Université Pierre et Marie Curie 2012–2013
LM270, Corrigé de l'examen 2ème session du 5 juin 2013 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Lorsqu'un calcul est demandé, détaillez les étapes en indiquant les opérations effectuées. Un résultat correct mais non justifié ne donnera qu'une partie des points. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **7** exercices et est noté sur **50**. Les exercices 1 à 6 sont indépendants ; l'exercice 7 utilise l'exercice 6.

Exercice 1. (4,5 pts) En utilisant l'algorithme de Gauss, écrire les formes quadratiques ci-dessous comme « somme de carrés » de formes linéaires indépendantes et déterminer leur signature.

1. (2,5 pts) q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = 2xy + 3xz + 5yz$.

Solution : On choisit deux variable, disons x et y.
1ère méthode. On fait le changement de variable $x = X + Y$, $y = X - Y$. Alors $q(X, Y, z)$ égale :

$$2(X^2 - Y^2) + 3(X + Y)z + 5(X - Y)z = 2X^2 + 8Xz - 2Y^2 - 2Yz = 2\Big((\underbrace{X + 2z}_{X'})^2 - 4z^2\Big) - 2\Big((\underbrace{Y + \frac{z}{2}}_{Y'})^2 - \frac{z^2}{4}\Big)$$
$$= 2X'^2 - 2Y'^2 - \frac{15}{2}z^2$$

donc $\operatorname{sign}(q) = (1, 2)$.

2ème méthode. On écrit $q(x, y, z) = 2\big(\underbrace{x + \frac{5z}{2}}_{x'}\big)\big(\underbrace{y + \frac{3z}{2}}_{y'}\big) - \frac{15}{2}z^2$, puis on fait le changement de variable $x' = X' + Y'$ et $y' = X' - Y'$. On obtient $q(X', Y', z) = 2X'^2 - 2Y'^2 - \frac{15}{2}z^2$, donc $\operatorname{sign}(q) = (1, 2)$.

2. (2 pts) Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $Q(t, x, y, z) = t^2 + x^2 + y^2 + 2tx + 2ty + 4xy + 3xz + 5yz$.

Solution : Prenons le terme t^2 ainsi que tous les termes contenant t, et écrivons que

$$t^2 + 2tx + 2ty = (\underbrace{t + x + y}_{T})^2 - x^2 - y^2 - 2xy.$$

Alors $Q(T, x, y, z) = T^2 + q(x, y, z)$, où q est la forme quadratique de la question 1. Donc $\operatorname{sign}(Q) = (2, 2)$ car en faisant le même changement de variable que dans la question 1, on a $Q(T, X', Y', z) = T^2 + 2X'^2 - 2Y'^2 - \frac{15}{2}z^2$.

Exercice 2. (9,5 pts) Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension 3. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire sur E. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans ce repère. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application affine qui à tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y - \sqrt{2}z \\ -\sqrt{2}x + y - z \\ -\sqrt{2}x - y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, et soit $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. (0,5 pt) Déterminer la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$. On notera C_1, C_2, C_3 ses colonnes.

Solution : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puisque, pour tout $M(x, y, z)$, on a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \overrightarrow{OM}$.

2. (1 pt) En calculant explicitement les produits scalaires $(C_i \mid C_j)$, pour $1 \leq i \leq j \leq 3$, montrer que $A \in O(3)$.

Solution : $(C_1 \mid C_1) = (2 + 2)/4 = 1$, $(C_2 \mid C_2) = (2 + 1 + 1)/4 = 1 = (C_3 \mid C_3)$, puis $4(C_1 \mid C_2) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 = 4(C_1 \mid C_3)$ et $4(C_2 \mid C_3) = 2 - 1 - 1 = 0$. Donc $A \in O(3)$.

3. (1,5 pt) Déterminer la valeur de $\det(A)$.

Solution : Comme $A \in O(3)$, on sait que le coefficient a_{33}, valant ici $1/2$, est égal à dét(A) fois le mineur $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, qui vaut ici $-2/4 = -1/2$. Donc dét$(A) = -1$.

