Université Pierre et Marie Curie **2005-2006**

Algèbre et théorie de Galois

Extrait de l'examen du 7 septembre 2006

Problème. — Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de dimension finie. On note Spec(A) l'ensemble des idéaux premiers de A.

1) Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A. (Indication : pour $x \in \mathrm{A} \setminus \{0\}$, montrer que l'application $a \mapsto ax$ est injective.)

2) Montrer que si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ sont deux à deux distincts, alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \neq \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{p}_i$. En déduire que Spec(A) est un ensemble fini.

3) On rappelle que $x \in \mathrm{A}$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que

$$\mathrm{I} := \{x \in \mathrm{A} \mid x \text{ est nilpotent}\}$$

est un idéal de A, puis qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{I}^{\mathrm{N}} = (0)$.

4) Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux premiers de A. On admettra que $\mathrm{I} = \mathfrak{p}_1 \bigcap \cdots \bigcap \mathfrak{p}_n$ et que

$$\mathfrak{p}_1^{\mathrm{N}} \bigcap \cdots \bigcap \mathfrak{p}_n^{\mathrm{N}} = \mathfrak{p}_1^{\mathrm{N}} \cdots \mathfrak{p}_n^{\mathrm{N}} = (0).$$

Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{A} \mid \mathfrak{p}_i^{\mathrm{N}} x = 0\}$. Montrer que A_i est un idéal de A et que

$$\mathrm{A}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{A}_n = \mathrm{A}.$$

(Indication : considérer les idéaux $\mathfrak{q}_i = \prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j^{\mathrm{N}}$ et montrer que $1 \in \mathfrak{q}_1 + \cdots + \mathfrak{q}_n$.)

5) Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}_i}$ le localisé de A en la partie multiplicative $\mathrm{S}_i = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{p}_i$, et soit $\tau_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_{\mathfrak{p}_i}$ le morphisme d'anneaux $a \mapsto a/1$.

Montrer que si $a_j \in \mathrm{A}_j$, avec $j \neq i$, alors $\tau_i(a_j) = a_j/1$ est nul. Montrer que tout élément de $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}_i}$ est de la forme a_i/s, avec $a_i \in \mathrm{A}_i$, et $s \in \mathrm{S}_i$.

Pour tout $s \in \mathrm{S}_i$, montrer qu'il existe $t \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathfrak{p}_i^{\mathrm{N}}$ tels que $1 = ts + x$. Montrer que τ_i induit un isomorphisme de A-modules $\mathrm{A}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}_i}$. Enfin, montrer que le morphisme d'anneaux

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}_1} \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{A}_{\mathfrak{p}_n}$$

est un isomorphisme.

Exercice 1. — Pour tout $\mathrm{N} \geqslant 2$, soit $(\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/\mathrm{N}\mathbb{Z}$, et soit $\varphi(\mathrm{N})$ son cardinal.

1) Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Déterminer $\varphi(p^n)$.

2) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geqslant 2$, et soit $\mathrm{N} = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. En utilisant le théorème des restes chinois, montrer que

$$\varphi(\mathrm{N}) = \varphi(p_1^{n_1}) \cdots \varphi(p_r^{n_r}).$$

Déterminer les N pour lesquels $\varphi(\mathrm{N}) \leqslant 2$.

3) Soient $k < \mathrm{N}$ des entiers > 0 et premiers entre eux, et soit

$$a = e^{2ik\pi/\mathrm{N}} = \cos(2k\pi/\mathrm{N}) + i\sin(2k\pi/\mathrm{N}).$$

On rappelle que le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ est de degré $\varphi(\mathrm{N})$. On suppose que $\cos(2k\pi/\mathrm{N}) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathrm{N} \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Exercice 2. — Soit $\phi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le groupe abélien $\mathbb{Z}^3/\operatorname{im}(\phi)$.