Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé du devoir 5 du 12 avril 2013

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **6** exercices et est noté sur **50**. L'exercice 4 est utilisé dans la question 4 de l'exercice 5. D'autre part, les questions 4 et 5 de l'exercice 6 utilisent l'exercice 5.

Exercice 1. (9 pts) On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien : $(X \mid Y) = {}^t\overline{X}Y = \overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2+\overline{x_3}y_3$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Soient $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul, D la droite $\mathbb{C}N$ et $H = D^\perp = \{X \in \mathbb{C}^3 \mid (N \mid X) = 0\}$.

1. **(1,5 pt)** Écrire explicitement une équation de H et déterminer, en le justifiant, la dimension de H.

<u>Solution</u> : On a : $H = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid 0 = (N \mid X) = \overline{a}x_1 + \overline{b}x_2 + \overline{c}x_3\}$ donc H est le sous-espace vectoriel défini par l'équation $\overline{a}x_1 + \overline{b}x_2 + \overline{c}x_3 = 0$. D'après le cours, on sait qu'un sous-espace défini par r équations indépendantes est de codimension r, donc ici H est de codimension 1, donc de dimension $3 - 1 = 2$.

2. **(2 pts)** Montrer que $D \cap H = \{0\}$, puis que $\mathbb{C}^3 = D \oplus H$.

<u>Solution</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in D \cap H$. Alors $0 = (X \mid X) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$, donc $x_1 = 0 = x_2 = x_3$, donc $X = 0$. Ceci montre que D et H sont en somme directe. Alors leur somme est de dimension $\dim(D) + \dim(H) = 1 + 2 = 3$, donc est égale à $\mathbb{C}^3$, et donc l'on a $\mathbb{C}^3 = D \oplus H$.

On note π_D et π_H les projections orthogonales sur D et H, respectivement, définies par la décomposition $\mathbb{C}^3 = D \oplus H$.

3. **(2 pts)** Pour tout $X \in \mathbb{C}^3$, écrivons $\pi_D(X) = \lambda_X N$. En justifiant votre raisonnement, exprimer λ_X en fonction de $(N \mid X)$ et $(N \mid N)$.

<u>Solution</u> : On a $X = \lambda_X N + \pi_H(X)$, et comme $(N \mid \pi_H(X)) = 0$, on a $(N \mid X) = (N \mid \lambda_X N) = \lambda_X(N \mid N)$, d'où $\lambda_X = (N \mid X)/(N \mid N)$.

4. **(1 pt)** Pour tout $X \in \mathbb{C}^3$, exprimer $\pi_H(X)$ en fonction de X, N, $(N \mid X)$ et $(N \mid N)$.

<u>Solution</u> : Comme $X = \lambda_X N + \pi_H(X)$, on a $\pi_H(X) = X - \lambda_X N = X - \dfrac{(N \mid X)}{(N \mid N)}N$.

5. **(2,5 pts)** Exprimer $(N \mid N)$ en fonction de a, b, c et $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ puis écrire la matrice de π_H dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$.

<u>Solution</u> : On a $(N \mid N) = \overline{a}a + \overline{b}b + \overline{c}c$. Puis comme $(N \mid e_1) = \overline{a}$, on obtient

$$\pi_H(e_1) = e_1 - \frac{\overline{a}}{(N \mid N)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{(N \mid N)} \begin{pmatrix} \overline{b}b + \overline{c}c \\ -\overline{a}b \\ -\overline{a}c \end{pmatrix}.$$

De même, comme $(N \mid e_2) = \overline{b}$ et $(N \mid e_3) = \overline{c}$, on obtient :

$$\pi_H(e_2) = \frac{1}{(N \mid N)} \begin{pmatrix} -\overline{b}a \\ \overline{a}a + \overline{c}c \\ -\overline{b}c \end{pmatrix}, \qquad \pi_H(e_3) = \frac{1}{(N \mid N)} \begin{pmatrix} -\overline{c}a \\ -\overline{c}b \\ \overline{a}a + \overline{b}b \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi_H) = \dfrac{1}{(N \mid N)} \begin{pmatrix} \overline{b}b + \overline{c}c & -\overline{b}a & -\overline{c}a \\ -\overline{a}b & \overline{a}a + \overline{c}c & -\overline{c}b \\ -\overline{a}c & -\overline{b}c & \overline{a}a + \overline{b}b \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (3 pts) 1. **(1 pt)** Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

Solution : $P_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \mathrm{d\acute{e}t}(A) = X^2$.

