Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé du devoir 2 du 22 février 2013

Exercice 1. (9 pts) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1-t & 1+t & 0 \\ 2-t & t-2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P = P_A(X)$. (Ce polynôme a trois racines réelles que l'on déterminera.)

Solution : $P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ -1-t & 1+t-X & 0 \\ 2-t & t-2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ -1-t & 1+t-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-tX)$. Les racines de P sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = t$.

2. (2 pts) Expliquer en le justifiant pour quelles valeurs de t on peut affirmer sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.

Solution : Si $t \notin \{0, 2\}$ alors A est une matrice 3×3 qui possède 3 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Soient $t_1 < t_2$ les deux valeurs de t pour lesquelles un calcul supplémentaire est nécessaire.

Solution : On a $t_1 = 0$ et $t_2 = 2$.

3. (2,5 pts) Lorsque $t = t_1$, déterminer si A est diagonalisable.

Solution : Pour $t = 0$, la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est une racine double de $P_A(X)$. La seule autre valeur propre est $\lambda_2 = 2$ qui est une racine simple de $P_A(X)$. A est donc diagonalisable si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} A = 2$. On a $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Les 2 premières colonnes de A sont opposées l'une de l'autre et indépendantes de la 3$^{\text{e}}$ car les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ colonnes sont échelonnées. A est donc de rang 2 et $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Conclusion : A n'est pas diagonalisable.

4. (2,5 pts) Même question lorsque $t = t_2$.

Solution : Pour $t = 2$, la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est une racine double de $P_A(X)$. La seule autre valeur propre est $\lambda_1 = 0$ qui est une racine simple de $P_A(X)$. A est donc diagonalisable si et seulement si $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2$. On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est clairement de rang 1 donc $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2$. Conclusion : A est diagonalisable.

Exercice 2. (8 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et ceux au-dessus (respectivement en-dessous) de la diagonale valent 9 (respectivement 4). Ainsi, $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, etc. On pose $D_n = \text{dét}(A_n)$.

1. (6 pts) Montrer que D_n est congru à 1 modulo 36, i.e. que $D_n = 1 + 36f(n)$, pour un certain entier $f(n)$. (On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(n)$). **Indication :** procéder par récurrence sur n et développer D_n par rapport à la première colonne.

Solution : Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq 1 : D_n \equiv 1 \pmod{36}$. On a $D_1 = 1$ ce qui initie la récurrence.

$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 9 \ \cdots \ 9 \\ 4 & \\ \vdots & \boxed{A_{n-1}} \\ 4 & \end{pmatrix}$. En développant le déterminant de A_n par rapport à la 1$^{\text{ère}}$ colonne, on obtient $D_n = D_{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \times 4 \times \text{dét} \begin{pmatrix} 9 \ \cdots \ 9 \\ \boxed{B_i} \end{pmatrix}$ où B_i est la matrice A_{n-1} privée de sa $(i-1)$-ème ligne.

On a donc $D_n = D_{n-1} + 36\, g(n)$ avec $g(n) = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \operatorname{d\acute{e}t} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & B_i & \end{pmatrix}$. De plus $g(n) \in \mathbb{Z}$ car tous les coefficients de A_{n-1}, et a fortiori ceux de B_i, sont des entiers.
Par hypothèse de récurrence, $D_{n-1} \equiv 1 \pmod{36}$; on a alors $D_{n-1} = 1 + 36\, f(n-1)$ avec $f(n-1) \in \mathbb{Z}$, donc $D_n = 1 + 36\, f(n)$ avec $f(n) = f(n-1) + g(n) \in \mathbb{Z}$ d'où $D_n \equiv 1 \pmod{36}$.

