\mathcal{C} = \{M(x,y) \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe. Faire un dessin représentant $\mathcal{C}$.
4. Soient $A(a,b)$ et $B(p,q)$ deux points distincts de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout $P(x,y) \in]A, B[$, on a $(x^2/4) + y^2 < 1$.
5. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$?

Solution : L'ensemble $\mathcal{F} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid (x^2/4) + y^2 = 1\}$ est une ellipse, de grand axe Ox et de centre O, et $\mathcal{C}$ est « l'intérieur » de l'ellipse. En faisant un dessin, « on voit bien » que $\mathcal{C}$ est convexe et que ses points extrémaux sont les points de l'ellipse. Démontrons ceci.

La forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Q(x,y) = (x^2/4) + y^2$ est définie positive, sa forme polaire ϕ, définie par $\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \dfrac{xx'}{4} + yy'$, est donc un **produit scalaire**. Alors l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \|u\| = \sqrt{Q(u)}$ est une **norme** sur $\mathbb{R}^2$ (l'inégalité triangulaire résultant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Alors $\mathcal{C}$ est la **boule unité** pour cette norme, i.e.

$$\mathcal{C} = B(1) = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq 1\}$$

et il en résulte que $\mathcal{C}$ est convexe (c'est vrai pour la boule unité $B(1)$ pour n'importe quelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E). En effet, si $u, v \in B(1)$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\|tu + (1-t)v\| \leq \|tu\| + \|(1-t)v\| = t\|u\| + (1-t)\|v\| \leq t + (1-t) = 1.$$

De plus, l'ellipse $\mathcal{F}$ est la **sphère unité**, i.e. $\mathcal{F} = S(1) = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq 1\}$.

Supposons de plus $t \in]0,1[$, alors on a $\|tu + (1-t)v\| = 1$ si et seulement si $\|u\| = \|v\| = 1$ et si l'inégalité triangulaire $\|tu + (1-t)v\| \leq \|tu\| + \|(1-t)v\|$ est une inégalité. Lorsque $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, i.e. provient d'un produit scalaire $(\mid)$, on va voir que ceci ne se produit que si $u = v$. En effet, d'après Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\|tu + (1-t)v\|^2 &= t^2\|u\|^2 + (1-t)^2\|v\|^2 + 2t(1-t)(u \mid v) \\ &\leq t^2\|u\|^2 + (1-t)^2\|v\|^2 + 2t(1-t)\|u\| \cdot \|v\| = \big(t\|u\| + (1-t)\|v\|\big)^2\end{aligned}$$

Si l'inégalité ci-dessus est une égalité alors, comme $t \in]0,1[$, on a

$$(*) \qquad (u \mid v) = \|u\| \cdot \|v\|$$

et donc, d'après Cauchy-Schwarz, u et v sont liés. Comme on suppose de plus $\|u\| = \|v\| = 1$, ceci entraîne que $v = u$ ou $v = -u$. Or l'égalité $(*)$ ci-dessus entraîne que $(u \mid v) > 0$, donc le cas $v = -u$ est exclu, d'où finalement $v = u$.

Revenons au cas de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire ϕ et de la norme $\|u\| = \sqrt{Q(u)}$, et soient $A(a,b)$ et $B(p,q)$ deux points distincts de $\mathcal{C}$, notons $u = \overrightarrow{OA}$ et $v = \overrightarrow{OB}$. Alors, comme $u \neq v$, le calcul précédent montre que pour tout $t \in]0,1[$, l'inégalité

$$\frac{1}{4}\big(ta + (1-t)p\big)^2 + \big(tb + (1-t)q\big)^2 \leq 1$$

est stricte. Ceci répond à la question 4., et montre que les points de $\mathcal{F}$ sont des points extrémaux de $\mathcal{C}$.

Réciproquement, si P est un point de $\mathcal{C}$ tel que $Q(\overrightarrow{OP}) < 1$ et $P \neq O$, alors la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{OP}$ coupe l'ellipse (i.e. la sphère unité) en les deux points $M_\pm$ tels que $\overrightarrow{OM_\pm} = \pm\lambda\overrightarrow{OP}$, avec $\lambda = 1/\|\overrightarrow{OP}\| > 1$, et $P \in \,]M_-, M_+[\,$. Enfin, le point O appartient à n'importe quel « diamètre » $]M_-, M_+[$; par exemple dans notre cas on peut prendre pour $M_\pm$ les deux points de coordonnées $(\pm 2, 0)$. Ceci montre que les points de $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ ne sont pas extrémaux. Donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{C}$ est l'ellipse $\mathcal{F}$. (De façon plus générale, ce qui précède montre que, pour une norme euclidienne $\|\cdot\|$, les points extrémaux de la boule unité $B(1)$ sont les points de la sphère unité $S(1)$. Ceci est faux pour une norme non-euclidienne, prendre par exemple sur $\mathbb{R}^2$ la norme définie par $\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| = \max(|x|, |y|)$, pour laquelle la boule unité est un carré.)