P.-V Koseleff

Devoir 1

à rendre le 12 octobre 2007

EXERCICE 1. — Soit $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré. Soit K l'ensemble $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Q}\}$. Si $d > 0$, on dit que K est un corps quadratique réel et si $d < 0$, on dit que c'est un corps quadratique imaginaire. On note A l'ensemble des éléments de K qui sont entiers sur $\mathbb{Z}$.

1. (a) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que A est un sous-anneau de K (on utilisera le fait que l'ensemble des entiers algébriques forme un anneau). L'anneau A s'appelle l'anneau des entiers de K.
   (c) Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, l'élément $a + b\sqrt{d}$ de K est dans A.
2. Soit l'application $\sigma : K \to K$ définie par $\sigma(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$.
   (a) Montrer que σ est un automorphisme de corps.
   (b) Montrer que $\sigma(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que si $x \in A$, alors $\sigma(x) \in A$ et que x et $\sigma(x)$ vérifient la même relation intégrale sur $\mathbb{Z}$.
3. (a) Montrer que $T(x) = x + \sigma(x)$ (trace de x) et $N(x) = x\sigma(x)$ (norme de x) sont dans $\mathbb{Q}$.
   (b) En déduire que si $x \in A$, alors $T(x)$ et $N(x)$ sont dans $\mathbb{Z}$ puis expliciter une relation intégrale de x sur $\mathbb{Z}$ à l'aide de la trace et de la norme de x.
   (c) Déduire de ce qui précède que l'élément $x = a + b\sqrt{d}$ de K est dans A si et seulement si $2a \in \mathbb{Z}$ et $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$.
4. On suppose maintenant les conditions $2a \in \mathbb{Z}$ et $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$ vérifiée.
   (a) Montrer qu'alors $2b \in \mathbb{Z}$. On peut donc poser $a = \frac{u}{2}$ et $b = \frac{v}{2}$ avec u et v dans $\mathbb{Z}$. Les conditions précédentes se résument en $u^2 - db^2 \in 4\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que v et u ont la même parité et que s'ils sont impairs, alors $d \equiv 1 \pmod 4$.
   (c) Conclure que si $d \equiv 1 \pmod 4$, alors $A = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ et $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sinon.

EXERCICE 2. — A est un anneau euclidien si A est intègre et s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, qui vérifie la propriété suivante : si x et y sont dans A avec $y \neq 0$, il existe q et r dans A tels que l'on ait $x = qy + r$ avec $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(y)$.

1. Soit $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A.
   (a) Montrer qu'il existe un élément x de $A/A^\times$ tel que la restriction
   $$s : A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$$
   de la surjection $A \to A/(x)$ à $A^\times \cup \{0\}$ soit surjective.
   (b) Montrer que l'idéal (x) est maximal.
2. Soit B le sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et par $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{-19}}{2}$.
   (a) Montrer que les éléments de B sont de la forme $p+q\alpha$ avec p et q dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\overline{\alpha}$, le conjugué de α, est dans B et que pour tout élément b de B, son conjugué $\overline{b}$ est encore dans B.
3. Déterminer les éléments inversibles de B.
4. Montrer que B n'est pas euclidien.

   L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que B est principal.
5. Soit $N(x) = x\overline{x}$.
   (a) Montrer que $N(B) \subset \mathbb{N}$.
   (b) Soit I un idéal non nul de B. Montrer qu'il existe $a \in I$, tel que $N(a) = \min\{N(x),\ x \in I, x \neq 0\}$.
6. Soit b un élément de I, montrer qu'il existe deux éléments λ et μ de $\mathbb{Q}$ tels que $\dfrac{b}{a} = \lambda + \mu\alpha$.

   On montre maintenant qu'on a l'inégalité $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |\mu - n| < \frac{1}{3}$. Pour celà on procède par l'absurde en supposant que l'on a $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |\mu - n| \geq \frac{1}{3}$. On considère la partie entière q de μ et un entier n vérifiant l'inégalité
   $$|2\lambda - n| \leq \tfrac{1}{2}.$$
   On pose $d = n + (2q+1)\alpha$.
7. (a) Montrer que l'on a $2b = ad$ et que $N(d)$ est impair.
   (b) Soit $\overline{d}$ le conjugué complexe de d. On pose $d\overline{d} = 2k+1$. Montrer que $b\overline{d} - ka$ est un élément non nul de I et que l'on a
   $$N(b\overline{d} - ka) < N(a).$$
   (c) En déduire une contradiction et l'inégalité $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |\mu - n| < \frac{1}{3}$.

   Il existe donc d'après cette inégalité des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que
   $$|\mu - v| \leq \tfrac{1}{3},\ |\lambda - u| \leq \tfrac{1}{2}.$$
8. Montrer que l'on a $b = a(u + v\alpha)$.
9. En déduire que $I = (a)$ et le fait que B est principal.