Université Pierre et Marie Curie 2011–2012
LM270, Corrigé de l'examen du 8/6/2012 (3h)

Exercice 1 (11 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. On note $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = 1$ et soient P la direction de $\mathcal{P}$ et σ la partie linéaire de s.

1. (5 pts) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à P, puis choisir un point $I \in \mathcal{P}$ et pour tout point $M = (x, y, z)$ calculer le vecteur $\overrightarrow{Is(M)}$ puis déterminer les coordonnées (x', y', z') du point $M' = s(M)$.

Solution : D'après le cours, le plan vectoriel P est donné par l'équation $x + 2y - z = 0$, i.e. c'est l'ensemble des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(X \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = 0$, donc le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à P. (Donc on peut **lire sur l'équation** de $\mathcal{P}$ un vecteur orthogonal à la direction P de $\mathcal{P}$.) Notons que $(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n}) = 1 + 4 + 1 = 6$. D'autre part, la partie linéaire σ de s n'est autre que la symétrie orthogonale par rapport à P. Le point $I = (1, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{P}$, donc $s(I) = I$. Donc pour tout $M = (x, y, z)$, on a

$$\overrightarrow{Is(M)} = \overrightarrow{s(I)s(M)} = \sigma(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM} - \frac{2(\overrightarrow{IM} \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n}.$$

Comme $\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $(\overrightarrow{IM} \mid \overrightarrow{n}) = x - 1 + 2y - z$ et donc

$$\overrightarrow{Is(M)} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x+2y-z-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-2y+z-2 \\ -2x-y+2z+2 \\ x+2y+2z-1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \overrightarrow{Os(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{Is(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{Is(M)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-2y+z+1 \\ -2x-y+2z+2 \\ x+2y+2z-1 \end{pmatrix}.$$

Soit t_w la translation de vecteur $w = 3e_2$ et soit $g = t_w \circ s$.

2. (2 pts) Déterminer les projections orthogonales v et u de w sur $D = P^\perp$ et P respectivement.

Solution : On a $v = \dfrac{(w \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n} = \dfrac{6}{6}\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}$, et $u = w - v = w - \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de g.

Solution : D'après le cours, on sait que g est une symétrie glissée par rapport à un plan affine $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$, donc d'équation $x + 2y - z = c$ pour une certaine constante c à déterminer, et de vecteur de glissement $u \in P$. Pour déterminer $\mathcal{P}'$, on a deux méthodes.

1ère méthode. $\mathcal{P}'$ est l'ensemble des points fixes de la symétrie orthogonale $f = t_{-u} \circ g = t_v \circ s$, donc on cherche l'ensemble des points $J = (x, y, z)$ vérifiant $J = s(J) + v$, c.-à.-d., $\overrightarrow{Js(J)} = -v = -\overrightarrow{n}$. D'après la question précédente, on a $\overrightarrow{Js(J)} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -x-2y+z+1 \\ -2x-4y+2z+2 \\ x+2y-z-1 \end{pmatrix}$, donc faisant le produit scalaire avec $\overrightarrow{n}$, on trouve

$$-6 = \frac{1}{3}\Big(-x - 2y + z + 1 + 2(-2x - 4y + 2z + 2) - (x + 2y - z - 1)\Big) = \frac{1}{3}(-6x - 12y + 6z + 6)$$

d'où $3 = x + 2y - z - 1$, donc $x + 2y - z = 4$ est l'équation de $\mathcal{P}'$.

2ème méthode. On sait que $\mathcal{P}'$ est l'unique plan affine de direction P stable par $f = t_v \circ s$, donc il suffit de trouver un tel plan. Or on voit que le plan $\mathcal{P}' = t_{v/2}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} + v/2$ convient : en effet, il est transformé par s en $\mathcal{P} + \sigma(v/2) = \mathcal{P} - v/2$, puis quand on applique la translation t_v, on revient sur $\mathcal{P} - \frac{1}{2}v + v = \mathcal{P} + \frac{1}{2}v$. Donc $\mathcal{P}'$ est le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par le point $I' = I + (v/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; on a $(\overrightarrow{OI'} \mid \overrightarrow{n}) = (1/2)(3 + 2 \times 2 - (-1)) = 8/2 = 4$, donc l'équation de $\mathcal{P}'$ est $x + 2y - z = 4$.

Exercice 2 (14 pts)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. (1 pt) Soit r la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle $\pi/4$. Écrire la matrice $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$.

Solution : D'abord, on rappelle le tableau suivant, qu'il faut connaître :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Ensuite, la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe engendré et orienté par e_3 et d'angle θ est : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc ici on a $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1 pt) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}(3)$.

