Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé du devoir 3 du 8 mars 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **7** exercices et est noté sur **50**

Préambule. Dans les exercices 1 et 2, une matrice $M \in O(3)$ étant donnée, « déterminer les caractéristiques géométriques de M » signifie : si M est une rotation, déterminer l'axe orienté et l'angle θ, et si M est une rotation gauche (= anti-rotation), déterminer l'axe orienté des anti-invariants et l'angle θ. Pour déterminer θ on donnera la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$. De plus, si $\pm\cos(\theta) \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$, on attend une réponse sous la forme $\theta = \pm p\pi/q$, avec $q \in \{2,3,4,6\}$ et $0 \le p \le q$.

Exercice 1. (10 pts) Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Montrer que $A \in O(3)$.

Solution : La norme au carré des colonnes C_1 et C_2 est $\frac{1}{81}(1+16+64) = 1$, et celle de C_3 est $\frac{1}{81}(16+16+49) = 1$. D'autre part,

$$81(C_1 \mid C_2) = -4 - 28 + 32 = 0 = -32 + 28 + 4 = 81(C_2 \mid C_3)$$

et $81(C_1 \mid C_3) = 8 + 8 - 16 = 0$. Donc les colonnes de A sont deux à deux orthogonales et chacune de norme 1, donc $A \in O(3)$.

2. (2 pts) Déterminer la valeur de $\text{dét}(A)$.

Solution : Comme $A \in O(3)$, on sait (parag. 7.4.19 du poly) que $\text{dét}(A) = 1$ (resp. $= -1$) si et seulement si un coefficient c_{i3} non nul de C_3 est du même signe que (resp. de signe opposé à) $(-1)^{i+3}\,\text{dét}(A - L_i - C_3)$, i.e. si et seulement si $C_1 \wedge C_2 = C_3$ (resp. $= -C_3$). Ici, le coefficient c_{33} vaut $4/9$, et le mineur correspondant est $(1/81)(4+32) = 4/9$. Donc $\text{dét}(A) = 1$.

3. (6 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : D'après ce qui précède, A est une rotation, distincte de l'identité. Donc $D = \text{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1, et A est une rotation d'axe D et d'angle θ tel que $2\cos(\theta) = \text{Tr}(A) - \text{dét}(A) = 1 - 1 = 0$, d'où $\theta = \pm\pi/2$ (modulo 2π). Déterminons $D = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker}(9A - 9I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc} -8 & -4 & 8 \\ 8 & -5 & 1 \\ -4 & 7 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 + 2C_2]{C_1 \to C_1 - 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & -4 & 0 \\ 18 & -5 & -9 \\ -18 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 + 2C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un générateur de l'axe D. Le vecteur $x = 9e_1$ n'appartient pas à D donc, notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, le signe de $\sin(\theta)$ est donné par le signe du déterminant : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(x, Ax, f_3) = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 9 \times 8 = 72 > 0$. Donc A est la rotation d'axe D engendré et orienté par $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$.

Exercice 2. (10 pts) Soit $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{6} & -3 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -3 & -\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2 pts) Montrer que $B \in O(3)$.

Solution : La norme au carré des colonnes C_1 et C_3 est $\dfrac{1}{16}(1+6+9)=1$, et celle de C_2 est $\dfrac{1}{16}(6+4+6)=1$. D'autre part,
$$16(C_1 \mid C_2) = -\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3\sqrt{6} = 0 = -3\sqrt{6}+2\sqrt{6}+\sqrt{6} = 16(C_2 \mid C_3)$$
et $16(C_1 \mid C_3) = 3-6+3 = 0$. Donc les colonnes de B sont deux à deux orthogonales et chacune de norme 1, donc $B \in O(3)$.

2. (2 pts) Déterminer la valeur de $\text{dét}(B)$.

Solution : Comme $B \in O(3)$, on sait (parag. 7.4.19 du poly) que $\text{dét}(B) = 1$ (resp. $= -1$) si et seulement si un coefficient c_{i3} non nul de C_3 est du même signe que (resp. de signe opposé à) $(-1)^{i+3}\,\text{dét}(B - L_i - C_3)$, i.e. si et seulement si $C_1 \wedge C_2 = C_3$ (resp. $= -C_3$). Ici, le coefficient c_{33} vaut $-1/4$, et le mineur correspondant est $(1/16)(-2+6) = 1/4$. Donc $\text{dét}(B) = -1$.

3. (6 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B.