Autre solution : Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq 1 : D_n \equiv 1 \pmod{36}$. On a $D_1 = 1$ ce qui initie la récurrence. En remplaçant chaque colonne C_j par $C_j - 9C_1$, on obtient : $D_{n+1} = \operatorname{d\acute{e}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 4 & \\ \vdots & A_n - 36\, B \\ 4 & \end{pmatrix} =$ $\operatorname{d\acute{e}t}(A_n - 36\, B)$, où $B \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Donc $A_n - 36\, B = (C_1 - 36V, \ldots, C_n - 36V)$, où C_j désigne la j-ème colonne de A_n et V la colonne dont tous les coefficients valent 1. Par multilinéarité, $\operatorname{d\acute{e}t}(C_1 - 36V, \ldots, C_n - 36V)$ est a priori une somme de 2^n termes : pour chaque colonne, on prend soit C_j soit $36V$. Mais les termes où $36V$ apparaît au moins deux fois sont nuls, donc on trouve :

$$D_{n+1} = \operatorname{d\acute{e}t}(C_1 - 36V, \ldots, C_n - 36V) = \operatorname{d\acute{e}t}(A_n) - 36 \sum_{j=1}^{n} \operatorname{d\acute{e}t}(C_1, \ldots, V, \ldots C_n).$$

Comme chaque terme de la somme de droite est un entier, on a donc $D_{n+1} = D_n - 36g(n)$, avec $g(n) \in \mathbb{N}$. Or, par hypothèse de récurrence, $D_n = 1 + 36f(n)$, donc $D_{n+1} = 1 + 36(f(n) - g(n))$.

2. (2 pts) Montrer que A_n est inversible.

Solution : $D_n = \operatorname{d\acute{e}t} A_n$ est congru à 1 modulo 36, d'où $\operatorname{d\acute{e}t} A_n \neq 0$. A_n est donc inversible.

Exercice 3. (8pts) On considère la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^4$:

$$q(x, y, z, t) = 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 + 8xy + 4xz + 10yz + 3yt + 5zt.$$

En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature de q.

Solution : On regroupe tout d'abord les termes dans lesquels x apparaît :

$$q(x, y, z, t) = 2\big(x^2 + 2x(2y + z)\big) + 8y^2 + 2z^2 + 10yz + 3yt + 5zt,$$

puis on fait apparaître le carré d'une première forme linéaire, qui contient x, et telle que x n'apparaisse plus dans les termes restants :

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= 2\Big((x + 2y + z)^2 - (2y + z)^2\Big) + 8y^2 + 2z^2 + 10yz + 3yt + 5zt \\ &= 2(x + 2y + z)^2 + \underbrace{2yz + 3yt + 5zt}_{q_1(y,z,t)}. \end{aligned}$$

Il nous reste à écrire $q_1(y, z, t)$ comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
Solution n° 1 : on peut regrouper dans un produit tous les termes de $q_1(y, z, t)$ dans lesquels y et z apparaissent :

$$q_1(y, z, t) = 2\left(y + \frac{5}{2}t\right)\left(z + \frac{3}{2}t\right) - 2\left(\frac{3}{2}t\right)\left(\frac{5}{2}t\right).$$

On a alors, grâce à l'identité $AB = \frac{1}{4}(A + B)^2 - \frac{1}{4}(A - B)^2$, avec $A = y + \frac{5}{2}t$ et $B = z + \frac{3}{2}t$:

$$\begin{aligned} q_1(y, z, t) &= \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{2}t + z + \frac{3}{2}t\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{2}t - z - \frac{3}{2}t\right)^2 - \frac{15}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}(y + z + 4t)^2 - \frac{1}{2}(y - z + t)^2 - \frac{15}{2}t^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } q(x, y, z, t) = 2(x + 2y + z)^2 + \frac{1}{2}(y + z + 4t)^2 - \frac{1}{2}(y - z + t)^2 - \frac{15}{2}t^2.$$

Les formes linéaires $L_1(x,y,z,t) = x+2y+z$, $L_2(x,y,z,t) = y+z+4t$, $L_3(x,y,z,t) = y-z+t$ et $L_4(x,y,z,t) = t$ sont indépendantes par construction. La signature de q est donc $(2,2)$.