2. **(2 pts)** Déterminer, en le justifiant, si A est diagonalisable ou non.

Solution : Comme 0 est la seule racine de $P_A(X)$, de multiplicité 2, on sait que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2, ce qui impliquerait ici que $A = 0$. Comme ceci n'est pas le cas, on obtient que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. (8 pts) On munit $\mathbb{C}^3$ du produit scalaire hilbertien standard, défini par $(X \mid Y) = {}^t\overline{X}Y = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

1. **(1,5 + 0,5 = 2 pts)** En citant un résultat du cours, dire sans calcul pourquoi la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$. Que peut-on dire de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$?

Solution : Les colonnes de A sont deux à deux orthogonales, et chacune de norme égale à $|i| = 1$, donc $A \in U(3)$; en particulier, A est un endomorphisme normal (car son adjoint A^* égale A^{-1} donc commute à A). Alors, d'après un théorème du cours, A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$ et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. De plus, puisque $A \in U(3)$, ses valeurs propres sont de module 1.

2. **(2 pts)** Calculer $P_A(iX) = \mathrm{d\acute{e}t}(A - iXI_3)$ et en déduire les valeurs propres de A, qu'on exprimera sous la forme $\lambda_1 = i\alpha$, $\lambda_2 = i\alpha^2$ et $\lambda_3 = i$, pour une racine de l'unité α qu'on déterminera.

Solution : $P_A(iX) = \begin{vmatrix} -iX & 0 & i \\ i & -iX & 0 \\ 0 & i & -iX \end{vmatrix}$ et en utilisant la règle de Sarrus, on voit que ce déterminant égale $i^3(1 - X^3)$. Ceci s'annule lorsque X est égal à l'une des racines 3-ièmes de l'unité $\alpha = \exp(2i\pi/3) = j$, $\alpha^2 = j^2$ et $\alpha^3 = 1$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = i\alpha = ij$, $\lambda_2 = i\alpha^2 = ij^2$ et $\lambda_3 = i$. Comme on a 3 racines distinctes, chaque espace propre est de dimension 1.

3. **(2 pts)** Soit $\beta \in \{1, \alpha, \alpha^2\}$. En faisant des opérations sur les colonnes de $A - i\beta I_3$, déterminer un vecteur propre v_β de A pour la valeur propre $i\beta$.

Solution : On a

$$\left(\begin{array}{c} A - i\beta I_3 \\ \hline I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -i\beta & 0 & i \\ i & -i\beta & 0 \\ 0 & i & -i\beta \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \to C_1 + \beta C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & i \\ i & -i\beta & 0 \\ -i\beta^2 & i & -i\beta \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \to C_2 + \beta C_1} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ -i\beta^2 & i(1-\beta^3) & -i\beta \\ \hline 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & \beta^2 & 1 \end{array}\right)$$

et comme $\beta^3 = 1$, on obtient que le vecteur $v_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}$ appartient à, et engendre l'espace propre $V_{i\beta}$.

4. **(2 pts)** Donner une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres de A, et écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$, où u est l'endomorphisme associé à A.

Solution : Comme on sait que les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme. On obtient ainsi la base orthonormée

$$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} j \\ 1 \\ j^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} ij & 0 & 0 \\ 0 & ij^2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (3 pts) Soient V un k-espace vectoriel, $\phi \in \mathrm{End}_k(V)$, $m \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in V$ tels que $\phi^m(x) = 0$ mais $\phi^{m-1}(x) \neq 0$ (par définition, $\phi^0 = \mathrm{id}_V$). Montrer que les vecteurs $x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{m-1}(x)$ sont linéairement indépendants. (**Indication :** Considérer une relation de dépendance linéaire $a_0x+a_1\phi(x)+\cdots+a_{m-1}\phi^{m-1}(x) = 0$; qu'obtient-on en lui appliquant ϕ^{m-1} ? Conclure en appliquant successivement ϕ^{m-1}, puis ϕ^{m-2}, etc.)