Solution : D'après ce qui précède, B est une rotation gauche, distincte de $-I_3$. Donc « l'anti-axe » (= l'axe des anti-invariants) $D = \text{Ker}(B+I_3)$ est de dimension 1, et B est une rotation gauche d'anti-axe D et d'angle θ tel que $2\cos(\theta) = \text{Tr}(B) - \text{dét}(B) = 0-(-1) = 1$, d'où $\cos(\theta) = 1/2$ et donc $\theta = \pm\pi/3$ (modulo 2π). Déterminons $D = \text{Ker}(B+I_3) = \text{Ker}(4B+4I_3)$:
$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & \sqrt{6} & -3 \\ -\sqrt{6} & 6 & \sqrt{6} \\ -3 & -\sqrt{6} & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \sqrt{6} & -3 \\ 0 & 6 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un générateur de l'anti-axe D. Le vecteur $x = 4e_3$ n'appartient pas à D donc, notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, le signe de $\sin(\theta)$ est donné par le signe du déterminant : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(x, Bx, f_3) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times (-\sqrt{6}) < 0$. Donc B est la rotation gauche d'anti-axe D engendré et orienté par $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $-\pi/3$.

Exercice 3. (10 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (2,5 pts) Citer un théorème du cours qui assure que S est diagonalisable. Que peut-on dire des espaces propres ? Quelle propriété additionnelle peut-on imposer à une base de vecteurs propres ?

Solution : Comme S est une matrice symétrique à coefficients réels, [1] elle est diagonalisable et ses espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux. Il est donc possible de choisir les vecteurs propres de S de sorte qu'ils forment une base orthonormée (pour le produit scalaire euclidien standard).

2. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique $P_S(X)$ et déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de S. (On prendra $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.)

Solution : En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient :
$$P_S(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & -1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -(1-X) + (1-X)(X^2-3X+1) = (1-X)(X^2-3X) = X(1-X)(X-3).$$
Les valeurs propres de S sont donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

[1] La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ est symétrique, mais $P_A(X) = X^2$ et donc A n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ (car sinon on aurait $A = 0$).

3. (3 pts) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ formée de vecteurs propres de S. On notera P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Solution : Toutes les valeurs propres de S sont simples. Les espaces propres sont donc tous de dimension 1 (et orthogonaux deux à deux).
Pour l'espace propre $E_1 = \mathrm{Ker}(S)$, on constate que la somme des colonnes de S est nulle. Donc E_1 est engendré par $e_1 + e_2 + e_3$ d'où $\boxed{v_1 = \dfrac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}}$.
Pour l'espace propre $E_2 = \mathrm{Ker}(S - I_3)$, on a $S - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont les 2 dernières colonnes sont égales.
Donc E_2 est engendré par $e_2 - e_3$, d'où $\boxed{v_2 = \dfrac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}}$.
Enfin, pour l'espace propre $E_3 = \mathrm{Ker}(S - 3I_3)$, on a $S - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On constate que la somme des 2 dernières colonnes est égale au double de la première. Donc E_3 est engendré par $2e_1 - e_2 - e_3$, d'où $\boxed{v_3 = \dfrac{2e_1 - e_2 - e_3}{\sqrt{6}}}$.
Donc finalement

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

et cette matrice est orthogonale puisque c'est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, et que ces deux bases sont orthonormées.

4. (2,5 pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$$

et soit ϕ sa forme polaire. Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ puis déterminer, en le justifiant soigneusement, la signature de Q.

Solution : On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S$. Posons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a, d'après la question précédente, $D = P^{-1}SP$. Or les vecteurs colonnes de P forment une base orthonormée pour le produit scalaire euclidien standard, d'où $P^{-1} = {}^tP$. On a donc $D = {}^tPSP$, ce qui montre que D est la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{C}$. On en déduit que la signature de Q est $(2, 0)$. (2 termes positifs sur la diagonale de D, pas de terme négatif.)

Exercice 4. (5 pts) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien standard $(\ |\ )$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. (1 pt) Donner une équation de l'hyperplan $H = (\mathbb{R}v)^\perp$.

Solution : H est l'ensemble des vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tels que $0 = (x \mid v) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4$ donc une équation de H est : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$.

Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à H.

2. (2 pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, donner la formule exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x, $(x \mid v)$, $(v \mid v)$ et v.

Solution : On a $\sigma(x) = x - 2\dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}\, v$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, qui est orthonormée pour $(\ |\ )$.

3. (2 pts) Calculer $(v \mid v)$ puis, en appliquant la formule précédente successivement à $x = e_1, \ldots, e_4$, calculer $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$ puis écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)$.