4. (2 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de A.

Solution : D'après ce qui précède, A est une rotation gauche $\neq -I_3$, donc une symétrie tournée d'anti-axe $D = \mathrm{Ker}(A+I_3)$ et d'angle θ à déterminer. On a $1 = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{dét}(A)+2\cos(\theta)$ d'où $\cos(\theta) = 1$ et donc $\theta = 0$, donc A est la symétrie orthogonale par rapport au plan $P = D^{\perp}$. (On pouvait aussi voir cela en disant que A est symétrique, donc est la matrice d'une symétrie orthogonale.) Déterminons $D = \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Ker}(2A + 2I_3)$. On a :

$$\begin{pmatrix} 2A+2I_3 \\ \hline I_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \to C_3 - C_2]{C_1 \to C_1 + \sqrt{2}C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -4 \\ -2\sqrt{2} & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + \sqrt{2}C_1} \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc D est engendrée par le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $P = D^{\perp}$ est le plan vectoriel d'équation $\sqrt{2}x + y + z = 0$, et A est la symétrie orthogonale par rapport à P.

5. (2 pts) Déterminer le vecteur $T = \overrightarrow{Of(O)}$, puis l'écrire $T = v + u$, avec $u \in P = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $v \in P^{\perp}$.

Solution : On a $T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et sa projection sur $P^{\perp} = D = \mathbb{R}\overrightarrow{n}$ est donnée par :

$$v = \frac{(T \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n} = \frac{2+2+4}{2+1+1}\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puis $u = T - v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. (2,5 pts) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points fixes de $g = t_{-u} \circ f$, puis déterminer les caractéristiques géométriques de f.

Solution : D'abord, comme $\overrightarrow{t_u} = \mathrm{id}$, alors $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan P. Donnons deux méthodes pour déterminer les points fixes $I(x, y, z)$ de g.

1ère méthode. Le vecteur $\overrightarrow{Og(O)} = T - u = v$ appartient à $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$g(O + \lambda v) = g(0) + A(\lambda v) = O + v - \lambda v = O + (1 - \lambda)v,$$

et l'on voit que $\lambda = 1-\lambda$ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, donc le point $I = O+\frac{1}{2}v = 0+\overrightarrow{n}$ est un point fixe de g. D'après le cours, on sait alors que l'ensemble des points fixes de g est le plan affine $\mathcal{P} = I+P$. De plus, comme $(\overrightarrow{OI} \mid \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n}) = 4$, on obtient que $\mathcal{P}$ est le plan affine d'équation $\sqrt{2}x + y + z = 4$.

2ème méthode. Les points fixes $I(x, y, z)$ de g sont les solutions du système $0 = \overrightarrow{Ig(I)} = (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T - u$, i.e. $2(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2(u - T) = -2v$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} -2x - \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}x - y - z = -4 \\ -\sqrt{2}x - y - z = -4 \end{cases}$$

dans lequel $L_2 = L_3$ et $L_1 = \sqrt{2}L_2$, donc ce système équivaut à l'équation $\sqrt{2}x + y + z = 4$, et l'on trouve bien le plan affine de direction P, qui passe par le point $I(\sqrt{2}, 1, 1) = O + \overrightarrow{n}$ (ou, par exemple, par le point $J(\sqrt{2}, 2, 0)$).

Enfin, comme $u \in P$, alors $f = t_u \circ g$ est la symétrie orthogonale glissée par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ et de vecteur de glissement u.

Exercice 3. (7 pts) Déterminez s'il existe un endomorphisme nilpotent u de $\mathbb{R}^{12}$ vérifiant les conditions 1. ou 2. ci-dessous : donnez une justification en cas de réponse négative (2 pts), et en cas de réponse positive, déterminez la matrice de la forme normale de Jordan de u (4 pts) puis montrez que u vérifie bien les conditions données (1 pt).