Solution : Considérons une relation de dépendance linéaire

$$(*) \qquad a_0x + a_1\phi(x) + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-1}(x) = 0$$

avec $a_0, \ldots, a_{m-1} \in k$.
1ère méthode (celle suggérée par l'énoncé). En appliquant ϕ^{m-1}, on obtient $a_0\phi^{m-1}(x) = 0$, et comme $\phi^{m-1}(x) \neq 0$ ceci donne $a_0 = 0$. Appliquant alors ϕ^{m-2} à $(*)$, on obtient $a_1\phi^{m-1}(x) = 0$, d'où $a_1 = 0$. Appliquant alors ϕ^{m-3} à $(*)$, on obtient $a_2\phi^{m-1}(x) = 0$, d'où $a_2 = 0$, etc. On obtient ainsi que $a_0 = 0 = a_1 = \cdots = a_{m-1}$. (Si on veut faire une récurrence, on peut écrire : supposons avoir montré que $a_0 = 0 = \cdots = a_r$ pour un certain $r < m-1$, alors $(*)$ devient

$$a_{r+1}\phi^{r+1}(x) + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-1}(x) = 0.$$

Appliquant ϕ^{m-r-2}, on obtient $a_{r+1}\phi^{m-1}(x) = 0$, d'où $a_{r+1} = 0$.)
2ème méthode. On procède par récurrence sur m. Si $m = 1$, alors l'hypothèse est que $x \neq 0$ et alors $a_0x = 0$ donne $a_0 = 0$. On peut donc supposer $m \geq 2$ et le résultat établi pour $m-1$. Appliquant ϕ à l'égalité $(*)$ on obtient, en posant $y = \phi(x)$:

$$a_0y + a_1\phi(y) + \cdots + a_{m-2}\phi^{m-2}(y) = 0.$$

Alors $\phi^{m-2}(y) = \phi^{m-1}(x)$ est $\neq 0$ mais $\phi^{m-1}(y) = \phi^m(x) = 0$, et l'on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à y ; ceci donne $a_0 = 0 = a_1 = \cdots = a_{m-2}$. Reportant ceci dans $(*)$ on obtient que $a_{m-1} = 0$. Ceci montre que les vecteurs $x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{m-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 5. (16 pts) Soient d un entier ≥ 2 et $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Soient P le polynôme $X^d - \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_iX^i$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ est la « matrice compagnon » de P,

i.e. $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} \end{pmatrix}$, c.-à.-d., pour tout $j = 1, \ldots, d$, on a $\boxed{u(e_j) = e_{j-1} + a_{j-1}e_d}$,

avec la convention $e_0 = 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $v(t) = e_1 + te_2 + t^2e_3 + \cdots + t^{d-1}e_d = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} t^{i-1}e_i$.

1. **(1 pt)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{u(v(t)) = tv(t) - P(t)\, e_d}$.

Solution : $u(v(t)) = a_0e_d + t(e_1+a_1e_d)+\cdots+t^{d-1}(e_{d-1}+a_{d-1}e_d) = te_1+\cdots+t^{d-1}e_{d-1}+t^de_d-t^de_d+\displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_it^ie_d = tv(t) - P(t)\, e_d$.

On rappelle que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sont des fonctions dérivables, alors la fonction $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(t)V(t)$ est dérivable et sa dérivée W' est donnée par :

$$(1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad W'(t) = f(t)V'(t) + f'(t)V(t).$$

En particulier, si V est une fonction constante, la fonction $t \mapsto f(t)V$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto f'(t)V$. Ceci entraîne que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto v(t)$ introduite précédemment est n fois dérivable, de dérivée n-ième nulle si $n \geq d$, et égale, si $n \leq d-1$, à :

$$(*) \qquad v^{(n)}(t) = n!\left(e_{n+1} + (n+1)te_{n+2} + \cdots + \binom{d-1}{n}t^{d-1-n}e_d\right).$$

De plus, la fonction $U : t \mapsto U(t) = u(v(t))$ est n fois dérivable, pour tout entier $n \geq 1$, de dérivée

$$(2) \qquad U^{(n)}(t) = u\big(v^{(n)}(t)\big).$$

On ne demande **pas** de démontrer ces formules. Enfin, on note $v'(t)$ au lieu de $v^{(1)}(t)$, et $v^{(0)}(t)$ désigne $v(t)$.

2. **(2 pts)** En utilisant la question 1 et les formules (2) et (1), montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u(v'(t)) = tv'(t) + v(t) - P'(t)\, e_d$.

