Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé de l'examen du 15 mai 2013 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées ; un résultat final correct mais non justifié par les étapes du calcul qui y mènent, ne donnera qu'une partie des points. D'autre part, les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **5** exercices et est noté sur **50**.

Dans les exercices 1 et 2, $(\mathcal{E}, E)$ désigne un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. On oriente E par le choix de $\mathcal{B}$. *Pour déterminer un angle θ, on se contentera en général de donner la valeur de* $\cos(\theta)$ *et le signe de* $\sin(\theta)$ *; toutefois, si* $\pm 2\cos(\theta) \in \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$, *on donnera θ sous la forme $\pm p\pi/q$.*

Exercice 1. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{6}y + \sqrt{3}z \\ \sqrt{6}x - y - \sqrt{2}z \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

<u>Solution</u> : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ puisque, pour tout $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \overrightarrow{OM}$.

2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \le i \le j \le 3$, montrer que $A \in O(3)$.

<u>Solution</u> : $(C_1 \mid C_1) = (6+3)/9 = 1$, $(C_2 \mid C_2) = (6+1+2)/9 = 1$ et $(C_3 \mid C_3) = (3+2+4)/9 = 1$, puis $9(C_1 \mid C_2) = -\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$, $9(C_1 \mid C_3) = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$ et $9(C_2 \mid C_3) = -3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$. Donc $A \in O(3)$.

3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.

<u>Solution</u> : Comme $A \in O(3)$, on sait que le coefficient a_{33}, valant ici $2/3$, est égal à $\mathrm{dét}(A)$ fois le mineur $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, qui vaut ici $6/9 = 2/3$. Donc $\mathrm{dét}(A) = 1$.

4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

<u>Solution</u> : D'après ce qui précède, A est une rotation $\neq I_3$, donc d'angle $\theta \neq 0$. On a $1/3 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{dét}(A) + 2\cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = -1/3$. Déterminons l'axe de rotation $D = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}(3A - 3I_3)$. On a :

$$\begin{pmatrix} 3A - 3I_3 \\ \hline I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} -3 & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_2 \to C_2 + \sqrt{2}C_3]{C_1 \to C_1 + \sqrt{3}C_3} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -6 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right)$$

et donc D est engendrée par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Notons que $(v \mid v) = 4$. Pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$, prenons $x = 3e_1$, qui n'appartient pas à D. Alors $\sin(\theta)$ est du même signe que le déterminant $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, Ax, v) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 9\sqrt{2} > 0$. Donc A est la rotation d'axe D engendré et orienté par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = -1/3$ et $\sin(\theta) > 0$.

5. (1 pt) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis sa projection orthogonale u sur $F = \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

<u>Solution</u> : On a $T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $u = \dfrac{(T \mid v)}{(v \mid v)}v = \dfrac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3}{4}v = v$.

6. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution : Les points fixes $I(x, y, z)$ de g forment une droite affine $\mathcal{D}$ de direction D et sont les solutions du système donné par $0 = \overrightarrow{Ig(I)} = \overrightarrow{If(I)} - u = (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T - u$. On obtient donc le système :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & -4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3(u - T) = 3 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que $I(0, 0, 3)$ est un point fixe de g et donc $\mathcal{D} = I + D$. On peut aussi résoudre directement le système $(*)$: comme la ligne L_1 égale $-\sqrt{3}L_3$, on garde les lignes $\dfrac{1}{\sqrt{2}}L_2$ et L_3 et l'on obtient le système :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y - z &= -3 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - z &= -3 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = \sqrt{3}x + 3. \end{cases}$$

Par conséquent, g est la rotation affine d'axe $\mathcal{D} = I + D$ orienté par le vecteur v, et d'angle θ. Enfin, $f = t_u \circ g$ est le vissage d'axe $\mathcal{D} = I + D$ orienté par le vecteur v, d'angle θ, et de vecteur de vissage $u = v$.

Exercice 2. (10 pts) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x - 2y + z \\ x - 2y - 2z \\ -2x + y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

Solution : $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ puisque, pour tout $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \overrightarrow{OM}$.

