Université Pierre et Marie Curie 2010–2011
LM270, Corrigé du TE4b Groupes 4,5,6 (20/5/2011)

D'abord, un **ERRATUM IMPORTANT** au Chap. 5 du polycopié. Page 110, dans le Lemme 5.3.17, le coefficient en bas à droite de la matrice M est 1 (et non -1) ; par conséquent, la conclusion de 5.3.17 est que le déterminant $\text{dét}_{\mathcal{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est du **même signe** que $\sin(\theta)$ (et non du signe opposé...). Et dans le Théorème 5.3.18, point (2), ligne 4, remplacer également « de signe opposé » par : « **de même signe** ».

Exercice 1 (15 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé canonique $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B})$, où O désigne le point $(0,0,0)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soient A le point $(1,1,1)$, w le vecteur $e_1 + 2e_2 - e_3$, et f le vissage d'axe $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}w$, de vecteur de vissage w, et d'angle $\pi/2$ (la droite $D = \mathbb{R}w$ étant orientée par w).

1. (2 pts) Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f.

Solution : D'après la définition d'un vissage, la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f est la rotation vectorielle r d'axe $D = \mathbb{R}w$ orienté par w, et d'angle $\pi/2$. Si l'on pose $w' = \dfrac{1}{\|w\|}w = \dfrac{1}{\sqrt{6}}w$ et si $\mathcal{C} = (u', v', w')$ est une base orthonormée directe, on a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (4 pts) Déterminer un vecteur u orthogonal à $w' = \dfrac{1}{\|w\|}w$, puis un vecteur unitaire v' orthogonal à $u' = \dfrac{1}{\|u\|}u$ et à w' ; on choisira v' de façon que la base orthonormée $\mathcal{C} = (u', v', w')$ soit directe. Déterminer P^{-1}.

Solution : Un vecteur orthogonal à $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est de norme $\sqrt{2}$. On peut donc prendre $u' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche alors un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à u et à w ; on a donc les équations $z = -x$ et $0 = x + 2y - z = 2(x+y)$, d'où $y = -x$. On peut donc prendre $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est de norme $\sqrt{3}$; on a donc $v' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On veut de plus que la base orthonormée $\mathcal{C} = (u', v', w')$ soit directe, i.e. que $\text{dét}_{\mathcal{B}}(u', v', w')$ soit > 0 (et donc égal à 1, puisque $\mathcal{C}$ est une BON). Calculons $\text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

d'où $\text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = -6$, donc la base $(u', \dfrac{1}{\sqrt{3}}v, w')$ est indirecte. On prend donc $v' = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}v = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

et comme $P \in O(3)$ on a $P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

3. $(1 + 3 = 4$ pts$)$ Écrire les matrices $C = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ (on écrira B sous la forme $B = \dfrac{1}{6}A$, où tous les coefficients de A sont de la forme $a + b\sqrt{6}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$).

Solution : On a déjà dit dans la question 1. que $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $B = PCP^{-1}$. Calculons :

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{6} & -1+2\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 4 & -2-\sqrt{6} \\ -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. (5 pts) Soit g la rotation affine d'axe $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}w$ et d'angle $\pi/2$ (la droite $D = \mathbb{R}w$ étant orientée par w). Pour tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{Ag(M)}$ puis le vecteur $\overrightarrow{Of(M)}$ en fonction de (x, y, z).

Solution : D'abord, $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$. Puis, comme $g(A) = A$ on a $\overrightarrow{Ag(M)} = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$ d'où

$$\overrightarrow{Ag(M)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{6} & -1+2\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 4 & -2-\sqrt{6} \\ -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x + (2+\sqrt{6})y - (1-2\sqrt{6})z - 2 - 3\sqrt{6} \\ (2-\sqrt{6})x + 4y - (2+\sqrt{6})z - 4 + 2\sqrt{6} \\ -(1+2\sqrt{6})x - (2-\sqrt{6})y + z + 2 + \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Puis l'on a $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{Ag(M)} + w = \overrightarrow{Ag(M)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{Ag(M)} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$\overrightarrow{Of(M)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x + (2+\sqrt{6})y - (1-2\sqrt{6})z - 2 - 3\sqrt{6} \\ (2-\sqrt{6})x + 4y - (2+\sqrt{6})z - 4 + 2\sqrt{6} \\ -(1+2\sqrt{6})x - (2-\sqrt{6})y + z + 2 + \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x + (2+\sqrt{6})y - (1-2\sqrt{6})z + 10 - 3\sqrt{6} \\ (2-\sqrt{6})x + 4y - (2+\sqrt{6})z + 14 + 2\sqrt{6} \\ -(1+2\sqrt{6})x - (2-\sqrt{6})y + z + 2 + \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (7 pts)**.** Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2), où O désigne le point $(0,0)$. Pour $A, B \in \mathcal{P}$, on note $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Soient $F = (-1, 0)$ et $F' = (1, 0)$ et soit $\mathcal{C} = \{M = (x, y) \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 4\}$.