Solution : D'après (2), on a $u(v'(t)) = U'(t)$. Et d'après (1) appliqué à chaque terme $tv(t)$ et $P(t)\, e_d$, on a $U'(t) = tv'(t) + v(t) - P'(t)\, e_d$.

3. **(2 pts)** En procédant par récurrence sur i, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^\times$ on a $u(v^{(i)}(t)) = tv^{(i)}(t) + iv^{(i-1)}(t) - P^{(i)}(t)\, e_d$.

Solution : D'après la question précédente, la formule est vraie pour $i = 1$, ce qui initie la récurrence. Supposons alors avoir montré que

$$u(v^{(i)}(t)) = U^{(i)}(t) = tv^{(i)}(t) + iv^{(i-1)}(t) - P^{(i)}(t)\, e_d.$$

Alors $u(v^{(i+1)}) = U^{(i+1)}(t)$ s'obtient en dérivant le membre de droite ci-dessus. D'après la formule (1) appliquée à chacun des trois termes $tv^{(i)}(t)$, $iv^{(i-1)}(t)$ et $P^{(i)}(t)\, e_d$, on obtient que

$$u(v^{(i+1)}) = tv^{(i+1)}(t) + v^{(i)}(t) + iv^{(i)}(t) - P^{(i+1)}(t)\, e_d = tv^{(i+1)}(t) + (i+1)v^{(i)}(t) - P^{(i+1)}(t)\, e_d.$$

On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P, pour un certain entier m tel que $1 \leq m \leq d$. On pose $v_0(\lambda) = v(\lambda)$ et, pour $i = 1, \ldots, m-1$, on pose $v_i(\lambda) = \dfrac{1}{i!} v^{(i)}(\lambda)$.

4. **(1,5 + 1,5 = 3 pts)** Pour $i = 0, \ldots, m-1$, exprimer $u(v_i(\lambda))$ en fonction de $v_i(\lambda)$ et $v_{i-1}(\lambda)$ (avec la convention que $v_{-1}(\lambda) = 0$). Puis, en utilisant l'exercice 4, montrer que la famille $\mathcal{C}(\lambda) = (v_0(\lambda), \ldots, v_{m-1}(\lambda))$ est libre.

Solution : Comme $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine d'ordre m de P, on a $P^{(i)}(\lambda) = 0$ pour $i = 0, \ldots, m-1$ et donc les formules précédentes donnent que :

$$(u - \lambda \mathrm{id})(v^{(i)}(\lambda)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ iv^{(i-1)}(\lambda) & \text{pour } i = 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

et donc

$$(u - \lambda \mathrm{id})(v_i(\lambda)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ v_{i-1}(\lambda) & \text{pour } i = 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

L'endomorphisme $\phi = u - \lambda \mathrm{id}$ envoie donc chaque $v_i(\lambda)$ sur $v_{i-1}(\lambda)$, avec la convention $v_{-1}(\lambda) = 0$. Donc d'après l'exercice 4 appliqué à $x = v_{m-1}(\lambda)$, on obtient que les vecteurs $v_{m-1}(\lambda), \ldots, v_1(\lambda), v_0(\lambda)$ sont linéairement indépendants, donc la famille $\mathcal{C}(\lambda) = (v_0(\lambda), \ldots, v_{m-1}(\lambda))$ est libre.

On suppose que $P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j}$, avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \neq k$.

5. **(2 pts)** Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. En utilisant la question 4, montrer que les vecteurs $v_i(\lambda_j)$, pour $i = 0, \ldots, m_j - 1$, appartiennent à l'espace caractéristique $V_{(\lambda_j)}$, puis que celui-ci est de dimension $\geq m_j$.

Solution : Fixons $j \in \{1, \ldots, r\}$. D'après la question 4, on a $(u - \lambda_j \mathrm{id})(v_i(\lambda_j)) = v_{i-1}(\lambda_j)$, avec la convention $v_{-1}(\lambda_j) = 0$ et donc

$$(u - \lambda_j \mathrm{id})^i (v_i(\lambda_j)) = 0.$$

Ceci montre que les vecteurs $v_i(\lambda_j)$, pour $i = 0, \ldots, m_j - 1$, appartiennent à l'espace caractéristique $V_{(\lambda_j)}$, et comme ces vecteurs sont linéairement indépendants d'après la question 4, on obtient que $V_{(\lambda_j)}$ est de dimension $\geq m_j$.