2. (1,5 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \leq i \leq j \leq 3$, montrer que $A \in O(3)$.

Solution : $(C_1 \mid C_1) = (C_2 \mid C_2) = (C_3 \mid C_3) = (4 + 1 + 4)/9 = 1$, puis $9(C_1 \mid C_2) = 4 - 2 - 2 = 0 = 9(C_1 \mid C_3) = 9(C_2 \mid C_3)$. Donc $A \in O(3)$.

3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\mathrm{dét}(A)$.

Solution : Comme $A \in O(3)$, on sait que le coefficient a_{33}, valant ici $-2/3$, est égal à $\mathrm{dét}(A)$ fois le mineur $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, qui vaut ici $(4 + 2)/9 = 2/3$. Donc $\mathrm{dét}(A) = -1$.

4. (3 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : D'après ce qui précède, A est une rotation gauche $\neq -I_3$. Son angle θ vérifie $2\cos(\theta) + \mathrm{dét}(A) = \mathrm{Tr}(A) = -2$, d'où $\cos(\theta) = -1/2$, donc $\theta = \pm 2\pi/3$. Déterminons l'« anti-axe », i.e. la droite des anti-invariants $D = \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Ker}(3A + 3I_3)$. Comme $3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que la somme de chaque ligne est $1 + 1 - 2 = 0$, donc le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à D et l'engendre (puisqu'on sait que $\dim(D) = 1$). Pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$, prenons $x = 3e_1$, qui n'appartient pas à D. Alors $\sin(\theta)$ est du même signe que le déterminant $\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(x, Ax, v) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 > 0$. Donc A est la rotation gauche d'anti-axe D engendré et orienté par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et d'angle $2\pi/3$.

5. (1 pt) Que peut-on dire de l'ensemble des points fixes de f ?

Solution : Comme A est une « vraie » rotation gauche, c.-à.-d. n'est pas une symétrie orthogonale, on sait que $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \{0\}$. Donc, d'après le cours, f admet un point fixe unique I.

6. (2,5 pts) Déterminer un point fixe I de f, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

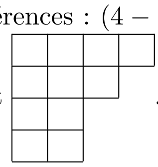
Solution : L'unique point fixe $I(x, y, z)$ est solution du système donné par $0 = \overrightarrow{If(I)} = (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T$, où $T = \overrightarrow{Of(O)}$. On obtient donc le système :

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

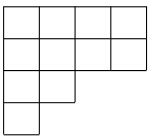
et on peut voir que $I(3, 0, 0)$ est une solution, donc la solution unique. Par conséquent, f est la rotation gauche affine de centre $I(3, 0, 0)$, d'anti-axe $\mathcal{D} = I + D$ orienté par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et d'angle $2\pi/3$.

Exercice 3. (5 pts) Soit $u \in M_{11}(\mathbb{R})$ un endomorphisme nilpotent tel que $\mathrm{rang}(u) = 7$, $\mathrm{rang}(u^2) = 4$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$ et $u^4 = 0$.

1. (2 pts) Déterminer la partition $\mathbf{q}$ associée à la suite des noyaux de u et dessiner son diagramme.

Solution : $\mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}) = \{0\}$ et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(u), \mathrm{Ker}(u^2), \mathrm{Ker}(u^3), \mathrm{Ker}(u^4)$ sont de dimensions respectives : $0, 4, 7, 9, 11$. La suite des différences : $(4 - 0 = 4, 7 - 4 = 3, 9 - 7 = 2, 11 - 9 = 2)$ donne donc la partition $\mathbf{q} = (4, 3, 2, 2)$ dont le diagramme est  .

2. (1 pt) Déterminer la partition transposée $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$.

Solution : $\mathbf{p} =$  $= (4, 4, 2, 1)$.

3. (2 pts) Écrire la matrice de la forme normale de Jordan de u.