Solution : On a $(v \mid v) = 1 + 4 + 4 + 16 = 25$. Puis $(e_1 \mid v) = 1$, $(e_2 \mid v) = 2 = (e_3 \mid v)$, et $(e_4 \mid v) = 4$, d'où

$$\sigma(e_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 2\times\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}23\\-4\\-4\\-8\end{pmatrix} \qquad \sigma(e_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\times\frac{2}{25}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-4\\17\\-8\\-16\end{pmatrix}$$

$$\sigma(e_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 2\times\frac{2}{25}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-4\\-8\\17\\-16\end{pmatrix} \qquad \sigma(e_4) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - 2\times\frac{4}{25}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-16\\-7\end{pmatrix}.$$

Donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}23 & -4 & -4 & -8\\ -4 & 17 & -8 & -16\\ -4 & -8 & 17 & -16\\ -8 & -16 & -16 & -7\end{pmatrix}$$

À titre de vérification, vérifions que les colonnes sont bien de norme 1. Pour C_1, comme $25^2 - 23^2 = 2\cdot 48 = 96$, il faut vérifier que $16 + 16 + 64 = 96$, ce qui est bien le cas. Pour C_2 et C_3, on a $25^2 - 17^2 = 8\cdot 42 = 336$ et $16 + 64 + 256 = 336$, donc ok. Et pour C_3, on a $64 + 2\cdot 256 + 49 = 576 + 49 = 625 = 25^2$, donc ok. On pourrait aussi vérifier que $(C_i \mid C_j) = 0$ pour $i \neq j$, mais nous laissons ceci au lecteur.

Exercice 5. (5 pts) On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$. On considère les vecteurs :

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\4\\4\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\\3\end{pmatrix}.$$

1. (1 pt) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

Solution : Notons A la matrice exprimant v_1, v_2, v_3 dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[C_3\to C_3-2C_1]{C_2\to C_2-2C_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

donc A est de rang 3, donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

2. $(1 + 1 + 2 = 4$ pts) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une famille orthonormée (f_1, f_2, f_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ telle que $(f_i \mid v_i) > 0$ et $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Solution : On a $\|v_1\|^2 = 4$ et l'on prend $f_1 = \dfrac{1}{\|v_1\|}v_1 = \dfrac{1}{2}v_1$. Puis le vecteur :

$$f_2' = v_2 - (v_2 \mid f_1)f_1$$

appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, est non nul et orthogonal à f_1 et vérifie donc $(f_2' \mid v_2) = (f_2' \mid f_2') > 0$. Calculons-le : on a

$$f_2' = v_2 - \frac{(v_2 \mid v_1)}{(v_1 \mid v_1)}v_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\4\\4\end{pmatrix} - \frac{12}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On a $\|f_2'\|^2 = 4$ et l'on prend donc $f_2 = \dfrac{1}{\|f_2'\|}f_2' = \dfrac{1}{2}f_2'$.

Enfin, le vecteur :

$$f_3' = v_3 - (v_3 \mid f_1)f_1 - (v_3 \mid f_2)f_2$$

appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, est non nul et orthogonal à f_1 et f_2 et donc $(f_3' \mid v_3) = (f_3' \mid f_3') > 0$. Calculons-le : on a

$$f_3' = v_3 - \frac{(v_3 \mid v_1)}{(v_1 \mid v_1)} v_1 - \frac{(v_3 \mid f_2')}{(f_2' \mid f_2')} f_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\|f_3'\|^2 = 2$ et l'on prend donc $f_3 = \dfrac{1}{\|f_3'\|} f_3' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f_3'$. On obtient donc la base orthonormée :

$$\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 6. (4 + 2 = 6 pts) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) définie par :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

1. (4 pts) Dans les cas $n = 2, 3, 4, 5$, utiliser l'algorithme de Gauss pour écrire Q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer sa signature.

Solution : Pour $n = 2$, on a $x_1 x_2 = X_1^2 - X_2^2$, où l'on a posé $x_1 = X_1 + X_2$ et $x_2 = X_1 - X_2$, c.-à.-d., $X_1 = (x_1 + x_2)/2$ et $X_2 = (x_1 - x_2)/2$. Donc la signature est $(1, 1)$.

Pour $n = 3$, on a $x_1 x_2 + x_2 x_3 = (x_1 + x_3) x_2$. Faisons d'abord le changement de variables $x_1' = x_1 + x_3$, en gardant x_2 et x_3 inchangés. (C'est bien un changement de variable, car la matrice exprimant (x_1', x_2, x_3) en fonction de (x_1, x_2, x_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc inversible.) On a donc

$$Q(x_1', x_2, x_3) = x_1' x_2 = X_1^2 - X_2^2,$$

où l'on a posé $x_1' = X_1 + X_2$ et $x_2 = X_1 - X_2$, c.-à.-d., $X_1 = (x_1' + x_2)/2$ et $X_2 = (x_1' - x_2)/2$. Donc la signature est à nouveau $(1, 1)$ (donc dans ce cas $Q = Q_3$ est dégénérée).