1. $\mathrm{rang}(u) = 9$, $\mathrm{rang}(u^2) = 5$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$, $u^4 = 0$.

Solution : D'après le théorème du rang, les dimensions des $\mathrm{Ker}(u^i)$ sont données par le tableau suivant (on rappelle que $u^0 = \mathrm{id}$ donc $\mathrm{Ker}(u^0) = \{0\}$) :

i	0	1	2	3	4
$\dim \mathrm{Ker}(u^i)$	0	$12-9=3$	$12-5=7$	$12-2=10$	12

donc la suite des dimensions des noyaux est $(0, 3, 7, 10, 12)$ et donc la suite des différences successives est :

$$(3-0, 7-3, 10-7, 12-10) = (3, 4, 3, 2).$$

Cette suite n'est *pas décroissante*, i.e. n'est pas une partition, donc un tel u ne peut pas exister.

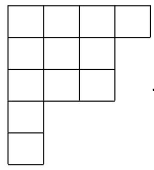
2. $\mathrm{rang}(u) = 8$, $\mathrm{rang}(u^2) = 5$, $\mathrm{rang}(u^3) = 2$, $\mathrm{rang}(u^4) = 1$, $u^5 = 0$.

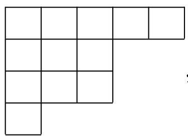
Solution : D'après le théorème du rang, les dimensions des $\mathrm{Ker}(u^i)$ sont données par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5
$\dim \mathrm{Ker}(u^i)$	0	$12-8=4$	$12-5=7$	$12-2=10$	$12-1=11$	12

donc la suite des dimensions des noyaux est $(0, 4, 7, 10, 11, 12)$ et donc la suite des différences successives est :

$$(4-0, 7-4, 10-7, 11-10, 12-11) = (4, 3, 3, 1, 1).$$

Cette suite est décroissante et forme une partition $\mathbf{q}$ de 12, dont le diagramme est :  . Sa transposée

$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{q}}$ a pour diagramme  , donc $\mathbf{p} = (5, 3, 3, 1)$. Considérons alors la matrice de Jordan :

$$J_{\mathbf{p}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_1 = 0 \end{array}\right)$$

où $J_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{12}$ défini par $J_{\mathbf{p}}$. D'après le cours, on sait que la partition associée à la suite des noyaux de u est $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{q} = (4, 3, 3, 1, 1)$, donc les dimensions des $\mathrm{Ker}(u^i)$ sont données par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5
$\dim \mathrm{Ker}(u^i)$	0	4	$4+3=7$	$7+3=10$	$10+1=11$	$11+1=12$

et donc u convient, et sa forme normale de Jordan est $J_{\mathbf{p}}$.

Exercice 4. (7 pts) Soit $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2)$ un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, qui est orthonormée. On note (x_1, x_2) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}_\lambda = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{P} \mid x_2^2 + (1-\lambda)x_1^2 - 2x_1 = 0\}$.

1. (0,5 pt) Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_2^2 + (1-\lambda)x_1^2$, et soit ϕ sa forme polaire. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Solution : On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et son déterminant est $\Delta = 1 - \lambda$.

2. (1,5 pt) Déterminer en fonction de λ la nature de $\mathcal{C}_\lambda$ (ellipse, parabole ou hyperbole).

Solution : On sait que : $\begin{cases} \mathcal{C}_\lambda \text{ est une hyperbole} & \Leftrightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 1 \\ \mathcal{C}_\lambda \text{ est une parabole} & \Leftrightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \\ \mathcal{C}_\lambda \text{ est une ellipse} & \Leftrightarrow \quad \Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 1. \end{cases}$

3. (1,5 pt) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole (resp. ellipse), écrire son équation sous la forme $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ (resp. $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$), où $Y = x_2$ et $X = x_1 - t$ avec $t \in \mathbb{R}$ à préciser, et donner dans chaque cas les valeurs de a, b.

