Université Pierre et Marie Curie **2004-2005**

Algèbre et théorie de Galois
Devoir N$^{\text{o}}$1 du 9 novembre 2004

Notation Soient A un anneau commutatif intègre, K son corps des fractions, et I, J deux sous-A-modules de K. On note IJ l'ensemble des sommes finies $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, où $n \geqslant 1$ et $x_i \in \mathrm{I}$ et $y_i \in \mathrm{J}$ pour tout i ; c'est un sous-A-module de K. Attention, I, J et IJ sont des sous-A-modules de K, on ne les suppose pas contenus dans A, c.-à-d., ce ne sont pas nécessairement des idéaux de A.

D'autre part, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{p}$. On note $\mathrm{A}_\mathfrak{p} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ et, pour tout sous-A-module M de K, on note

$$(*) \qquad \mathrm{M}_\mathfrak{p} = \{s^{-1}x \in \mathrm{K} \mid x \in \mathrm{M},\ s \in \mathrm{S}\};$$

c'est le localisé de M en la partie multiplicative S. On ne demande pas de vérifier ce point, c.-à-d., on prend $(*)$ comme **définition** de $\mathrm{M}_\mathfrak{p}$. Alors, il est clair que $\mathrm{M}_\mathfrak{p}$ est encore un sous-A-module (et même, un sous-$\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module) de K. On obtient ainsi les A-modules $\mathrm{I}_\mathfrak{p}$, $\mathrm{J}_\mathfrak{p}$, $(\mathrm{IJ})_\mathfrak{p}$, etc.

Q1) Montrer que $(\mathrm{IJ})_\mathfrak{p} = \mathrm{I}_\mathfrak{p}\mathrm{J}_\mathfrak{p}$.

Désormais, on suppose que I est un idéal de A, non nul. On définit le sous-ensemble suivant de K :

$$(\mathrm{A} : \mathrm{I}) = \{y \in \mathrm{K} \mid \forall\, x \in \mathrm{I},\ xy \in \mathrm{A}\} = \{y \in \mathrm{K} \mid \mathrm{I}y \subseteq \mathrm{A}\}.$$

Si I' est un idéal non nul de l'anneau $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$, on définit de façon analogue

$$(\mathrm{A}_\mathfrak{p} : \mathrm{I}') = \{y \in \mathrm{K} \mid \forall\, x \in \mathrm{I}',\ xy \in \mathrm{A}_\mathfrak{p}\} = \{y \in \mathrm{K} \mid \mathrm{I}'y \subseteq \mathrm{A}_\mathfrak{p}\}.$$

Q2) Montrer que $(\mathrm{A} : \mathrm{I})$ est un sous-A-module de K et que $\mathrm{I}(\mathrm{A} : \mathrm{I})$ est un idéal de A.

On dira que I est un idéal inversible si on a l'égalité $\mathrm{I}(\mathrm{A} : \mathrm{I}) = \mathrm{A}$.

Q3) Décrire $(\mathrm{A} : \mathrm{I})$ lorsque I est principal. En déduire que si A est principal, tout idéal non nul de A est inversible.

Q4) On suppose que I est un idéal de A de type fini. Montrer dans ce cas que $(\mathrm{A} : \mathrm{I})_\mathfrak{p} = (\mathrm{A}_\mathfrak{p} : \mathrm{I}_\mathfrak{p})$.

Q5) Soit L un idéal de A. Montrer que si $\mathrm{L}_\mathfrak{m} = \mathrm{A}_\mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m}$ idéal maximal de A, alors $\mathrm{L} = \mathrm{A}$. (Indication : si $\mathrm{L} \neq \mathrm{A}$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $\mathrm{L} \subseteq \mathfrak{m}$).

Désormais, on suppose que l'anneau A vérifie les trois conditions suivantes : a) A est intègre et noethérien, b) tout idéal premier non nul de A est maximal, c) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, l'anneau localisé $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$ est principal. Un tel anneau s'appelle un **anneau de Dedekind**.

Q6) Montrer, en utilisant les questions précédentes, que tout idéal non nul de A est inversible.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. — *Soient* A *un anneau de Dedekind et* I *un idéal propre non nul de* A.

i) Il existe $r \geqslant 1$ *et des idéaux maximaux* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ *tels que*

$$\mathrm{I} = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r. \tag{$*$}$$

ii) De plus, les $\mathfrak{m}_i$ *sont uniquement déterminés par* I.

Pour montrer l'assertion *i)* du théorème, on suppose que l'ensemble $\mathscr{N}$ des idéaux propres non nuls de A qui ne s'écrivent pas comme un produit $(*)$ est non vide, donc admet un élément maximal I (pourquoi ?). Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant I.

Q7) Pourquoi a-t-on $\mathrm{I} \neq \mathfrak{m}$? On pose $\widehat{\mathfrak{m}} = (\mathrm{A} : \mathfrak{m})$. Montrer que $\widehat{\mathfrak{m}}$ contient A.

D'après la question 6), on sait que $\mathfrak{m}\widehat{\mathfrak{m}} = \widehat{\mathfrak{m}}\mathfrak{m} = \mathrm{A}$ et, de même, I est inversible. En déduire que :

$$\mathrm{I} \subset \mathrm{I}\widehat{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}\widehat{\mathfrak{m}} = \mathrm{A} \subset \widehat{\mathfrak{m}},$$

où le symbole $\subset$ signifie <u>inclusion stricte</u>.

Q8) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{I}\widehat{\mathfrak{m}}$ s'écrit comme un produit $(*)$, puis qu'il en est de même de I. Qu'en déduit-on sur l'ensemble $\mathscr{N}$?

Q9) Supposons qu'on ait une égalité $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_1 \cdots \mathfrak{m}'_s$, où les $\mathfrak{m}_i$ et $\mathfrak{m}'_j$ sont des idéaux maximaux de A.

Montrer qu'il existe j tel que $\mathfrak{m}'_j \subseteq \mathfrak{m}_1$. (Utiliser le fait que $\mathfrak{m}_1$ est premier). En déduire que $\mathfrak{m}'_j = \mathfrak{m}_1$. Quitte à renuméroter les $\mathfrak{m}'_k$, on peut supposer $j = 1$. Déduire alors de la question 6) que

$$\mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_2 \cdots \mathfrak{m}'_s.$$

Conclure.