Solution : Les colonnes de A sont les vecteurs e_3, e_1, e_2 (dans cet ordre), qui sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, donc $A \in O(3)$. On voit facilement que $\mathrm{dét}(A) = 1$, donc $A \in \mathrm{SO}(3)$.

3. (2 pts) Écrire la matrice $B = RA$ et montrer que $B \in \mathrm{SO}(3)$.

Solution : Comme $A, R \in \mathrm{SO}(3)$ et que $\mathrm{SO}(3)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, alors $B = RA$ appartient à $\mathrm{SO}(3)$. D'autre part,

$$RA = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (4 pts) Déterminer les caractéristiques géométriques de B. (On déterminera l'angle θ par la valeur de $\cos(\theta)$ et le signe de $\sin(\theta)$.)

Solution : $B \in \mathrm{SO}(3)$ et $B \neq I_3$ donc B est une rotation d'axe $D = \mathrm{Ker}(B - I_3)$ et d'angle θ à déterminer. On a $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{Tr}(B) = \sqrt{2}/2$ donc $\cos(\theta) = (\sqrt{2} - 2)/4$. On a

$$\left(\frac{B - I_3}{I_3}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & (\sqrt{2}-2)/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc} -1 & \sqrt{2}/2 & -(\sqrt{2}+2)/2 \\ 0 & (\sqrt{2}-2)/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Remarquons que $\sqrt{2} + 2 = (1 + \sqrt{2})\sqrt{2}$ et que $(\sqrt{2} - 2)(1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 2 + 2 = -\sqrt{2}$, donc en faisant $C_3 \to C_3 + (1 + \sqrt{2})C_2$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}-2)/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc D est engendré par le vecteur $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et on choisit ce vecteur pour orienter D.

Remarque. Des vecteurs f' orientant D et donnant la même orientation (i.e. tels que $f' = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\times}$) sont les suivants :

$$f' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = (\sqrt{2}-1)f, \qquad \begin{pmatrix} 1-(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) \\ 1-(1/\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}f' = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})f.$$

Alors $x = e_1$ n'appartient pas à D et donc le signe de $\sin(\theta)$ est celui de :

$$\mathrm{dét}_{\mathcal{B}}(e_1, Be_1, f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+\sqrt{2}).$$

Donc $\sin(\theta) < 0$ et donc B est la rotation d'axe engendré et orienté par $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = (\sqrt{2}-2)/4$ et $\sin(\theta) < 0$.

5. (4 pts) Soient $S \in O(3)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = SBS^{-1} = B'$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base orthonormée directe, où f_3 appartient à $\mathrm{Ker}(B - I_3)$ et l'oriente comme dans la question précédente. Pour $i = 1, 2, 3$, soit $f'_i = Sf_i$. Exprimer $u(f'_i)$ dans la base $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ et en déduire la nature et les caractéristiques géométriques de u. (Pour l'angle θ' de u, on distinguera les cas $S \in \mathrm{SO}(3)$ et $S \in O^-(3)$; lorsque $S \in O^-(3)$ on pourra remplacer $\mathcal{C}'$ par la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ ou bien $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$.)

Solution : Soit b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par B. D'après le choix de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(b) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où θ est l'angle déterminé à la question précédente. D'autre part, pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$u(f'_i) = SBS^{-1}Sf_i = SBf_i = \begin{cases} S(\cos(\theta)f_1 + \sin(\theta)f_2) = \cos(\theta)f'_1 + \sin(\theta)f'_2 & \text{si } i = 1, \\ S(-\sin(\theta)f_1 + \cos(\theta)f_2) = -\sin(\theta)f'_1 + \cos(\theta)f'_2 & \text{si } i = 2, \\ Sf_3 = f'_3 & \text{si } i = 3, \end{cases}$$

donc

$$(*) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que u est une rotation d'axe $\mathbb{R}f'_3$ et d'angle $\pm\theta$. Plus précisément, si $S \in \mathrm{SO}(3)$, la base orthonormée $\mathcal{C}'$ est directe, et $(*)$ ci-dessus montre alors que u est la rotation d'axe engendré et orienté par f'_3 et d'angle θ. Si $S \in O^-(3)$, alors la base orthonormée $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ est indirecte. On peut la changer en une base orthonormée directe de plusieurs façons : la base $\mathcal{D} = (f'_1, f'_2, -f'_3)$ est directe et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$, donc u est la rotation d'axe engendré et orienté par $-f'_3$ et d'angle θ. La base $\mathcal{D}' = (f'_1, -f'_2, f'_3)$ est aussi une base orthonormée directe, et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}'}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donc u est aussi la rotation d'axe engendré et orienté par f'_3 et d'angle $-\theta$.