Solution : On suppose $\lambda \neq 1$. Alors

$$(1-\lambda)x_1^2 - 2x_1 = (1-\lambda)\Big(x_1 - \frac{1}{1-\lambda}\Big)^2 - \frac{1}{1-\lambda}$$

et donc, en posant $X = x_1 - \dfrac{1}{1-\lambda}$ et $Y = x_2$, l'équation de $\mathcal{C}_\lambda$ se récrit : $(1-\lambda)X^2 + Y^2 = \dfrac{1}{1-\lambda}$, soit :

$$(1-\lambda)^2X^2 + (1-\lambda)Y^2 = 1.$$

Distinguons maintenant les deux cas. Si $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole, i.e. si $\lambda > 1$, on a $\lambda - 1 > 0$ et l'équation se récrit :

(Hyperbole) $$(\lambda-1)^2X^2 - (\lambda-1)Y^2 = 1 = \frac{X^2}{\frac{1}{(\lambda-1)^2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{(\sqrt{\lambda-1})^2}} = 1,$$

donc $b = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda-1}}$ et $a = \dfrac{1}{\lambda-1} = b^2$.

Si $\mathcal{C}_\lambda$ est une ellipse, i.e. si $\lambda < 1$, on a $1 - \lambda > 0$ et l'équation se récrit :

(Ellipse) $$(1-\lambda)^2X^2 + (1-\lambda)Y^2 = 1 = \frac{X^2}{\frac{1}{(1-\lambda)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{(\sqrt{1-\lambda})^2}} = 1,$$

donc $b = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$ et $a = \dfrac{1}{1-\lambda} = b^2$.

4. (1 pt) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une hyperbole, donner, en fonction de X et Y, les équations des deux asymptotes de $\mathcal{C}_\lambda$.

Solution : En général, les asymptotes sont données par $\dfrac{X^2}{a^2} = \dfrac{Y^2}{b^2}$, i.e. $X = \pm\dfrac{a}{b}Y$, et comme ici $a = b^2$, on obtient $X = \pm b\,Y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\,Y$.

5. (2,5 pts) Quand $\mathcal{C}_\lambda$ est une ellipse, déterminer la valeur λ_0 pour laquelle $\mathcal{C}_{\lambda_0}$ est un cercle, dont on donnera l'équation en fonction de X et Y. Puis, pour $\lambda \neq \lambda_0$, donner les coordonnées (X, Y) de chacun des 4 sommets de l'ellipse et déterminer quel est le grand axe (axe focal) de $\mathcal{C}_\lambda$ (on distinguera les cas $\lambda > \lambda_0$ et $\lambda < \lambda_0$).

Solution : $\mathcal{C}_\lambda$ est un cercle si et seulement si $b = a = b^2$, et comme $b \neq 0$ ceci est le cas si et seulement si $b = 1$, i.e. si $\lambda = 0$. Donc, pour $\lambda_0 = 0$, on obtient le cercle $\mathcal{C}_0$ d'équation $X^2 + Y^2 = 1$.

Lorsque $\lambda \neq 0$, les 4 sommets de l'ellipses sont donnés par : $X = 0$ et $Y = \pm b$, d'une part, et $Y = 0$ et $X = \pm a = \pm b^2$, d'autre part.

Pour déterminer le grand axe (axe focal), il faut voir lequel des deux, entre a et b, est le plus grand, i.e. voir si a/b est > 1 ou < 1. Ici, $a = b^2$ donc $b/a = 1/b = \sqrt{1-\lambda}$, et ceci est > 1 si et seulement si $1 - \lambda > 1$, i.e. si $\lambda < 0 = \lambda_0$. Par conséquent, si $0 < \lambda < 1$, le grand axe est l'axe des X, puis pour $\lambda = 0$ on obtient un cercle, puis pour $\lambda < 0$ le grand axe est l'axe des Y.

Exercice 5. (7,5 pts) Soient $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ la base canonique, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, π la projection orthogonale sur E, $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base arbitraire de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soient $\phi = (\ |\ )_E$ la restriction de $(\ |\ )$ à E et $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, d'où $G = (g_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$, avec $g_{i,j} = (v_i \mid v_j)$.

