P.-V Koseleff

Devoir 2

Version corrigée

à rendre le 30 novembre 2007

EXERCICE 1. — Dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^4$, on considère le sous-module E engendré par A_1, A_2, A_3 et F engendré par A_4, A_5 où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -13 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang et les facteurs invariants de E et F.
2. Déterminer le rang et les facteurs invariants de $E+F$.
3. On considère l'homomorphisme ϕ de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^4$ défini par $\phi(X,Y) = (A_1A_2A_3)X + (A_4A_5)Y$. On considère les deux projections $p_1 : \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$ et $p_2 : \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$.
   (a) Montrer que $E \cap F = (A_1A_2A_3) \circ p_1(\mathrm{Ker}\phi) = (A_4A_5) \circ p_2(\mathrm{Ker}\phi)$.
   (b) En déduire une base de $E \cap F$.
   (c) Donner une base de E adaptée à $E \cap F$.
   (d) Existe-t'il une base de $E+F$ adaptée à la fois à E, à F et à $E \cap F$?

Rappel. On appelle base adaptée de A à B une base $f_1, \ldots, f_m$ de A telle que il existe $d_1 | d_2 | \cdots | d_r \in \mathbb{Z}$ et $d_1 f_1, \ldots, d_r f_r$ soit également une base de B. B est ici un sous-$\mathbb{Z}$-module du $\mathbb{Z}$-module A.

EXERCICE 2. — Soit p un nombre premier et ζ_p une racine primitive $p^{ième}$ de l'unité. Quel est le polynôme minimal de ζ_p sur $\mathbb{Q}$? Montrer que $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est un corps de décomposition pour le polynôme $\Phi_p(X) = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$. Calculer $[Q(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$. Calculer $[\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1}) : \mathbb{Q}]$.
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $X = Y + 1$.