1. (4 pts) Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $q(x, y) = 1$, où q est une forme quadratique que l'on déterminera.

Solution : L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$. Comme les deux termes sont ≥ 0, ceci équivaut à l'équation

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)} = 16$$

qui se récrit

$$(*) \qquad x^2 + y^2 - 7 = -\sqrt{((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)}.$$

Ceci équivaut aux deux conditions suivantes : (1) $x^2 + y^2 \leq 7$, et

(2) $(x^2 + y^2 - 7)^2 = \big((x+1)^2 + y^2\big)\big((x-1)^2 + y^2\big) = (x^2 + y^2 + 1 + 2x)(x^2 + y^2 + 1 - 2x) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$.

La condition (2) équivaut à $4x^2 = 8(2x^2 + 2y^2 - 6)$, soit $3x^2 + 4y^2 = 12$, ou encore :

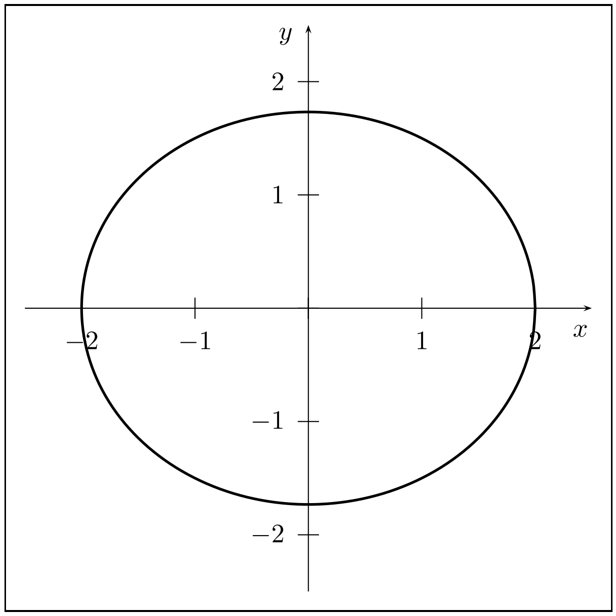
$$(3) \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

De plus, la condition (3) entraîne que $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{7} \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$, ce qui est la condition (1). Donc (3) équivaut à $(*)$, et est bien l'équation de $\mathcal{C}$.

2. (1,5 pts) Quelle est la nature de $\mathcal{C}$?

Solution : D'après l'équation (3), $\mathcal{C}$ est une ellipse, de grand axe Ox. Son centre (intersection des axes de symétrie $x = 0$ et $y = 0$) est le point O ; ses sommets sont les points $(\pm 2, 0)$ et $(0; \pm\sqrt{3})$.

3. (1,5 pts) On obtient la figure suivante :



Exercice 3 (10 pts)**.** 1. (3pts) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer, en utilisant des résultats du cours, qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D + N$, où D est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ (les λ_i n'étant pas nécessairement distincts), et N une matrice triangulaire supérieure stricte (i.e. avec des zéros sur la diagonale) qui commute avec D.

Solution : On sait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan J_A :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{p_2}(\mu_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{p_r}(\mu_r) \end{pmatrix}$$

(les μ_i n'étant pas nécessairement distincts). Soit D la partie diagonale de J_A (i.e. la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont $\mu_1 I_{p_1}, \ldots, \mu_r I_{p_r}$) et soit $N = J_A - D$. Alors D est diagonale, N triangulaire stricte, et comme elles sont toutes les deux diagonales par blocs (avec les mêmes blocs !) et que D est une homothétie sur chaque bloc, alors D et N commutent.

2. (4 pts) En déduire que $\text{dét}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$. (On rappelle que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.)