6. **(3 pts)** On admet que $P_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Alors, en citant un théorème du cours, montrer que $\dim V_{(\lambda_j)} = m_j$ pour tout $j = 1, \ldots, r$ et que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\lambda_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(\lambda_r)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

Solution : En fait, on peut montrer que les espaces caractéristiques correspondant aux racines de $P_A(X)$ dans $\mathbb{R}$ sont **toujours** en somme directe : ceci résulte de la démonstration donnée dans le polycopié (Th. 2.2.11), voir aussi une démonstration plus directe en appendice à la fin de ce corrigé. Mais pour pouvoir appliquer le Th. 2.2.11, on va supposer ici que $P_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après le Th. 2.2.11, $\mathbb{R}^d$ est la somme directe des espaces caractéristiques de A, et la somme de leur dimensions égale d. Or, d'après la question précédente, on a déjà :

$$d = \deg(P) = \sum_{j=1}^{r} m_j \leq \sum_{j=1}^{r} \dim V_{(\lambda_j)}.$$

Il en résulte que $\dim V_{(\lambda_j)} = m_j$ pour tout $j = 1, \ldots, r$ et qu'il n'y a pas d'autres espaces caractéristiques. Donc $\mathbb{R}^d$ est la somme directe des $V_{(\lambda_j)}$, pour $j = 1, \ldots, r$, et donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\lambda_1) \cup \cdots \cup \mathcal{C}(\lambda_r)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

7. **(1,5 pt)** En utilisant la question 4, écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$. (La présenter sous la forme d'une matrice diagonale par blocs, dont on détaillera, par exemple, le bloc $J(\lambda_1)$ correspondant à λ_1.)

Solution : Comme $(u - \lambda_j \mathrm{id})(v_i(\lambda_j)) = v_{i-1}(\lambda_j)$, on a

$$u(v_i(\lambda_j)) = \lambda_j v_i(\lambda_j) + v_{i-1}(\lambda_j),$$

toujours avec la convention que $v_{-1}(\lambda_j) = 0$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est diagonale par blocs, et le bloc diagonal correspondant à $V_{(\lambda_j)}$ est le bloc de Jordan

$$J_{m_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \in M_{m_j}(\mathbb{R}).$$

8. **(1,5 pt)** Montrer que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est $(-1)^d P(X)$. (Ceci peut se déduire de la question précédente, ou bien se montrer par un calcul matriciel direct.)

Solution : Il résulte de la question précédente que $P_A(X) = P_u(X)$ égale $\prod_{j=1}^{r} (\lambda_j - X)^{m_j}$, qui égale $(-1)^d P(X)$. Ceci peut aussi se montrer par un calcul direct (cf. Exercice 9 de la feuille 2) : en notant $C_1, \dots, C_d$ les colonnes de la matrice $A - XI_d$ et en remplaçant C_1 par $C_1 + XC_2 + \cdots + X^{d-1}C_d$, on obtient que

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ Y & a_1 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} - X \end{vmatrix}$$

où $Y = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-2}X^{d-2} + (a_{d-1} - X)X^{d-1} = -P(X)$, et en développant ce déterminant par rapport à la 1ère colonne on obtient $P_A(X) = (-1)^{d+1}(-P(X)) = (-1)^d P(X)$.

Exercice 6. **(11 pts)** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ tel que $n(e_1) = 0$ et $n(e_j) = e_{j-1}$ pour $j = 2, \dots, d$.

1. **(2 pts)** Pour tout $j = 1, \dots, d$, calculer $n^2(e_j)$ puis, en procédant par récurrence sur r, calculer $n^r(e_j)$ pour tout $r = 1, 2, \dots, d$.

Solution : On a $n^2(e_j) = e_{j-2}$, avec la convention que $e_{j-2} = 0$ si $j - 2 \leq 0$. Montrons par récurrence que, pour tout $r \in \mathbb{N}^\times$, on a :

$$n^r(e_j) = \begin{cases} e_{j-r} & \text{si } j > r \\ e_{j-r} = 0 & \text{si } j \leq r. \end{cases}$$

C'est vrai pour $r = 1$, ce qui initie la récurrence. Supposons la formule vraie au cran r. Alors $n^{r+1}(e_j) = n(n^r(e_j)) = n(e_{j-r})$ est nul si $j - r \leq 1$, c.-à.-d., si $j \leq r + 1$, et égale e_{j-r-1} si $j - r \geq 2$, c.-à.-d., si $j > r + 1$. Ceci établit le résultat voulu. En particulier, on a $n^d = 0$.