6. (2 pts) Déterminer la nature et les caractéristiques géométriques de $C = AR$. (On pourra remarquer que $C = R^{-1}BR$.)

Solution : Dans la question 4, on a orienté l'axe de B par le choix du générateur $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou, ce qui revient au même, par le choix du vecteur unitaire $f_3 = \dfrac{1}{\|f\|}f$). Calculons :

$$f' = R^{-1}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, comme $S = R^{-1}$ appartient à $\mathrm{SO}(3)$, il résulte de la question précédente que C est la rotation d'axe engendré et orienté par $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle θ tel que $\cos(\theta) = (\sqrt{2}-2)/4$ et $\sin(\theta) < 0$.

Exercice 3 (16 pts)**.** Soit $(\ |\ )$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $e_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ et soit D_θ la droite vectorielle $\mathbb{R}e_\theta$. (Noter que $e_{\theta+\pi} = -e_\theta$, de sorte que $D_{\theta+\pi} = D_\theta$.) On note σ_θ la symétrie orthogonale par rapport à D_θ et l'on rappelle que, pour tous θ, φ, la composée $\sigma_{\theta+\varphi} \circ \sigma_\varphi$ est la rotation d'angle 2θ.

1. (2 pts) Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de σ_0, puis de σ_θ pour θ arbitraire.

Solution : Notons S_θ la matrice de σ_θ et R_θ celle de la rotation d'angle θ. Comme σ_0 est la symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$, on a $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Puis, d'après le rappel plus haut, on a $S_\theta S_0 = R_{2\theta}$ d'où, comme $S_0^2 = I_2$,

$$S_\theta = R_{2\theta} S_0 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque. On pouvait aussi utiliser le fait que la droite $D_\theta^\perp = D_{\theta+(\pi/2)}$ est engendrée par le vecteur $\overrightarrow{n} = e_{\theta+(\pi/2)} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$, puis la formule

$$\sigma_\theta(v) = v - 2\frac{(v \mid \overrightarrow{n})}{(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n})}\overrightarrow{n}.$$

Mais bien sûr il ne fallait pas appliquer la formule ci-dessus en remplaçant $\overrightarrow{n}$ par e_θ !

On note $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, on note $t_v : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur v. On note $s_\mathcal{D}$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$ (sa partie linéaire est la symétrie orthogonale σ_D, où D est la direction de $\mathcal{D}$).

2. (3 pts) Soient D une droite vectorielle, A un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ la droite affine $A + D$. Soient $v \in D^\perp$. Montrer que $s_\mathcal{D} \circ t_{-v}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine $\mathcal{D}' = t_{v'}(\mathcal{D}) = A + v' + D$, pour un $v' \in D^\perp$ que l'on déterminera en fonction de v.

Solution : On sait que $s_\mathcal{D} \circ t_{-v}$ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$, donc de la forme $A' + D$, pour un point $A' = A + v'$ à déterminer. De plus v' est unique si on lui impose d'être orthogonal à D. Or on voit que $v' = v/2$ convient : en effet, l'image du point $A' = A + \dfrac{1}{2}v$ par la translation t_{-v} est le point $A - \dfrac{1}{2}v$, et quand on lui applique $s_\mathcal{D} = s_{A+D}$ on revient sur le point $A + \dfrac{1}{2}v = A'$.
Ceci peut aussi s'obtenir en cherchant un point fixe J de $s_\mathcal{D} \circ t_{-v}$ situé sur la droite affine $A + D^\perp$, c.-à.-d., posant $s = s_\mathcal{D}$ et $\sigma = \sigma_D$, on veut résoudre l'équation $J = s(J - v) = s(J) - \sigma(v) = s(J) + v$, c.-à.-d., $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{As(J)} + v = \sigma(\overrightarrow{AJ}) + v$, avec de plus $\overrightarrow{AJ} \in D^\perp$ et donc $\sigma(\overrightarrow{AJ}) = -\overrightarrow{AJ}$. On obtient donc $2\overrightarrow{AJ} = v$, d'où $\overrightarrow{AJ} = v/2$. Donc $s \circ t_{-v}$ fixe le point $J = A + \dfrac{1}{2}v$ ainsi que tout point de la droite affine $\mathcal{D}' = J + D$.

On fixe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, on note D la droite vectorielle D_φ, et l'on fixe deux points $A, I \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AI} \in D^\perp$. Soit $r = r(I, \theta)$ la rotation de centre I et d'angle θ, soit $s = s_\mathcal{D}$, où $\mathcal{D} = A + D$, soit t_u la translation de vecteur u, et soit $f = r \circ s \circ t_u$.