1. (1,5 pt) Soient $\mathcal{C}_0$ une base orthonormée de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{C})$. Exprimer G en fonction de P, et en déduire que $\mathrm{dét}(G) > 0$.

Solution : Comme $\mathcal{C}_0$ est une base orthonormée de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_0}(\phi) = I_p$ et donc $G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ égale ${}^tPI_pP = {}^tPP$. Comme $\mathrm{dét}({}^tP) = \mathrm{dét}(P)$, on a donc $\mathrm{dét}(G) = \mathrm{dét}(P)^2 > 0$.

2. (1,5 pt) À tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on associe le vecteur $X = \begin{pmatrix} (v_1 \mid Y) \\ \vdots \\ (v_p \mid Y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. En le justifiant, exprimer X en fonction de M et Y.

Solution : Pour tout $i = 1, \dots, p$, soit $V_i \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne exprimant v_i dans la base $\mathcal{B}$. Alors, d'une part, $(v_i \mid Y) = {}^tV_iY$ et, d'autre part, M a pour colonnes $V_1, \dots, V_p$, donc ${}^tM$ a pour lignes ${}^tV_1, \dots, {}^tV_p$. On en déduit que $X = {}^tMY$.

3. (2 pts) On pose $\pi(Y) = t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$. En calculant $(v_i \mid \sum_{j=1}^{p} t_jv_j)$, pour $i = 1, \dots, p$, montrer que $X = GT$.

Solution : D'abord, comme $\pi(Y)$ est la projection orthogonale de Y sur E, alors pour $i = 1, \dots, p$ on a $(v_i \mid Y) = (v_i \mid \pi(Y))$, puisque $Y - \pi(Y)$ est orthogonal à E donc aux v_i. Donc, pour $i = 1, \dots, p$, on a

$$(v_i \mid Y) = (v_i \mid \pi(Y)) = (v_i \mid \sum_{j=1}^{p} t_jv_j) = \sum_{j=1}^{p} t_j(v_i \mid v_j) = \sum_{j=1}^{p} g_{i,j}t_j$$

et ceci montre que $X = GT$.

4. (1 pt) Déduire des questions précédentes une formule exprimant T en fonction de Y, M et G.

Solution : D'après la question 1., G est inversible, donc les égalités $X = {}^tMY = GT$ entraînent $T = G^{-1}\,{}^tMY$.

5. (1,5 pt) On prend $n = 4$, $p = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice G et calculer G^{-1} ; puis, prenant $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, déterminer les réels t_1, t_2 tels que $\pi(Y) = t_1v_1 + t_2v_2$.

Solution : On a $(v_1 \mid v_1) = 4$, $(v_1 \mid v_2) = 6$ et $(v_2 \mid v_2) = 14$, donc $G = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$, $\mathrm{dét}(G) = 56 - 36 = 20$, et $G^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On a aussi ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc, d'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = G^{-1}\,{}^tMY = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Explication. Ce qui précède est utilisé pour faire de la « régression linéaire », c.-à.-d., étant donnés n points $A_i(x_i, y_i)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, déterminer la droite affine Δ_0 qui approxime le mieux ces points, au sens suivant. À toute droite affine Δ d'équation $y = ax + b$, on associe le réel ≥ 0 ci-dessous :

$$d(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

c.-à.-d., la somme, pour $i = 1, \dots, n$, du carré de la distance entre le point donné $A_i(x_i, y_i)$ et le point correspondant $B_i(x_i, b + ax_i)$ de Δ d'abscisse x_i. On voit que $d(\Delta)$ est le carré de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (où n = nombre de points) du vecteur