2. **(2 pts)** Écrire les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de $n, n^2, \dots, n^{d-1}$ puis écrire la matrice $E(t)$ de $\exp(t\,n)$.

Solution : Notons $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(n)$. Pour tout $i = 1, \dots, d$, on a $N^i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(n^i)$, et l'on déduit de la question précédente que :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\cdots \qquad N^{d-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e. N^i est la matrice dont la i-ième diagonale au-dessus de la « vraie » diagonale est formée de 1, et tous les autres coefficients sont nuls. En utilisant la formule :

$$\exp(tN) = I_d + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}N^{d-1},$$

on obtient que $\exp(tN)$ est la matrice ci-dessous (cf. Prop. 3.3.15 du poly) :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et u l'endomorphisme $\lambda\mathrm{id} + n$ de $\mathbb{R}^d$. On note $D = \lambda I_d$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(n)$, et l'on pose $J = D + N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

3. **(2 pts)** En justifiant soigneusement les étapes, calculez $\exp(tJ)$.

Solution : Comme $tD = t\lambda I_d$ et tN commutent, on a $\exp(tJ) = \exp(t\lambda I_d)\exp(tN)$. De plus, $\exp(t\lambda I_d) = e^{\lambda t} I_d$ et donc

$$\exp(tJ) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(cf. Prop. 3.3.15 du poly).

Comme dans l'exercice 5, soient A la matrice compagnon du polynôme $P = (X-\lambda)^d$, $\mathcal{C} = (v_0(\lambda), \dots, v_{d-1}(\lambda))$ la base de $\mathbb{R}^d$ introduite dans la question 4 de l'exercice 5 et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, de sorte que $J = Q^{-1}AQ$. On rappelle que la fonction $M : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ définie par $\boxed{M(t) = Q\exp(tJ)}$ est dérivable, de dérivée $M'(t) = QJ\exp(tJ)$.

4. **(1 pt)** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M'(t) = AM(t)$.

Solution : Comme $J = Q^{-1}AQ$, on a $QJQ^{-1} = A$ et donc

$$M'(t) = QJ\exp(tJ) = QJQ^{-1}(Q\exp(tJ)) = AM(t).$$

5. **(2 pts)** En utilisant la définition des $v_i(\lambda)$ et la formule $(*)$ de l'exercice 5, écrire la première ligne de Q puis la première ligne $L_1(t)$ de la matrice $M(t)$.

Solution : D'après la définition des $v_i(\lambda)$, on a : $v_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{d-1} \end{pmatrix}$ et, pour $i = 1, \dots, d-1$,

$$v_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ (i+1)\lambda \\ \vdots \\ \binom{d-1}{i}\lambda^{d-1-i} \end{pmatrix},$$

où le premier coefficient non nul, égal à 1, apparaît sur la ligne $i+1$. Par conséquent, la première ligne de Q est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la première ligne de $M(t) = Q\exp(tJ)$ n'est autre que la première ligne de $\exp(tJ)$, qui est :

$$e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{d-1}}{(d-1)!} \end{pmatrix}.$$

6. **(2 pts)** En reprenant une démonstration du cours, montrer que, pour $i = 2, \dots, d$, la i-ième ligne de $M(t)$ égale $L_1^{(i-1)}(t)$, i.e. que $M(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_1'(t) \\ L_1''(t) \\ \vdots \\ L_1^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}$.