3. (1 pt) Sans faire de calculs, dire quelle est la nature géométrique de f.

Solution : La partie linéaire de f est la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$, donc est une symétrie orthogonale. Donc f est une symétrie glissée (éventuellement de vecteur de glissement nul).

4. (3 pts) En utilisant les questions précédentes, montrer, en faisant un minimum de calculs, que $f = s_{I+D_\psi} \circ t_w$, pour un angle ψ que l'on exprimera en fonction de φ et θ et un vecteur w que l'on exprimera en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et u.

Solution : D'après la question 2, on a

$$s_{I+D} = s_{A+D} \circ t_{-2\overrightarrow{AI}} \qquad \text{d'où} \qquad s_{A+D} = s_{I+D} \circ t_{2\overrightarrow{AI}}.$$

D'autre part, d'après le rappel au début de l'exercice, on a

$$r = r(I, \theta) = s_{I+D_{\varphi+(\theta/2)}} \circ s_{I+D_\varphi}$$

et comme $D = D_\varphi$ et on obtient que

$$f = r \circ s_{A+D_\varphi} \circ t_u = r \circ s_{I+D_\varphi} \circ t_{2\overrightarrow{AI}+u} = s_{I+D_{\varphi+(\theta/2)}} \circ t_{2\overrightarrow{AI}+u}.$$

On obtient donc l'égalité demandée, avec $\psi = \varphi + (\theta/2)$ et $w = 2\overrightarrow{AI} + u$.

On prend $\boxed{\varphi = \pi/6 = \theta, \quad I = (1,1), \quad A = (2, 1-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad u = -2\sqrt{3}e_2.}$

5. (2 pts) Vérifier que $\overrightarrow{AI}$ est orthogonal à la droite $D = D_{\pi/6}$. Puis, pour tout point $M = (x,y)$, déduire de la question précédente les coordonnées (x', y') du point $M' = f(M)$.

<u>Solution</u> : $D = D_{\pi/6}$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, on a $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, qui est bien orthogonal à D. Donc, on peut appliquer la question précédente. On a $\psi = (\pi/6) + (\pi/12) = \pi/4$, et donc $\Delta = I + D_{\pi/4}$ est la droite $I + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est simplement la diagonale (i.e. la droite d'équation $y = x$), de sorte que s_Δ est donnée par $s_\Delta((x,y)) = (y,x)$.

De plus, $w = u + 2\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc on a :

$$(*) \qquad f = s_\Delta \circ t_{-2e_1}$$

et pour tout $M = (x,y)$, on a $\boxed{f(M) = s_\Delta(M + w) = s_\Delta(x-2, y) = (y, x-2).}$

<u>Remarque</u>. On a donc $f = t_{-2e_2} \circ s_\Delta$. De plus, $D_{\pi/4} = \mathbb{R}\overrightarrow{n}$, où $\overrightarrow{n} = e_1 + e_2$. On a $(\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n}) = 2$ et $(-2e_2 \mid \overrightarrow{n}) = -2$ donc la projection orthogonale de $w' = -2e_2$ sur D est $u' = -\overrightarrow{n}$, et la projection orthogonale de w' sur $D^\perp$ est $v' = w' - (-\overrightarrow{n}) = w' + \overrightarrow{n} = e_1 - e_2$.

Soit Δ' la droite affine $t_{v'/2}(\Delta) = I + \dfrac{1}{2}v' + D_{\pi/4} = I' + D_{\pi/4}$, où $I' = (3/2, 1/2)$; elle a pour équation $x - y = 1$. On voit comme dans la question 2. que $t_{v'} \circ s_\Delta = s_{\Delta'}$: en effet, I' est envoyé par s_Δ sur $I - (v'/2)$, et quand on translate par $t_{v'}$ on revient sur le point $I - (v'/2) + v' = I + (v'/2) = I'$. Donc, finalement, f est la symétrie glissée par rapport à la droite Δ' et de vecteur de glissement $u' = -(e_1 + e_2) \in D_{\pi/4}$.

6. (5 pts) (Peut se faire indépendamment des questions précédentes.) On prend φ, θ, I, A, u comme ci-dessus. Pour tout $M = (x,y)$, déterminer par des calculs directs le point $t_u(M)$, puis les vecteurs $\overrightarrow{Ast_u(M)}$, $\overrightarrow{Ist_u(M)}$ et $\overrightarrow{If(M)}$, et enfin les coordonnées (x', y') de $f(M)$.

