Algèbre et théorie de Galois 2005/6
Examen du 26 janvier 2006 (durée 4h)

L'examen est noté sur 40. Le barême indiqué pourra être modifié légèremment. L'exercice 3 (resp. 4) utilise le résultat de l'exercice 2 (resp. 1 et 3). L'exercice 5 est indépendant des autres.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires. Si A est un anneau, on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble de ses idéaux premiers.

Exercice 1 (5 pts) Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux et soient $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et $S = A \setminus P$.

a) Décrire les idéaux premiers de $S^{-1}A$, puis les idéaux maximaux.

b) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $S^{-1}B$. Montrer, en utilisant le cours, que $\mathfrak{m} \cap S^{-1}A$ est un idéal maximal de $S^{-1}A$, puis que $\mathfrak{m} \cap S^{-1}A = S^{-1}P$. Notant τ_B le morphisme d'anneaux $B \to S^{-1}B$, montrer que $Q := \overset{-1}{\tau_B}(\mathfrak{m})$ est un idéal premier de B tel que $Q \cap A = P$.

Exercice 2 (5 pts) Soient A un anneau et I un idéal de A.

a) Soient J, K deux idéaux de A tels que $I \subseteq J \cup K$. Montrez que I est contenu dans J ou dans K. (Raisonner par l'absurde).

b) Soient $P_1, \ldots, P_n$ des idéaux premiers de A, tels que $I \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Montrez, par récurrence sur n, que I est contenu dans l'un des P_i.

Indication : Supposer que I n'est contenu dans aucun P_i. Par hypothèse de récurrence, il existe pour chaque i un élément $x_i \in I$ n'appartenant à aucun P_j pour $j \neq i$.

Exercice 3 (7 pts) Soient B un anneau et G un groupe fini d'automorphismes de B.

a) Soient $h \in G$ et X une partie de B tels que $X \subseteq h(X)$. Montrez que $X = h(X)$. (Utiliser que h est d'ordre fini.)

On pose

$$A = B^G = \{b \in B \mid \forall g \in G,\ g(b) = b\}.$$

b) Montrer que B est entier sur A.

c) Soient $P, Q \in \mathrm{Spec}(B)$ tels que $Q \cap A \subseteq P \cap A$, et soit $x \in Q$. Montrez que le produit $\prod_{g \in G} g(x)$ appartient à $A \cap P$. En utilisant l'exercice 2, en déduire qu'il existe $g \in G$ tel que $Q \subseteq g(P)$.

Montrez que si $Q \cap A = P \cap A$, alors $Q = g(P)$.

Exercice 4 (8 pts) Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, et L/K une extension de corps, de degré fini et séparable. Soit B le sous-anneau de L formé des éléments de L entiers sur A.

Soient $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et $X(P) = \{Q \in \mathrm{Spec}(B) \mid Q \cap A = P\}$.

a) On suppose L/K galoisienne, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Montrer que B est stable par G et que $B^G = A$. En utilisant les exercices 1 et 3 montrer que $X(P)$ est fini et non-vide.

b) Lorsque L/K est seulement supposée séparable, montrer que $X(P)$ est fini et non vide. **Indication :** Introduire une clôture galoisienne N de L/K et la clôture intégrale C de A dans N.

Exercice 5 (15 pts) Dans $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, on considère les polynômes symétriques suivants. Pour tout $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathbb{N}^4$ tel que $i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq i_4$, on note m_{i_1,i_2,i_3,i_4} la somme des monômes qui sont dans l'orbite de

$$X_1^{i_1} X_2^{i_2} X_3^{i_3} X_4^{i_4}$$

sous l'action du groupe symétrique S_4. Ainsi, par exemple,

$$m_{3111} = X_1^3 X_2 X_3 X_4 + X_1 X_2^3 X_3 X_4 + X_1 X_2 X_3^3 X_4 + X_1 X_2 X_3 X_4^3.$$

On omet les indices i_k qui sont nuls, c.-à-d., on écrit m_{22} au lieu de m_{2200}. Alors, m_1, m_{11}, m_{111} et m_{1111} sont, respectivement, les polynômes symétriques élémentaires e_1, e_2, e_3 et e_4.

a) Exprimer m_{211} en fonction des e_i.

b) Exprimer m_2, puis m_{3111} en fonction des e_i.

c) Exprimer m_{2211} puis m_{222} en fonction des e_i.

d) On pose $Z_1 = X_1X_2 + X_3X_4$, $Z_2 = X_1X_3 + X_2X_4$, $Z_3 = X_1X_4 + X_2X_3$. Montrer que le stabilisateur de Z_1 dans S_4 contient un sous-groupe de cardinal 8, qu'on déterminera, puis que l'orbite de Z_1 est $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$. Exprimer $Z_1 + Z_2 + Z_3$, $Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$ et $Z_1Z_2Z_3$ en fonction des e_i.

e) Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines dans $\mathbb{C}$ de $P = X^4 - 8X^2 + 8X - 2$. On pose $z_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $z_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, $z_3 = x_1x_4 + x_2x_3$. Montrer que z_1, z_2, z_3 sont les racines d'un polynôme de degré 3 que l'on explicitera.

Montrer que ce polynome a trois racines réelles distinctes ; on notera z_1 la plus grande et z_3 la plus petite, de sorte que $z_1 > z_2 > z_3$. Calculer

$$y_1 = -(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \text{ et } y_2 = -(x_1 + x_3)(x_2 + x_4).$$

Montrer que $(x_1 + x_2)^2 = y_1$, $(x_1 + x_3)^2 = y_2$, et $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = -8$.