Solution : La forme normale de Jordan de u est

$$J_{\mathbf{p}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_1 = 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dans les exercices 4 et 5, on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs, on notera X, Y les vecteurs colonnes représentant x et y dans la base $\mathcal{B}$. Toute matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ définit un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S$ et *l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ par cet endomorphisme sera simplement notée* Sx (le vecteur colonne correspondant est SX). Enfin, on rappelle que le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est défini par $(x \mid y) = {}^tXY$.

Exercice 4. (17 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard et l'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle.

1. (1,5 pt) En citant un théorème du cours, montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice $S = {}^tAA$.

Solution : On a ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = S$ donc $S \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Donc, d'après un théorème du cours, il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S.

Notant λ_i la valeur propre associée à f_i, on suppose que $\boxed{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n}$.

2. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(Ax \mid y) = (x \mid {}^tAy)$.

Solution : Notant X et Y les vecteurs colonnes représentant x et y dans la base canonique, on a $(Ax \mid y) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = (x \mid {}^tAy)$.

3. (1,5 pt) Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $(Af_i \mid Af_j) = \lambda_j(f_i \mid f_j)$. En déduire que $(Af_i \mid Af_j) = 0$ si $i \neq j$ et que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i.

Solution : On a $(Af_i \mid Af_j) = (f_i \mid {}^tAAf_j) = (f_i \mid Sf_j) = (f_i \mid \lambda_j f_j)$, et ceci est nul si $i \neq j$ (car alors $(f_i \mid f_j) = 0$) et vaut $\lambda_i(f_i \mid f_i) = \lambda_i$ si $i = j$. On obtient donc que $(Af_i \mid Af_j) = 0$ si $i \neq j$ et que $\lambda_i = \|Af_i\|^2 \geq 0$ pour tout i.

Soit r le plus grand entier tel que $\lambda_r > 0$ (et donc $\lambda_j = 0$ pour $j > r$). Pour $i = 1, \ldots, r$, posons $v_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Af_i$.

4. (2 pts) Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et que la famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_r)$ est orthonormée. En déduire que $r = \mathrm{rang}(A)$.

Solution : Pour $j > r$ on a $\|Af_j\|^2 = 0$ d'où $Af_j = 0$. On a donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(Af_1, \ldots, Af_r) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$. De plus, d'après la question précédente, $(v_i \mid v_j)$ est nul si $i \neq j$ et vaut $\|Af_i\|^2/\lambda_i = 1$ si $i = j$, donc la famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_r)$ est orthonormée, donc libre. Elle forme donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Im}(A)$, d'où $r = \mathrm{rang}(A)$.

5. (1,5 pt) Montrer que $\mathcal{F}$ se complète en une base orthonormée $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. **Indication :** considérer l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. *On pourra admettre le résultat de cette question pour continuer l'exercice.*

Solution : Comme $(\ \mid\ )$ est défini positif, on a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{F})^\perp$, et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})^\perp$ possède une base orthonormée $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$. Alors $\mathcal{D} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

6. (2 pts) Pour tout $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i$, écrire Av dans la base $\mathcal{D}$ et exprimer $\|Av\|^2$ en fonction des x_i et des λ_i, pour $i = 1, \ldots, r$.

Solution : $Av = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i Af_i = \sum_{i=1}^r x_i \sqrt{\lambda_i}\, v_i$, et comme la base $\mathcal{D}$ est orthonormée, on a donc $\|Av\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$.

7. (1 pt) Soit $d \in \{1, \ldots, r\}$. Déduire de la question précédente que si $v \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_d)$, on a $\|Av\|^2 \geq \lambda_d \|v\|^2$.

Solution : Si $v = \displaystyle\sum_{i=1}^d x_i f_i$, on a $\|Av\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i^2$, et comme $\lambda_i \geq \lambda_d$ pour $i \leq d$, on obtient $\|Av\|^2 \geq \lambda_d \displaystyle\sum_{i=1}^d x_i^2 = \lambda_d \|v\|^2$.

On fixe un entier positif $s < r$. Soit u_s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $u_s(f_i) = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ si $i \leq s$, et $u_s(f_i) = 0$ si $i > s$. Soit $A_s = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_s)$.