<u>Solution</u> : On a $t_u(M) = (x, y - 2\sqrt{3})$. D'après la question 1., la partie linéaire $\sigma_{\pi/6}$ de s a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

donc on a

$$\overrightarrow{Ast_u(M)} = \overrightarrow{s(A)st_u(M)} = \sigma_{\pi/6}(\overrightarrow{At_u(M)}) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y - 2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y - \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - 2 + \sqrt{3}(y - 1 - \sqrt{3}) \\ \sqrt{3}(x-2) - y + 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y - 5 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\overrightarrow{Ist_u(M)} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{Ast_u(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \overrightarrow{Ast_u(M)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y - 3 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y + 1 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{r(I)r(st_u(M))} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{Ist_u(M)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y - 3 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x - y + 1 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3}x + y - 1 + 3\sqrt{3} \\ x + \sqrt{3}y - 3 - \sqrt{3} + 3x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} - 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4y - 4 \\ 4x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 1 \\ x - 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{If(M)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y - 1 \\ x - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - 2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve donc le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 4 (13 pts)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. On note V_1 (resp. V_2) le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{C}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ (resp. $\mathcal{C}_2 = (e_{n+1}, \dots, e_{2n})$), de sorte que $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2$.

1. (3 pts) Soient $S_1, S_2 \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles et S la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c} S_1 & 0 \\ \hline 0 & S_2 \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Pour $i = 1, 2$, soit ϕ_i la forme bilinéaire symétrique sur V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(\phi_i) = S_i$, et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = S$. On note (p_i, q_i) la signature de ϕ_i pour $i = 1, 2$; exprimer la signature de ϕ en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2. (Indication : pour $i = 1, 2$, considérer une base $\mathcal{D}_i$ de V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_i}(\phi_i)$ soit diagonale.)

<u>Solution</u> : Remarquons d'abord que, comme S est diagonale par blocs, on a $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{n+1, \dots, 2n\}$, donc les sous-espaces V_1 et V_2 sont orthogonaux pour ϕ. Maintenant, pour $i = 1, 2$, soit $\mathcal{D}_i$ une base de V_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_i}(\phi_i)$ soit diagonale. Alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$ et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(\phi) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & 0 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & & & & \\ \hline & & & & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{array}\right).$$

Alors, le nombre de λ_i (resp. μ_j) qui sont > 0 est p_1 (resp. p_2), et le nombre de λ_i (resp. μ_j) qui sont < 0 est q_1 (resp. q_2). Il en résulte que le nombre de coefficients diagonaux qui sont > 0 (resp. < 0) est $p_1 + p_2$ (resp. $q_1 + q_2$), donc la signature de ϕ est $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$.

2. (3 pts) Soit $J = J_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de J et montrer que J est diagonalisable.

<u>Solution</u> : D'une part, J est symétrique réelle, donc on sait qu'elle est diagonalisable et que ses espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux.

D'autre part, comme toutes ses colonnes sont égales, $J = J_n$ est de rang 1 et, plus précisément, les vecteurs $e_i - e_1$ (ou bien $e_i - e_{i-1}$), pour $i = 2, \dots, n$, forment une base de l'espace propre $\mathrm{Ker}(J)$. Il reste à déterminer le dernier espace propre, ce qu'on peut faire de plusieurs façons.

<u>1ère méthode</u>. Comme J est symétrique réelle, le dernier espace propre est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(J)$. D'après ce qui précède, $\mathrm{Ker}(J)^\perp$ est défini par les équations $x_i = x_1$ pour tout $i = 2, \dots, n$, donc c'est la droite $\mathbb{R}v$, où

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on calcule que $Jv = nv$, donc le dernier espace propre est $J^\perp = \mathbb{R}v = \mathrm{Ker}(J - nI_n)$.

<u>2ème méthode</u>. Comme 0 est valeur propre de J de multiplicité géométrique $n - 1$, on peut utiliser la trace pour trouver la dernière valeur propre : comme $n = \mathrm{Tr}(J)$ est égal à la somme des valeurs propres de J dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité), on obtient que n est valeur propre de J. On peut alors faire des opérations sur les colonnes de $J - nI_n$, ou bien voir directement que, comme la somme de chaque ligne de J égale n, alors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $Jv = nv$.

<u>3ème méthode</u>. Enfin, on peut aussi voir directement que, comme la somme de chaque ligne de J égale n, alors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $Jv = nv$, donc $\mathrm{Ker}(J - nI_n)$ est non nul. Ceci entraîne que J est diagonalisable (et l'on a nécessairement $\dim \mathrm{Ker}(J - nI_n) = 1$).