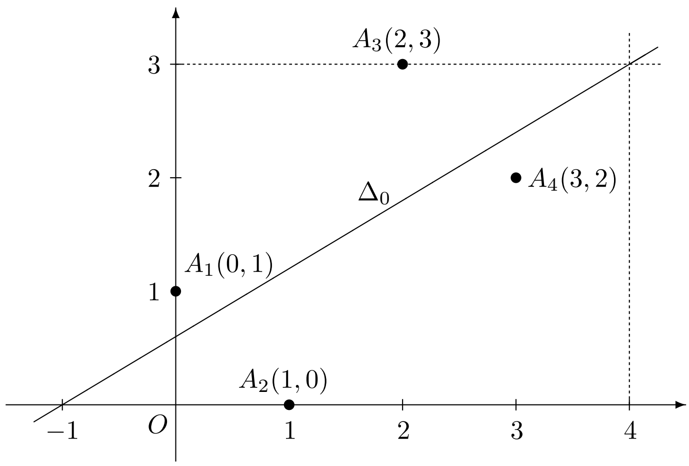
$$Y - bv_1 - av_2, \qquad \text{où} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par v_1 et v_2 et soit $\pi(Y)$ la projection orthogonale de Y sur E. Pour toute droite affine Δ d'équation $y = b + ax$, correspondant au vecteur $bv_1 + av_2$ de E, le vecteur $\pi(Y) - bv_1 - av_2$ appartient à E donc est orthogonal à $Y - \pi(Y)$ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$d(\Delta) = \|Y - bv_1 - av_2\|^2 = \|Y - \pi(Y)\|^2 + \|\pi(Y) - bv_1 - av_2\|^2 \geq \|Y - \pi(Y)\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $bv_1 + av_2 = \pi(Y)$. Par conséquent, il existe une unique droite affine Δ_0 telle que $d(\Delta_0)$ soit minimum : c'est la droite d'équation $y = t_1 + t_2x$, où $t_1v_1 + t_2v_2$ est la projection orthogonale de $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sur $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et d'après la question 5.4, t_1, t_2 sont donnés par la formule $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = G^{-1}\,{}^tMY$.

Sous les hypothèses de la question 5.5, on a $n = 4$ et l'on se donne les 4 points $A_i(x_i, y_i)$, pour $i = 1, 2, 3, 4$, où $v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, voir la figure ci-dessous. Alors la droite « qui passe le plus près possible » de ces points est la droite Δ_0 d'équation $y = t_1 + t_2x$, où $t_1 = t_2 = 3/5$, i.e. $5y = 3(x + 1)$:



Exercice 6. (7 pts) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E(\lambda)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire $\boxed{u_n - \lambda u_{n+1} + u_{n+2} = 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (1,5 pt) Sous quelle condition sur λ existe-t-il $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{C}$ tels que les deux suites géométriques $\underline{\alpha} = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\underline{\beta} = (\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E(\lambda)$? Déterminer dans ce cas $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$.

<u>Solution</u> : Une suite géométrique $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E(\lambda)$ si et seulement si z est racine du polynôme $X^2 - \lambda X + 1$. Donc $E(\lambda)$ contient deux suites géométriques distinctes si et seulement si ce polynôme a dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes, i.e. si et seulement si son discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$ est non nul, ce qui équivaut à $\lambda \neq \pm 2$. Dans ce cas, la factorisation $X^2 - \lambda X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ donne $\alpha\beta = 1$, d'où $\beta = \alpha^{-1}$, et $\lambda = \alpha + \beta$.

On suppose la condition précédente vérifiée et l'on fixe un entier $N \geq 2$. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on rappelle que $z^0 = 1$, et si $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), on note $\mathcal{I}m(z) = b$ sa partie imaginaire.*

2. (1,5 pt) Montrer que $E_0(\lambda) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\lambda) \mid u_0 = 0\}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, et en donner un générateur qu'on exprimera en fonction de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

<u>Solution</u> : Comme $E(\lambda)$ est de dimension 2 et contient les suites $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$, qui sont linéairement indépendantes, celles-ci forment une base de $E(\lambda)$. Tout élément $u \in E(\lambda)$ s'écrit donc de façon unique $u = z\,\underline{\alpha} + z'\,\underline{\beta}$, avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