Solution : On a $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ et, d'après le rappel ci-dessus, on a $\text{dét}(\exp(A)) = \text{dét}(\exp(A'))$. Donc il suffit de montrer l'égalité $\text{dét}(\exp(A')) = \exp(\mathrm{Tr}(A'))$. Comme D et N commutent, on a $\exp(A') = \exp(D)\exp(N)$. D'une part, $\exp(D)$ est la matrice diagonale de termes diagonaux $\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n)$, donc

$$\text{dét}(\exp(D)) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp(\mathrm{Tr}(A')).$$

D'autre part, comme N est nilpotente donc vérifie $N^n = 0$ (par Cayley-Hamilton), alors $\exp(N)$ égale la somme finie

$$I_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$$

qui est une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Donc $\text{dét}(\exp(N)) = 1$ et par conséquent $\text{dét}(\exp(A')) = \text{dét}(\exp(D)) = \exp(\mathrm{Tr}(A'))$.

3. (3pts) On rappelle que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$. Soit alors $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}(n)$.

Solution : On a ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, d'où ${}^t\exp(A)\exp(A) = I_n$ et donc $\exp(A) \in O(n)$. D'autre part, on a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(-A) = -\mathrm{Tr}(A)$, donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$. D'après la question 1., on a donc $\mathrm{dét}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A)) = 1$, d'où $A \in \mathrm{SO}(n)$.

Remarque : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que toute application linéaire $f : E \to E$ est continue. [En effet, soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur E définie par $\|v\|_\infty = \max_i |x_i|$ si $v = \sum_i x_i e_i$; on a aussitôt

$$(*) \qquad \|v\| \leq \sum_i |x_i| \cdot \|e_i\| \leq M \cdot \|v\|_\infty,$$

où $M = \sum_i \|e_i\|$. Admettons pour un instant l'assertion suivante : (†) il existe un réel $k > 0$ tel que $\|v\| = 1 \Rightarrow \|v\|_\infty \leq k$. Alors pour tout $v \neq 0$, on a $\|v\|_\infty \leq k \cdot \|v\|$, égalité qui est encore valable pour $v = 0$, et l'on en déduit que pour tout $v = \sum_i x_i e_i$, on a

$$\|f(v)\| = \Big\| \sum_i x_i f(e_i) \Big\| \leq M' \cdot \|v\|_\infty \leq kM' \cdot \|v\|$$

(où $M' = \sum_i \|f(e_i)\|$), et ceci montre que f est continue. Reste à montrer (†). Dans le cas contraire, il existerait une suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de vecteurs tels que $\|v_p\| = 1$ et que $t_p = \|v_p\|_\infty$ tende vers ∞. Quitte à remplacer $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite et à permuter les coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$, on peut supposer que

$$\frac{1}{t_p} v_p = (1, x_{p,2}, \ldots, x_{p,d})$$

avec $|x_{p,i}| \leq 1$. Comme le « cube unité » de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est compact, on peut supposer, quitte à remplacer $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite, que la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers une limite ℓ. Comme la fonction « 1ère coordonnée » est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (c'est clair), et comme $\|\cdot\|$ l'est aussi (d'après $(*)$), alors la 1ère coordonnée de ℓ est 1 et d'autre part on a $\|\ell\| = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{t_p} = 0$, donc $\ell = 0$, d'où une contradiction. Ceci prouve (†).]

Appliquons ceci à $M_n(\mathbb{K})$, muni d'une norme matricielle. Comme l'application $A \mapsto {}^tA$ est linéaire, elle est continue et donc

$${}^t\exp(A) = {}^t\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{A^n}{n!}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{{}^t(A^n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{({}^tA)^n}{n!} = \exp({}^tA).$$

De même, pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ fixé, l'application $A \mapsto P^{-1}AP$ est linéaire donc continue, et l'on obtient comme ci-dessus que $P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP)$.

Exercice 4 (19 pts)**.** Soient Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, ϕ sa forme polaire et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $d = 1, \ldots, n$, on note A_d la sous-matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ et $\Delta_d = \mathrm{dét}(A_d)$. (On a donc $A_1 = (a_{11})$ et $A_n = A$).

1. (3 pts) On suppose que $\Delta_{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique $(n-1)$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que le vecteur $f_n = e_n - x_1e_1 - \cdots - x_{n-1}e_{n-1}$ vérifie $\phi(e_i, f_n) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. (On ne demande pas de calculer les x_i).