8. (1 pt) Déterminer, en le justifiant, le rang de A_s.

Solution : On a $\mathrm{Im}(A_s) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_s)$ et donc $\mathrm{rang}(A_s) = s$ puisque les v_i sont linéairement indépendants.

9. (1,5 pt) Pour tout $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f_i$, montrer que $\|(A - A_s)v\|^2 \leq \lambda_{s+1} \displaystyle\sum_{i=s+1}^r x_i^2 \leq \lambda_{s+1} \|v\|^2$.

Solution : $Av = \displaystyle\sum_{i=1}^r x_i \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ et $A_s v = \displaystyle\sum_{i=1}^s x_i \sqrt{\lambda_i}\, v_i$, donc $(A - A_s)v = \displaystyle\sum_{i=s+1}^r x_i \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ et $\|(A - A_s)v\|^2 = \displaystyle\sum_{i=s+1}^r \lambda_i x_i^2$, et comme $\lambda_i \leq \lambda_{s+1}$ pour $i \geq s+1$, ceci est $\leq \lambda_{s+1} \displaystyle\sum_{i=s+1}^r x_i^2$, qui est lui-même $\leq \lambda_{s+1} \|v\|^2$.

10. (2 pts) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rang}(B) \leq s$. D'une part, montrer que le sous-espace $E = \mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_{s+1})$ est non nul. D'autre part, montrer que pour tout $v \in E$ on a : $\|(A-B)v\|^2 \geq \lambda_{s+1}\|v\|^2$.

Solution : D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension $n - \mathrm{rang}(B) \geq n-s$. Comme $\dim \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_{s+1}) = s+1$, il en résulte que $\mathrm{Ker}(B) \cap \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_{s+1}) \neq 0$ (car sinon ces deux sous-espaces vectoriels seraient en somme directe, et leur somme serait de dimension $\geq n-s+s+1 = n+1$).

D'autre part, pour tout $v \in E$ on a $Bv = 0$ donc, en utilisant la question 7, on a $\|(A-B)v\|^2 = \|Av\|^2 \geq \lambda_{s+1}\|v\|^2$.

11. (2 pts) Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $|||M||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \dfrac{\|Mx\|}{\|x\|}$, ceci définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (on ne demande **pas** de démontrer cela). Montrer que pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ de rang $\leq s$, on a $|||A-B||| \geq \sqrt{\lambda_{s+1}}$, puis montrer que $\sqrt{\lambda_{s+1}} = |||A - A_s|||$.

Solution : Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ de rang $\leq s$. D'après la question 10, on a $E \neq \{0\}$ et pour tout $v \in E - \{0\}$ on a $\dfrac{\|(A-B)v\|}{\|v\|} \geq \sqrt{\lambda_{s+1}}$, ce qui entraîne $|||A-B||| \geq \sqrt{\lambda_{s+1}}$. Ceci prouve l'inégalité voulue.

En particulier, prenant $B = A_s$, on obtient $|||A - A_s||| \geq \sqrt{\lambda_{s+1}}$. D'autre part, d'après la question 9, pour tout v non nul, on a $\dfrac{\|(A-A_s)v\|}{\|v\|} \leq \sqrt{\lambda_{s+1}}$, et donc $|||A - A_s||| \leq \sqrt{\lambda_{s+1}}$. En combinant ceci avec l'inégalité précédente, on obtient $|||A - A_s||| = \sqrt{\lambda_{s+1}}$. [1]

Exercice 5. (8 pts) Soient ϕ et ϕ' deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$. On note $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $S' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi')$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. *On suppose que ϕ est non dégénérée.*

1. (2 pts) Dans cette question uniquement, on suppose qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $D' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ soient toutes deux diagonales. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Exprimer S, S', puis $S^{-1}S'$, en fonction de P et de D et D', et en déduire que $S^{-1}S'$ est diagonalisable.