Pour $n = 4$, on a $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 = (x_1 + x_3) x_2 + x_3 x_4$. Faisons comme plus haut le changement de variables $x_1' = x_1 + x_3$, en gardant x_2, x_3, x_4 inchangés. Alors

$$Q(x_1', x_2, x_3, x_4) = x_1' x_2 + x_3 x_4 = X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2,$$

où l'on a posé, d'une part, $x_1' = X_1 + X_2$ et $x_2 = X_1 - X_2$, et, d'autre part, $x_3 = X_3 + X_4$ et $x_4 = X_3 - X_4$. Donc la signature est $(2, 2)$.

Pour $n = 5$, on a

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 = (x_1 + x_3) x_2 + x_3 x_4 + x_4 x_5 = (x_1 + x_3) x_2 + (x_3 + x_5) x_4.$$

Faisons comme plus haut le changement de variables $x_1' = x_1 + x_3$, en gardant $x_2, \ldots, x_5$ inchangés. Alors

$$Q(x_1', x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1' x_2 + (x_3 + x_5) x_4.$$

Faisons alors le changement de variables $x_3' = x_3 + x_5$, en gardant les autres variables x_1', x_2, x_4, x_5 inchangées. Alors

$$Q(x_1', x_2, x_3', x_4, x_5) = x_1' x_2 + x_3' x_4 = X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2,$$

où l'on a posé, d'une part, $x_1' = X_1 + X_2$ et $x_2 = X_1 - X_2$, et, d'autre part, $x_3' = X_3 + X_4$ et $x_4 = X_3 - X_4$. Donc la signature est à nouveau $(2, 2)$ (donc dans ce cas $Q = Q_5$ est dégénérée).

2. (2 pts) Déterminer la signature de Q pour n arbitraire. (On pourra traiter séparément les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.)

Solution : Les quatre cas traités plus haut donnent l'idée de ce qui se passe dans le cas général : supposons que $n = 2p$ (resp. $n = 2p+1$) et faisons le changement de variables $x'_{2i-1} = x_{2i-1} + x_{2i+1}$ pour tout $i \leq p-1$ (resp. pour tout $i \leq p$) (c.-à.-d., dans les deux cas, pour tout i tel que $2i + 1 \leq n$). Alors on a :

$$\begin{array}{lrcl} \text{si } n = 2p & Q(x_1, \dots, x_{2p}) & = & x'_1x_2 + x'_3x_4 + \cdots + x'_{2p-3}x_{2p-2} + x_{2p-1}x_{2p}, \\ \text{si } n = 2p+1 & Q(x_1, \dots, x_{2p+1}) & = & x'_1x_2 + x'_3x_4 + \cdots + x'_{2p-3}x_{2p-2} + x'_{2p-1}x_{2p}. \end{array}$$

Donc si l'on pose $x'_{2p-1} = x_{2p-1}$ lorsque $n = 2p$, alors dans les deux cas Q est la somme des p termes $x'_{2i-1}x_{2i}$, pour $i = 1, \dots, p$, et les variables x'_{2i-1} et x_{2i}, pour $i = 1, \dots, p$, sont linéairement indépendantes. Alors, en faisant pour chaque paire de variables (x'_{2i-1}, x_i) le changement de variables $x'_{2i-1} = X_{2i-1} + X_{2i}$ et $x_{2i} = X_{2i-1} - X_{2i}$, on obtient que :

$$\text{si } n = 2p \text{ ou } 2p+1 \qquad Q(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{p} \left(X_{2i-1}^2 - X_{2i}^2\right)$$

et donc Q est de signature (p, p), où $p = [n/2]$ est la partie entière de $n/2$. (En particulier, Q est dégénérée si et seulement si $n = 2p + 1$, et dans ce cas son noyau est de dimension 1.)

Exercice 7. (2 + 2 = 4 pts) Pour chacune des permutations suivantes de l'ensemble $\{0, 1, \dots, 9\}$, déterminez l'écriture en produit de cycles de supports disjoints. Puis, en justifiant soigneusement votre réponse, déterminez la signature de σ et τ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 7 & 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 0 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution : Pour σ, on a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 3 \arrow[d] & 1 \arrow[rr] & & 8 \arrow[dl] & 2 \arrow[rr] & & 9 \arrow[dl] \\ 5 \arrow[u] & 7 \arrow[l] & & 4 \arrow[ul] & & & 6 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

donc σ est le produit du 4-cycle (0375) et des 3-cycles (184) et (296). Comme la signature d'un r-cycle est $(-1)^{r-1}$ et comme la signature est un morphisme de groupes, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Pour τ, on a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 6 \arrow[d] & 1 \arrow[r, leftrightarrow] & 8 & 3 \arrow[r] & 9 \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] & 2 \arrow[l] & & & 7 \arrow[u] & 5 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donc τ est le produit des 4-cycles (0624) et (3957) et de la transposition (18). Comme la signature d'un r-cycle est $(-1)^{r-1}$ et comme la signature est un morphisme de groupes, on a $\varepsilon(\tau) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.