3. (2 pts) On fixe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < 0 < \mu$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$q(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} (1+\lambda)\, x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2\, x_i x_j + \sum_{i=n+1}^{2n} (1+\mu)\, x_i^2 + \sum_{n+1 \le i < j \le 2n} 2\, x_i x_j$$

et soit ϕ sa forme polaire. Écrire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Solution : On a

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_n + \lambda I_n & 0 \\ \hline 0 & J_n + \mu I_n \end{array} \right).$$

4. (5 pts) En utilisant les questions précédentes, déterminer en fonction des valeurs de λ et μ la signature de q. (On indiquera en particulier dans quel cas q est dégénérée.)

Solution : Faisons d'abord la remarque simple et importante suivante. Si u est un endomorphisme d'un k-espace vectoriel arbitraire E et si $\lambda \in k$, alors pour tout $v \in E$ on a $(u + \lambda \mathrm{id}_E)(v) = u(v) + \lambda v$, donc v est un vecteur propre de u pour une valeur propre α si et seulement si v est un vecteur propre de $u + \lambda \mathrm{id}_E$ pour la valeur propre $\lambda + \alpha$. Combiné avec la question précédente, ceci entraîne que les valeurs propres de $J_n + \lambda$ sont : $\lambda < 0$, de multiplicité $n-1$, et $n+\lambda$, de multiplicité 1. Donc la signature de la forme bilinéaire symétrique ϕ_1 définie sur V_1 par la matrice $J_n + \lambda I_n$ est :

$$\begin{cases} (0, n) & \text{si } \lambda < -n, \\ (0, n-1) & \text{si } \lambda = -n \\ (1, n-1) & \text{si } \lambda > -n. \end{cases}$$

De même, les valeurs propres de $J_n + \mu$ sont : $\mu > 0$, de multiplicité $n-1$, et $n + \mu > 0$, de multiplicité 1. Donc la signature de la forme bilinéaire symétrique ϕ_2 définie sur V_2 par la matrice $J_n + \mu I_n$ est toujours $(n, 0)$. D'après la question 1., on obtient donc que la signature de q est :

$$\begin{cases} (n, n) & \text{si } \lambda < -n, \\ (n, n-1) & \text{si } \lambda = -n \\ (n+1, n-1) & \text{si } \lambda > -n. \end{cases}$$

En particulier, q est dégénérée si et seulement si $\lambda = -n$.

Exercice 5 (11 pts)**.** Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fixée, et soit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c = \{x \in \mathcal{S} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = c_n\}.$$

1. (3 pts) Montrer que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, et déterminer sa direction E.

Solution : D'abord, $\mathcal{E}_c$ est non vide : en effet, pour tout choix arbitraire des « deux premiers termes » $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la relation de récurrence

$$(\dagger) \qquad x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = c_n$$

permet de construire, de façon unique, une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_0 = a$ et $x_1 = b$. (On a $x_2 = c_0 + 2a + b$, puis $x_3 = c_1 + 2b + x_2$, etc.).

Maintenant, soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

Montrons que $\mathcal{E}_c$ est un espace affine de direction E.

1ère méthode. Pour tout $x, y \in \mathcal{E}_c$, notons $\overrightarrow{xy}$ la suite $y - x \in \mathcal{S}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(y-x)_{n+2} - (y-x)_{n+1} - 2(y-x)_n = c_n - c_n = 0,$$

et donc $\overrightarrow{xy}$ appartient à E. Réciproquement, pour tout $x \in \mathcal{E}_c$ et $u \in E$, la suite $y = x + u$ appartient à $\mathcal{E}_c$, puisque

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n + 0 = c_n.$$

Donc E est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{xy} = y - x$, lorsque x, y parcourent $\mathcal{E}_c$, et d'après la proposition 7.2.6 du cours, ceci montre que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine, de direction E, de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

Remarque. **Attention**, $\mathcal{E}_c$ **n'est pas**, en général, le sous-espace affine de $\mathcal{S}$ de direction E **passant par** c, car en général c n'appartient pas à $\mathcal{E}_c$! (Ceci corrige une erreur faite dans le TD1.) Pour obtenir en général un point « explicite » de $\mathcal{E}_c$, voir le complément ci-dessous.

2ème méthode. Soit E comme ci-dessus. Montrons que $\mathcal{E}_c$ est un espace affine de direction E, en montrant que les axiomes d'espace affine sont vérifiés. L'application

$$\mathcal{E}_c \times \mathcal{E}_c \to \mathcal{S}, \qquad (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x$$

est à valeurs dans E, car pour $x, y \in \mathcal{E}_c$ on a :

$$(y - x)_{n+2} - (y - x)_{n+1} - 2(y - x)_n = c_n - c_n = 0,$$

donc $y - x \in E$. Il est clair que cette application vérifie la relation de Chasles : pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}_c$, on a

$$\overrightarrow{yz} = z - y = (z - x) - (y - x) = \overrightarrow{xz} - \overrightarrow{xy}.$$

Il reste à vérifier que pour tout $a \in \mathcal{E}_c$, l'application $\mathcal{E}_c \to E$, $x \mapsto \overrightarrow{ax} = x - a$ est bijective. Mais ceci est clair : elle est injective car $x = a + (x - a)$, et elle est surjective car pour tout $u \in E$, la suite $x = a + u$ appartient à $\mathcal{E}_c$ et vérifie $\overrightarrow{ax} = u$. Ceci montre que $\mathcal{E}_c$ est bien un espace affine de direction E.