Solution n° 2 : on effectue le changement de variables $\begin{cases} y = y'+z' \\ z = y'-z' \end{cases}$ qui fait apparaître des termes carrés dans l'expression de $q_1(y,z,t)$. On procède alors, pour y' et z', comme pour la variable x au début du corrigé :

$$\begin{aligned} q_1(y,z,t) &= 2(y'+z')(y'-z') + 3(y'+z')t + 5(y'-z')t \\ &= 2y'^2 - 2z'^2 + 8y't - 2z't \\ &= 2(y'^2 + 4y't) - 2z'^2 - 2z't \\ &= 2(y'+2t)^2 - 8t^2 - 2z'^2 - 2z't \\ &= 2(y'+2t)^2 - 2(z'^2 + z't) - 8t^2 \\ &= 2(y'+2t)^2 - 2\left(z' + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2} - 8t^2 = 2(y'+2t)^2 - 2\left(z' + \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}t^2. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de la solution n° 1 grâce au changement de variables inverse du précédent $\begin{cases} y' = (y+z)/2 \\ z' = (y-z)/2 \end{cases}$.

Exercice 4. (25 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard, défini par $(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On fixe un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et l'on note $H = (\mathbb{R}v)^\perp$.

1. (2,5 pts) Déterminer la dimension de H et donner une équation définissant H.

Solution : H est défini par l'équation $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1, c.-à.d., de dimension $n-1$.

2. (2,5 pts) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v \oplus H$.

Solution : On a $f(a_1,\ldots,a_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i^2 > 0$ donc $v \notin H$. Il en résulte que $\mathbb{R}v$ et H sont en somme directe. On a alors $\dim(\mathbb{R}v \oplus H) = 1 + (n-1) = n$ d'où $\mathbb{R}v \oplus H = \mathbb{R}^n$.

Tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit donc de façon unique $x = \pi_H(x) + \lambda_x v$, avec $\pi_H(x) \in H$ et $\lambda_x \in \mathbb{R}$. L'application π_H est la projection orthogonale sur H, et l'on définit σ, la symétrie orthogonale par rapport à H, en posant $\sigma(x) = \pi_H(x) - \lambda_x v = x - 2\lambda_x v$.

3. (2 pts) Montrer que $(\lambda_x v \mid v) = (x \mid v)$ et en déduire la valeur de λ_x.

Solution : On a : $(x \mid v) = \big(\pi_H(x) + \lambda_x v \mid v\big) = \big(\pi_H(x) \mid v\big) + (\lambda_x v \mid v)$. Or $\pi_H(x) \in H$ d'où $\big(\pi_H(x) \mid v\big) = 0$ et donc $(x \mid v) = (\lambda_x v \mid v) = \lambda_x(v \mid v)$. On en déduit que : $\lambda_x = \dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}$.

4. (3 pts) Donner une formule exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x, $(x \mid v)$, $(v \mid v)$ et v.

Solution : On déduit du calcul précédent que : $\sigma(x) = x - 2\lambda_x v = x - 2\dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}v$.

On note $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour $(\ \mid\ )$.

5. (3 pts) On suppose que $n = 3$ et que $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de la question précédente, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1,2,3$ puis écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$.

Solution : On a $(v \mid v) = 9$, $(e_1 \mid v) = 2$, $(e_2 \mid v) = 2$ et $(e_3 \mid v) = 1$,
d'où $\sigma(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \times \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\sigma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \times \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$
et $\sigma(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \times \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$. On a donc $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

6. (2 + 1 = 3pts) On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ et l'on suppose que $n = 2$ et que $v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de la question 4, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, 2$ puis écrire la matrice $S_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$, en faisant apparaître $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

Solution : On a $(v \mid v) = 1$, $(e_1 \mid v) = \cos\theta$ et $(e_2 \mid v) = \sin\theta$,
d'où $\sigma(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos^2\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{pmatrix}$
et $\sigma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta\cos\theta \\ 1 - 2\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix}$. On a donc $S_\theta = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$.

On revient à $\mathbb{R}^n$, avec n arbitraire.

7. (2 pts) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\big(\sigma(x) \mid \sigma(x)\big) = \lambda_x^2\,(v \mid v) + \big(\pi_H(x) \mid \pi_H(x)\big) = (x \mid x)$.

Solution : Comme $x = \lambda_x v + \pi_H(x)$ on a $(x \mid x) = (\lambda_x v \mid \lambda_x v) + 2\big(v \mid \pi_H(x)\big) + \big(\pi_H(x) \mid \pi_H(x)\big)$, or $\big(v \mid \pi_H(x)\big) = 0$ donc $(x \mid x) = \lambda_x^2\,(v \mid v) + \big(\pi_H(x) \mid \pi_H(x)\big)$. De la même manière, de l'expression $\sigma(x) = -\lambda_x v + \pi_H(x)$ on déduit que $\big(\sigma(x) \mid \sigma(x)\big) = (-\lambda_x)^2\,(v \mid v) + \big(\pi_H(x) \mid \pi_H(x)\big) = (x \mid x)$.