Comme $\alpha^0 = 1 = \beta^0$, la condition $u_0 = 0$ équivaut à $z' = -z$. Par conséquent, $E_0(\lambda)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, engendré par la suite $u = \underline{\alpha} - \underline{\beta}$ (i.e. $u_n = \alpha^n - \beta^n = \alpha^n - \alpha^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

3. (2,5 pts) Sous quelle condition sur α et β a-t-on $v_{N+1} = 0$ pour toute suite $v \in E_0(\lambda)$? Déterminer dans ce cas les couples possibles (α, β), en prenant $\mathcal{I}m(\alpha) > 0 > \mathcal{I}m(\beta)$, et les valeurs possibles pour λ. (On trouvera N couples (α_k, β_k), pour $k = 1, \dots, N$, donnant N valeurs distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_N$).

Solution : Comme $E_0(\lambda)$ est engendré par la suite u introduite à la question précédente, la condition $v_{N+1} = 0$ pour tout $v \in E_0(\lambda)$ équivaut à $0 = u_{N+1} = \alpha^{N+1} - \alpha^{-N-1}$, i.e. à $\alpha^{2(N+1)} = 1$. Donc α doit être une racine $2(N+1)$-ième de l'unité, donc de la forme $\exp\big(2ik\pi/2(N+1)\big) = \exp\big(ik\pi/(N+1)\big)$ et alors $\beta = \alpha^{-1} = \overline{\alpha} = \exp\big(-ik\pi/(N+1)\big)$, a priori pour $k = 0, 1, \dots, 2(N+1) - 1$. Mais $k = 0$ et $k = N+1$ sont exclus car on aurait $\alpha = \pm 1 = \beta$, qui est exclu. De plus, la partie imaginaire de $\exp\big(ik\pi/(N+1)\big)$ est $\sin\big(k\pi/(N+1)\big)$, qui est > 0 si et seulement si $0 < \dfrac{k\pi}{N+1} < \pi$, i.e. si $k = 1, \dots, N$. On trouve donc les couples $(\alpha_k, \beta_k) = (\exp\big(\dfrac{ik\pi}{N+1}\big), \exp\big(\dfrac{-ik\pi}{N+1}\big))$ et les valeurs $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k = 2\cos\big(\dfrac{k\pi}{N+1}\big)$, pour $k = 1, \dots, N$. Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les λ_k sont bien deux à deux distincts.

4. (1,5 pt) On fixe $k \in \{1, \dots, N\}$ et l'on rappelle que $\mathcal{I}m(\alpha_k) > 0 > \mathcal{I}m(\beta_k)$. Soit $x_k = (x_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique élément de $E_0(\lambda_k)$ tel que $x_{k,1} = \dfrac{\alpha_k - \beta_k}{2i}$ (où $i^2 = -1$) ; écrire explicitement le vecteur $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

Solution : On a $x_k = z(\underline{\alpha_k} - \underline{\beta_k})$ pour un certain $z \in \mathbb{C}^\times$, et $x_1 = (\alpha_k - \beta_k)/2i$ donne $z = 1/2i$. Donc, pour tout n, on a $x_{k,n} = \dfrac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{2i} = \dfrac{1}{2i}\Big(\exp\big(\dfrac{ink\pi}{N+1}\big) - \exp\big(\dfrac{-ink\pi}{N+1}\big)\Big) = \sin\big(\dfrac{nk\pi}{N+1}\big)$ et donc on a $X_k = \begin{pmatrix} \sin\big(\frac{k\pi}{N+1}\big) \\ \sin\big(\frac{2k\pi}{N+1}\big) \\ \vdots \\ \sin\big(\frac{Nk\pi}{N+1}\big) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

Exercice 7. (7,5 pts) Soient N un entier ≥ 2 et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_N(\mathbb{R})$, i.e. les coefficients juste au-dessus et en-dessous de la diagonale valent 1, et tous les autres sont nuls. Par ailleurs, on note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^N$, défini par $(X \mid Y) = {}^tXY$.