1ère solution : Chaque égalité $\phi(e_i, f_n) = 0$ s'écrit $x_1\phi(e_i, e_1) + \cdots + x_{n-1}\phi(e_i, e_{n-1}) = \phi(e_i, e_n)$, donc les conditions $\phi(e_i, f_n) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ équivalent à dire que le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution du système $A_{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, où $y_i = \phi(e_i, e_n)$. Comme $\Delta_{n-1} \neq 0$, la matrice A_{n-1} est inversible donc ce système admet une solution unique.

2ème solution : A_{n-1} est la matrice de la restriction de ϕ au sous-espace $V_{n-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc la condition $\Delta_{n-1} \neq 0$ signifie que ladite restriction est non dégénérée. Alors, d'après le cours, on sait que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale de V_{n-1} et de la droite $D = V_{n-1}^{\perp}$. Alors, notant π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur V_{n-1}, le vecteur $\pi(e_n)$ est l'unique élément de V_{n-1} tel que $\phi(e_i, e_n - \pi(e_n)) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$, et donc $(x_1, \dots, x_{n-1})$ sont les coordonnées de $\pi(e_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1})$. (Remarque : Si $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base orthogonale de V_{n-1}, c.-à.-d., si A_{n-1} est la matrice diagonale de termes diagonaux $Q(e_1), \dots, Q(e_{n-1})$, tous non nuls puisqu'on suppose $\Delta_{n-1} \neq 0$, alors on a $x_i = \dfrac{\phi(e_i, e_n)}{Q(e_i)}$, mais attention cette formule n'est pas valable lorsque A_{n-1} n'est pas diagonale !)

2. $(1 + 3 = 4\text{pts})$ Écrire la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$ et calculer son déterminant. En écrivant la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$, en déduire que $Q(f_n) = \Delta_n / \Delta_{n-1}$.

Solution : On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & x_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{dét}(P) = 1$. D'autre part, comme $\phi(e_i, f_n) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$, la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$ est $A' = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & Q(f_n) \end{array}\right)$, où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes. Comme $A' = {}^tPAP$ et $\mathrm{dét}(P) = 1$, on en déduit que $Q(f_n)\Delta_{n-1} = \mathrm{dét}(A') = \mathrm{dét}(A) = \Delta_n$, d'où $Q(f_n) = \Delta_n/\Delta_{n-1}$.

3. (3 pts) On suppose que $\Delta_p \neq 0$ pour tout $p = 1, \dots, n$. Déterminer en fonction de $(\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \cdots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$ la signature de Q.

Solution : En répétant la construction précédente, on construit une base orthogonale $\mathcal{C}' = (e_1, f_2, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Q(f_i) = \Delta_i/\Delta_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$, et $Q(e_1) = a_{11} = \Delta_1$. Par conséquent, posant $\Delta_0 = 1$, la signature de Q est (p, q), où p (resp. q) est le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que Δ_i/Δ_{i-1} soit > 0 (resp. < 0). On peut aussi dire que q est le nombre de changements de signes dans la suite $(1, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n)$ et que $p = n - q$.

4. (4 pts) On suppose $n \geq 4$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, c.-à.-d., $a_{ii} = 2$, $a_{12} = a_{21} = -3 = a_{n-1,n} = a_{n,n-1}$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ pour $i = 2, \dots, n-2$, et tous les autres $a_{i,j}$ sont nuls. Calculer Δ_1 et Δ_2. Puis, pour $d = 3, \dots, n-1$, montrer en développant Δ_p par rapport à la d-ème colonne, que $\Delta_d = a\Delta_{d-1} - b\Delta_{d-2}$ pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ que l'on déterminera. En utilisant cette formule calculer Δ_3, Δ_4, Δ_5.

Solution : On a $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 4 - 9 = -5$. Pour $d = 3, \dots, n-1$, en développant Δ_p par rapport à la d-ème colonne, on obtient $\Delta_d = 2\Delta_{d-1} - \Delta_{d-2}$ (cf. le corrigé du TE3a). En utilisant cette formule, on obtient $\Delta_3 = -10 - 2 = -12$, $\Delta_4 = -24 + 5 = -19$ et $\Delta_5 = -38 + 12 = -26$.