Solution : On a $D = {}^tPSP$ donc $S = {}^tP^{-1}DP^{-1}$ et de même $S' = {}^tP^{-1}D'P^{-1}$. Comme ϕ est non dégénérée, S est inversible et l'on a $S^{-1} = PD^{-1}\,{}^tP$ et donc $S^{-1}S' = PD^{-1}D'P^{-1}$, et comme $D^{-1}D'$ est diagonale, ceci montre que $S^{-1}S'$ est diagonalisable.

On note $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

2. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(x \mid Sy) = \phi(x,y) = (Sx \mid y)$ et $(x \mid S'y) = \phi'(x,y) = (S'x \mid y)$.

Solution : Notons X et Y les vecteurs colonnes représentant x et y dans la base canonique $\mathcal{B}$. Comme $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$, on a $\phi(x,y) = {}^tXSY = (x \mid Sy)$ et comme $S = {}^tS$ on a aussi $(Sx \mid y) = {}^t(SX)Y = {}^tXSY = \phi(x,y)$. On montre de même que $(x \mid S'y) = \phi'(x,y) = (S'x \mid y)$.

Désormais, on suppose que $A = S^{-1}S'$ est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et pour $i = 1, \dots, r$ soit $V_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$, alors $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

3. (1 pt) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer en utilisant la question précédente que $\phi(Ax, y) = \phi'(x,y) = \phi(x, Ay)$.

Solution : Comme $S' = SA$, on a $\phi(Ax,y) = (SAx \mid y) = (S'x \mid y) = \phi'(x,y) = (x \mid S'y) = (x \mid SAy) = \phi(x, Ay)$.

4. (2 pts) Soient $i, j \in \{1, \dots, r\}$ et soient $x \in V_i$ et $y \in V_j$. En utilisant la question précédente, montrer que si $i \neq j$, alors $\phi(x,y) = 0 = \phi'(x,y)$ et si $i = j$ alors $\phi'(x,y) = \lambda_i\phi(x,y)$.

Solution : Comme $x \in V_i$ et $y \in V_j$, on a $Ax = \lambda_i x$ et $Ay = \lambda_j y$. On obtient donc

$$(\star) \qquad \lambda_i\phi(x,y) = \phi(Ax,y) = \phi'(x,y) = \phi(x,Ay) = \lambda_j\phi(x,y).$$

Si $i \neq j$ alors, comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on obtient $\phi(x,y) = 0$ puis $\phi'(x,y) = 0$. Si $i = j$, l'égalité $(\star)$ donne $\phi'(x,y) = \lambda_i\phi(x,y)$, pour tout $x, y \in V_i$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on note ϕ_i (resp. ϕ'_i) la restriction de ϕ (resp. ϕ') à V_i.

[1] Pour l'origine et des applications de cet exercice, voir : G. Allaire & S. M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique*, éditions Ellipses, page 46 et Prop. 3.2.1 page 59.

5. (2 pts) En utilisant la question 4, montrer que $\phi'_i = \lambda_i \phi_i$ pour tout i, puis montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ soient toutes deux diagonales. **Indication :** considérer dans chaque V_i une base orthogonale pour ϕ_i.

Solution : Fixons $i \in \{1, \dots, r\}$. D'après la question 4, on a $\phi'_i(x, y) = \lambda_i \phi_i(x, y)$ pour tout $x, y \in V_i$, et donc $\phi'_i = \lambda_i \phi_i$. Soit $\mathcal{C}_i$ une base de V_i orthogonale pour ϕ_i, i.e. la matrice $D_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(\phi_i)$ est diagonale. Comme $\phi'_i = \lambda_i \phi_i$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(\phi'_i)$ égale $\lambda_i D_i$ donc est encore diagonale.
D'autre part, comme $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, alors la réunion disjointe $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_i$ est une base de $\mathbb{R}^d$. De plus, d'après la question 4, les V_i sont deux à deux orthogonaux à la fois pour ϕ et pour ϕ'. Par conséquent, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ sont des matrices diagonales par blocs, dont les blocs diagonaux sont, respectivement, les D_i et les $\lambda_i D_i$. Comme ces blocs diagonaux sont eux-mêmes des matrices diagonales, on obtient donc que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi')$ sont toutes deux diagonales.