1. (1 pt) Citer un théorème du cours qui assure que A est diagonalisable dans $M_N(\mathbb{R})$.

Solution : A est une matrice symétrique à coefficients réels, donc A est diagonalisable, et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire standard $(\ \mid\ )$ sur $\mathbb{R}^N$.

2. (3 pts) Pour $k = 1, \dots, N$, soient λ_k et $X_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ comme dans les questions 6.3 et 6.4. En écrivant le système $(A - \lambda_k I_N)\begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,N} \end{pmatrix} = 0$ et en utilisant l'exercice 6, montrer que X_k est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_k. En déduire que A a N valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ que l'on précisera.

Solution : L'égalité $\begin{pmatrix} -\lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,N-1} \\ x_{k,N} \end{pmatrix} = 0$ équivaut au système :

$$\begin{cases} -\lambda_k x_{k,1} + x_{k,2} = 0 \\ x_{k,1} - \lambda x_{k,2} + x_{k,3} = 0 \\ \cdots \\ x_{k,N-2} - \lambda x_{k,N-1} + x_{k,N} = 0 \\ x_{k,N-1} - \lambda x_{k,N} = 0. \end{cases}$$

En posant $x_{k,0} = 0 = x_{k,N+1}$, ceci équivaut aux relations $x_{k,i} - \lambda_k x_{k,i+1} + x_{k,i+2} = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, N-1$, qui sont vérifiées puisque, par construction, les $x_{k,i}$ pour $i = 0, \ldots, N+1$ sont les $N+2$ premiers termes d'une suite $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $x_{k,n} - \lambda_k x_{k,n+1} + x_{k,n+2} = 0$.

Ceci montre que X_k est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_k. On obtient ainsi que $\lambda_k = 2\cos\big(\dfrac{k\pi}{N+1}\big)$ est valeur propre de A, pour $k = 1, \ldots, N$. Comme ces N valeurs propres sont deux à deux distinctes, ce sont les seules valeurs propres de A, et chaque espace propre V_{λ_k} est de dimension 1, engendré par le vecteur X_k.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^N$ définie par $q(x_1, \ldots, x_N) = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1}$, et soit ϕ sa forme polaire.

3. (0,5 pt) Écrire la matrice B de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Solution : On a $B = A$.

4. (1,5 + 1,5 = 3pts) En utilisant les questions précédentes déterminer, en le justifiant, la signature de q lorsque $N = 2p$ est pair, et lorsque $N = 2p+1$ est impair.

Solution : D'après le théorème de diagonalisation simultanée, la signature de q est le couple (r, s), où r (resp. s) est le nombre de valeurs propres de A qui sont > 0 (resp. < 0). Or, sur $[0, \pi]$, la fonction cos est > 0 sur $[0, \pi/2[$, s'annule en $\pi/2$, et est < 0 sur $]\pi/2, \pi]$. Donc, pour $k \in \{1, \ldots, N\}$, on obtient que $\lambda_k = \cos\big(\dfrac{k\pi}{N+1}\big)$ est > 0 (resp. < 0) si et seulement si $k < (N+1)/2$ (resp. $k > (N+1)/2$), et que $\lambda_k = 0$ n'est possible que si N est impair et $k = (N+1)/2$. Par conséquent, si $N = 2p$ (resp. $N = 2p+1$), alors $(N+1)/2$ égale $p + (1/2)$ (resp. $p+1$), et l'on obtient que :

(a) Si $N = 2p$, alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont > 0, tandis que $\lambda_{p+1}, \ldots \lambda_{2p}$ sont < 0, donc la signature est (p, p).

(b) Si $N = 2p+1$, alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont > 0, puis $\lambda_{p+1} = 0$, et $\lambda_{p+2}, \ldots \lambda_{2p+1}$ sont < 0, donc la signature est encore (p, p).