5. (2 pts) Les calculs précédents vous suggèrent-ils une formule pour la valeur de Δ_d, pour $d = 1, 2, \dots, n-1$? Si oui, démontrez cette formule par récurrence sur d.

Solution : Les résultats précédents suggèrent la formule $\Delta_d = 9 - 7d$, pour $d = 1, 2, \dots, n-1$. Supposons cette formule établie jusqu'au cran $d < n - 1$, alors $\Delta_{d+1} = 2(9 - 7d) - (9 - 7(d-1)) = 9 - 7(d+1)$. Ceci établit la formule $\Delta_d = 9 - 7d$, pour $d = 1, 2, \dots, n-1$.

6. (3 pts) Calculer Δ_n (en le développant par rapport à la dernière colonne) puis déterminer la signature de ϕ.

Solution : En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 9\Delta_{n-2}$. Donc

$$\Delta_n = 2(9 - 7(n-1)) - 9(9 - 7(n-2)) = 7(7n - 25)$$

et comme $n \geq 4$ on a $\Delta_n > 0$. Donc, on a $\Delta_1 = 2$, puis $\Delta_d = 2 - 7d < 0$ pour $d = 2, \dots, n-1$, et enfin $\Delta_n = 7(7n - 25) > 0$. Par conséquent, la signature de ϕ est $(n-2, 2)$.

Exercice 5 (9 pts)**.** Soit ϕ la f.b.s. sur $\mathbb{R}^5$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la base canonique. Soit q la forme quadratique associée.

1. (1 pt) Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution : D'après la formule $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, on a $q(x_1, \ldots, x_5) = x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_5 + x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5$.

2. (6 pts) Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Solution : En regroupant x_1^2 et les termes contenant x_1 on obtient :

$$q(x_1, \ldots, x_5) = (\underbrace{x_1 + x_3 + x_5}_{X_1})^2 - 2x_3x_5 + x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_5 = X_1^2 + \underbrace{x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_5}_{q_2(x_2,x_3,x_4,x_5)}.$$

Maintenant, il n'y a plus de termes carrés dans $q_2(x_2, x_3, x_4, x_5)$. On peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes suivantes.

1ère méthode. On fait le changement de variable

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{x_2 + x_4}{2} \\ X_4 = \dfrac{x_2 - x_4}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x_2 = X_2 + X_4 \\ x_4 = X_2 - X_4. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} q_2(X_2, X_4, x_3, x_5) &= X_2^2 - X_4^2 - X_2x_5 - X_4x_5 - x_3x_5 \\ &= \big(X_2 - \frac{x_5}{2}\big)^2 - \frac{x_5^2}{4} - \big(X_4 + \frac{x_5}{2}\big)^2 + \frac{x_5^2}{2} - x_3x_5 \\ &= Y_2^2 - Y_4^2 - x_3x_5 \end{aligned}$$

où l'on a posé $Y_2 = X_2 - \frac{x_5}{2}$ et $Y_4 = X_4 + \frac{x_5}{2}$. Puis, posant $X_3 = \frac{x_3 + x_5}{2}$ et $X_5 = \frac{x_3 - x_5}{2}$, on obtient que

$$q(X_1, Y_2, Y_4, X_3, X_5) = X_1^2 + Y_2^2 - Y_4^2 + X_3^2 - X_5^2.$$

2ème méthode. On s'occupe de deux variables, disons x_2 et x_5, en écrivant

$$x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_5 = (x_2 + x_3)(-x_5 + x_4) - x_3x_4$$

Alors, posant $X_2 = \frac{x_2 + x_3 - x_5 + x_4}{2}$ et $X_5 = \frac{x_2 + x_3 + x_5 - x_4}{2}$, on obtient que $q_2(X_2, X_5, x_3, x_4) = X_2^2 - X_5^2 - x_3x_4$. Puis, posant $X_3 = \frac{x_3 + x_4}{2}$ et $X_4 = \frac{x_3 - x_4}{2}$, on obtient que

$$q(X_1, X_2, X_5, X_3, X_4) = X_1^2 + X_2^2 - X_5^2 - X_3^2 + X_4^2.$$

3. (2 pts) Déterminez la signature et le rang de q.

Solution : D'après le résultat de la question 2, la signature de q est $(3, 2)$ et l'on a $\mathrm{rang}(q) = 3 + 2 = 5$.