8. (2 pts) Soient $y, z \in \mathbb{R}^n$. En appliquant la question précédente à $x = y + z$, montrer que $\big(\sigma(y) \mid \sigma(z)\big) = (y \mid z)$.

Solution : On a, d'après la question précédente : $\big(\sigma(y) + \sigma(z) \mid \sigma(y) + \sigma(z)\big) = (y + z \mid y + z)$,
c'est-à-dire : $\big(\sigma(y) \mid \sigma(y)\big) + 2\big(\sigma(y) \mid \sigma(z)\big) + \big(\sigma(z) \mid \sigma(z)\big) = (y \mid y) + 2(y \mid z) + (z \mid z)$,
or $\big(\sigma(y) \mid \sigma(y)\big) = (y \mid y)$ et $\big(\sigma(z) \mid \sigma(z)\big) = (z \mid z)$, d'où $\big(\sigma(y) \mid \sigma(z)\big) = (y \mid z)$.

9. (1 pt) Montrer que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Solution : On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\sigma \circ \sigma(x) = \sigma\big(\pi_H(x) - \lambda_x v\big) = \pi_H(x) + \lambda_x v = x$ donc $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

10. (2 + 2 = 4 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$. Pour tout i, j, montrer que $a_{ij} = \big(e_i \mid \sigma(e_j)\big)$; puis, en utilisant les questions précédentes, montrer que $a_{ij} = a_{ji}$.

Solution : Le coefficient a_{ij} de la matrice A est la i-ième coordonnée de $\sigma(e_j)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, la i-ième coordonnée d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ n'est autre que $(e_i \mid x)$, d'où $a_{ij} = \big(e_i \mid \sigma(e_j)\big)$.
On a alors d'après les questions 8 et 9 : $a_{ij} = \big(e_i \mid \sigma(e_j)\big) = \big(\sigma(e_i) \mid \sigma \circ \sigma(e_j)\big) = \big(\sigma(e_i) \mid e_j\big) = \big(e_j \mid \sigma(e_i)\big) = a_{ji}$.

Remarque. La matrice dans une base orthonormée $\mathcal{C}$ d'une symétrie orthogonale σ est donc une matrice symétrique.

C'est ce qu'on vient de montrer lorsque σ est la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan $H = (\mathbb{R}v)^\perp$ et que $\mathcal{C}$ est la base canonique, mais le raisonnement est valable en général. En effet, soit V, muni du produit scalaire $(\ \mid\ )$, un espace euclidien de dimension n, soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V, et soit σ la symétrie orthogonale par rapport à un sev H de V. Notons $F = H^\perp$, alors on a $V = H \oplus F$ et tout $x \in V$ s'écrit de façon unique $x = \pi_H(x) + \pi_F(x)$, avec $\pi_H(x) \in H$ et $\pi_F(x) \in F$. Comme $\pi_H(x)$ et $\pi_F(x)$ sont orthogonaux, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|\pi_H(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2 = \|\pi_H(x) - \pi_F(x)\|^2 = \|\sigma(x)\|^2,$$

donc σ préserve la norme euclidienne, et donc le produit scalaire $(\ \mid\ )$. De plus, pour tout x on a :

$$\sigma(\sigma(x)) = \sigma(\pi_H(x) - \pi_F(x)) = \pi_H(x) + \pi_F(x) = x,$$

donc $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. Soit alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\sigma) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Alors a_{ij} est la i-ème coordonnée du vecteur $\sigma(e_j)$ donc égale $(e_i \mid \sigma(e_j))$. Et comme σ préserve le produit scalaire et $\sigma^2 = \mathrm{id}$, on a

$$(e_i \mid \sigma(e_j)) = (\sigma(e_i) \mid \sigma^2(e_j)) = (\sigma(e_i) \mid e_j) = (e_j \mid \sigma(e_i) = a_{ji}.$$