2. (3 pts) Déterminer $\dim(E)$ et une base $\mathcal{B}$ de E formée de suites géométriques.

Solution : On a déjà vu (dans le poly et en TD) que l'application $E \to \mathbb{R}^2$, qui à toute suite u associe le couple (u_0, u_1) formé par ses deux premiers termes, est linéaire et bijective, donc est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Donc $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
D'autre part, une suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement si λ vérifie $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. En effet, cette condition est nécessaire (prendre $n = 0$), et elle est suffisante, car si elle est vérifiée alors pour tout n on a

$$\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - 2\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$$

Or, $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$, donc les suites $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E. Elles sont linéairement indépendantes, car si $\alpha u + \beta v = 0$, alors les termes au cran 0 et 1 donnent le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

d'où $3\beta = 0$ et donc $\beta = 0 = \alpha$. Donc (u, v) forme une base de E.

3. (1 pt) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 - a - 2 \neq 0$. On prend pour c la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ tel que la suite μc appartienne à $\mathcal{E}_c$ (i.e. tel qu'on ait $\mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n = a^n$ pour tout n).

Solution : Il n'est pas nécessaire de supposer (comme dans l'énoncé) $a \neq 0$. En effet, par convention, on a : $a^0 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, y compris pour $a = 0$, donc pour $n = 0$, la condition précédente s'écrit $\mu(a^2 - a - 2) = 1$, donc l'unique solution est $\mu = (a^2 - a - 2)^{-1}$. (On a supposé $a^2 - a - 2 \neq 0$.) Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n - c_n = \mu a^{n+2} - \mu a^{n+1} - 2\mu a^n - a^n = a^n\big(\mu(a^2 - a - 2) - 1\big) = 0,$$

ce qui montre que $\mu c \in \mathcal{E}_c$.

Complément : Soit k un corps (par exemple $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{S}$ le k-espace vectoriel de toutes les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de k. Fixons un élément arbitraire $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ et soient $\lambda, \mu \in k$, avec $\lambda \neq \mu$. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - \lambda)(X - \mu) = X^2 - sX + p$$

(où s = « somme » et p = « produit » des racines), et le k-espace affine

$$\mathcal{E}_c = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid x_{n+2} - s\,x_{n+1} + p\,x_n = c_n\}.$$

En effet, on montre comme plus haut que $\mathcal{E}_c$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$, de direction l'espace vectoriel

$$E = \{w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S} \mid w_{n+2} - s\,w_{n+1} + p\,w_n = 0\},$$

qui est de dimension 2. Par hypothèse, les deux suites géométriques $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E, donc en forment une base (puisqu'elles sont linéairement indépendantes). La question précédente montre que dans le cas particulier où c est une suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $P(a) \neq 0$, alors la suite μc appartient à $\mathcal{E}_c$ lorsque $\mu = 1/P(a)$. Le but de ce paragraphe de compléments est de donner, pour c arbitraire, une suite explicite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2, avec second membre :

$$(\dagger) \qquad x_{n+2} - s\,x_{n+1} + p\,x_n = c_n.$$

Cherchons une solution sous la forme

$$x_n = a_0\,c_{n-2} + a_1\,c_{n-3} + \cdots + a_{n-2}\,c_0 = \sum_{i=0}^{n-2} a_i\,c_{n-2-i}.$$

Alors c_n doit être égal à la somme des termes suivants :

$$\begin{array}{rlllll} x_{n+2} = & a_0\,c_n & +\,a_1\,c_{n-1} & +\,a_2\,c_{n-2} & +a_3\,c_{n-3} + \cdots \\ -\,s\,x_{n+1} = & & -s\,a_0\,c_{n-1} & -s\,a_1\,c_{n-2} & -s\,a_2\,c_{n-3} - \cdots \\ +\,p\,x_n = & & & +p\,a_0\,c_{n-2} & +p\,a_1\,c_{n-3} + \cdots \end{array}$$

et l'on voit que ceci est vérifié si l'on prend $a_0 = 1$, $a_1 = s\,a_0 = s$, et