Solution : Fixons $j \in \{1, \dots, d\}$ et notons $X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{d-1}(t) \end{pmatrix}$ la j-ième colonne de $M(t)$, c.-à.-d., on pose $M_{ij}(t) = x_{i-1}(t)$ pour $i = 1, \dots, d$. Alors l'égalité $M'(t) = AM(t)$ entraîne que le vecteur $X(t)$ est solution de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. Comme A est une matrice compagnon, ceci implique, d'après une démonstration donnée en cours (voir la démonstration du Th. 3.4.4 du poly), que l'on a $x_i(t) = x_0^{(i)}(t)$, pour $i = 1, \dots, d-1$. (Et aussi que $x_0(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre n : $P(D)(x_0(t)) = 0$, où D désigne l'opérateur de dérivation $\dfrac{d}{dt}$.) Comme ceci est vrai pour chacune des colonnes de M, on obtient donc que la i-ième ligne $L_i(t)$ de $M(t)$ égale $L_1^{(i-1)}$, la dérivée $(i-1)$-ième de la première ligne $L_1(t)$.

Addendum sur les espaces caractéristiques

Définition. Soient k un corps, V un k-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), u un endomorphisme de V. Pour tout $\lambda \in k$, on définit l'*espace propre généralisé* (ou *espace caractéristique*) associé $V_{(\lambda)}$ en posant :

$$V_{(\lambda)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})^i = \{x \in V \mid \exists r_x \in \mathbb{N}^\times \text{ tel que } (u - \lambda\mathrm{id})^{r_x}(x) = 0\}.$$

Remarque. Si V n'est pas de dimension finie, la suite des noyaux $\operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})^i$ (qui est croissante), n'est pas nécessairement stationnaire. Par exemple, si $V = k[X]$ et si D est l'opérateur de dérivation, défini par la formule usuelle $D(1) = 0$ et $D(X^n) = nX^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, alors $k[X] = V_{(0)}$ car tout polynôme de degré $\leq d$ est annulé par D^{d+1}.

Théorème. *Les espaces caractéristiques $V_{(\lambda)}$ sont en somme directe.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $r \in \mathbb{N}^\times$, et si l'on a des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k$ deux à deux distincts, des entiers $m_1, \ldots, m_r \geq 1$ et des vecteurs $x_1, \ldots, x_r \in V$ qui vérifient :

$$(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(x_i) = 0, \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

et

$$x_1 + \cdots + x_r = 0, \tag{2}$$

alors $x_1 = 0 = \cdots = x_r$. On procède par récurrence sur l'entier $M = m_1 + \cdots + m_r$. Si $M = 1$, alors nécessairement $r = 1$ et donc (2) donne $x_1 = 0$. Donc on peut supposer $M \geq 2$ et le résultat établi pour tout r-uplet de vecteurs vérifiant (1) avec des exposants m_i dont la somme est $< M$.
Soient alors $x_1, \ldots, x_r \in V$ vérifiant (2) et la condition (1) avec $\displaystyle\sum_i m_i = M$. Appliquons $u - \lambda_1 \mathrm{id}$ à (2) : on obtient que les vecteurs $y_i = (u - \lambda_1 \mathrm{id})(x_i)$ vérifient encore (2). De plus, pour $i = 2, \ldots, r$, on a

$$(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(y_i) = (u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(u - \lambda_1 \mathrm{id})(x_i) = (u - \lambda_1 \mathrm{id})(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(x_i) = 0,$$

tandis que pour $i = 1$ on a

$$(u - \lambda_1 \mathrm{id})^{m_1 - 1}(y_1) = (u - \lambda_1 \mathrm{id})^{m_1}(x_1) = 0,$$

donc pour les y_i la condition (1) est vérifiée pour des exposants de somme $M - 1$ donc par hypothèse de récurrence on a $0 = y_i = (u - \lambda_1 \mathrm{id})(x_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.
Pour $i = 2, \ldots, r$, on a donc $u(x_i) = \lambda_1 x_i$ et donc $Q(u)(x_i) = Q(\lambda_1)x_i$ pour tout polynôme Q. Prenant $Q = (X - \lambda_i)^{m_i}$, on obtient

$$0 = (u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(x_i) = (\lambda_1 - \lambda_i)^{m_i} x_i,$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_i$ ceci entraîne $x_i = 0$ pour $i = 2, \ldots, r$. Reportant dans l'égalité (1) d'origine, on obtient aussi que $x_1 = 0$. □

Remarque (Exercice)**.** Prenons $V =$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et D l'endomorphisme de V défini par $D(f) = f'$ (= la dérivée de f). Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ est le sous-espace vectoriel noté $\exp(\lambda t)\mathbb{R}[t]$ formé des fonctions de la forme $t \mapsto \exp(\lambda t)P(t)$, où P est un polynôme.