$$a_{i+2} - s\,a_{i+1} + p\,a_i = 0, \qquad \forall i \geq 0,$$

c.-à.-d., si a est l'élément de E tel que $a_0 = 1$ et $a_1 = s = \lambda + \mu$. Comme $a \in E$, on peut écrire $a = \alpha u + \beta v$, et l'on obtient donc le système (d'inconnues α, β) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\,\lambda + \beta\,\mu = \lambda + \mu, \end{cases}$$

qui donne $\beta = \dfrac{\mu}{\mu - \lambda}$, et $\alpha = \dfrac{-\lambda}{\mu - \lambda}$, d'où

$$a_i = \frac{\mu}{\mu - \lambda}\mu^i - \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\lambda^i = \frac{\mu^{i+1} - \lambda^{i+1}}{\mu - \lambda}.$$

Donc finalement, la suite $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\mu^{i+1} - \lambda^{i+1}}{\mu - \lambda}\, c_{n-2-i}$$

appartient à l'espace affine $\mathcal{E}_c$, et donc $\mathcal{E}_c$ est le sous-espace affine de $\mathcal{S}$, de direction E et passant par le point C.

4. (4 pts) On prend $a = 1$, i.e. c est la suite telle que $c_n = 1$ pour tout n. Soit alors μ comme dans la question précédente, et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de $\mathcal{E}_c$ tel que $x_0 = 3/2$ et $x_1 = 1/2$. Exprimer $w = x - \mu c$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, puis donner une formule pour la valeur de x_n pour tout $n \geq 0$.

Solution : Soit $P(X)$ le polynôme $X^2 - X - 2$. On a $P(1) = -2$ donc, d'après la question précédente, la suite $-(1/2)c$ appartient à $\mathcal{E}_c$. Donc l'élément $w = x + (1/2)c$ de E s'écrit de façon unique $w = \alpha u + \beta v$, et α, β sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 + (1/2) = 2 \\ -\alpha + 2\beta = x_1 + (1/2) = 1 \end{cases}$$

d'où $3\beta = 3$, donc $\beta = 1 = \alpha$. On a donc $w = u + v$ et donc $\boxed{x = u + v - (1/2)c.}$ Donc, pour tout $n \geq 0$, on a

$$x_n = (-1)^n + 2^n - \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 (10 pts)**.** Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, J_A sa forme normale de Jordan, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A$, où u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par A.

1. (4 pts) On suppose que $J = J_A$ est formée d'un unique bloc de Jordan. Montrer alors que J est semblable à sa transposée ${}^tJ$. (Indication : considérer la base $\mathcal{D} = (f_n, \ldots, f_1)$.)

Solution : On suppose que J est un bloc de Jordan $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, i.e. on a $u(f_1) = \lambda f_1$ et $u(f_i) = \lambda f_i + f_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$. Par conséquent, la matrice de u dans la base $\mathcal{D} = (f_n, \dots, f_1)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = {}^t J_n(\lambda).$$

Ceci prouve que J_n est semblable à ${}^t J_n(\lambda)$.

2. (6 pts) Pour A arbitraire, montrer que A est semblable à sa transposée ${}^tA$. (Utiliser J_A et adapter le raisonnement de la question précédente au cas où J_A est formée de plusieurs blocs de Jordan $B_1, \dots, B_r$.)

Solution : Dans le cas général, J_A est une matrice diagonale par blocs, i.e. on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & B_r \end{array}\right),$$

où chaque B_i est un bloc de Jordan. Soit $\mathcal{C}_i$ la partie de la base $\mathcal{C}$ correspondant au bloc B_i et soit $V_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_i)$. Alors V_i est stable par u donc u induit un endomorphisme u_i de V_i tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(u_i) = B_i$. Pour $i = 1, \dots, r$, soit $\mathcal{D}_i$ la base de V_i formée des éléments de $\mathcal{C}_i$, pris dans l'ordre inverse (c.-à.-d., si $\mathcal{C}_i = (f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$, alors $\mathcal{D}_i = (f_{p+q}, \dots, f_p)$), et soit $\mathcal{D}$ la base $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_r$ de $\mathbb{C}^n$. D'après la question 1., on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_i}(u_i) = {}^tB_i$, et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} {}^tB_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & {}^tB_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & {}^tB_r \end{array}\right) = {}^tJ_A.$$

Ceci prouve que J_A est semblable à ${}^tJ_A$. D'autre part, comme A est semblable à J_A, alors ${}^tA$ est semblable à ${}^tJ_A$: en effet, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_A = P^{-1}AP$, et donc

$${}^tJ_A = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = {}^tP\,{}^tA\,({}^tP)^{-1}.$$

Donc on obtient bien que A est semblable à ${}^tA$.