EXPOSÉ I

STRUCTURES ALGÉBRIQUES. COHOMOLOGIE DES GROUPES

par M. Demazure

Cet exposé se compose de deux parties ; la première rassemble un certain nombre de définitions générales et pose des notations qui seront souvent utilisées par la suite, la seconde traite de la cohomologie des groupes et aboutit au théorème 5.3.3 (nullité de la cohomologie des groupes diagonalisables). 1

Nous choisissons une fois pour toutes un Univers. [(1)] Toutes les définitions posées et toutes les constructions effectuées seront relatives à cet Univers. Nous nous permettrons systématiquement l'abus de langage suivant : pour définir un foncteur $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(\mathrm{S})$ de $\mathscr{C}'$ pour tout objet S de $\mathscr{C}$, chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la manière de définir $f(h)$ pour une flèche h de $\mathscr{C}$. En pratique, nous dirons : soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ le foncteur défini par $f(\mathrm{S}) = \cdots$.

1. Généralités

1.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On notera $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ des foncteurs contravariants de $\mathscr{C}$ dans la catégorie $(\mathbf{Ens})$ des ensembles. [(2)] Il existe un foncteur canonique $\mathbf{h} : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ qui associe à tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ le foncteur $\mathbf{h}_\mathrm{X}$ tel que

$$\mathbf{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

Pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$, on définit (cf. par exemple EGA 0_{III}, 8.1.4) une bijection 2

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}(\mathrm{X}). \qquad ^{(3)}$$

En particulier, pour tout couple X, Y d'objets de $\mathscr{C}$, l'application canonique ci-dessous est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{h}_\mathrm{Y})\,;$$

---

(1) N.D.E. : cf. SGA 4, Exp. I, § 0 et Appendice ; voir aussi la discussion dans [**DG70**], p. xxvi.

(2) N.D.E. : On l'appelle la *catégorie des préfaisceaux* sur $\mathscr{C}$, cf. IV 4.3.1.

(3) N.D.E. : Ce résultat est souvent appelé « Lemme de Yoneda » ; nous utiliserons cette terminologie dans d'autres N.D.E.

i.e. le foncteur $\mathbf{h}$ est *pleinement fidèle.* Il définit donc un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$, et une équivalence de $\mathscr{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ formée des foncteurs *représentables* (i.e. isomorphes à un foncteur de la forme $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$). Dans la suite, nous identifierons souvent X et $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$. Les numéros suivants ont pour but de montrer que cette identification peut se faire sans danger.

Remarque 1.1.1. — [(4)] On a parfois besoin de la variante suivante. Soit $\mathscr{D}$ une sous-catégorie *pleine* de $\mathscr{C}$ et soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, notons $\mathbf{h}'_{\mathrm{X}}$ et $\mathbf{h}'_{\mathrm{Y}}$ les restrictions à $\mathscr{D}$ de $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$ et $\mathbf{h}_{\mathrm{Y}}$. Alors on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{D}}}(\mathbf{h}'_{\mathrm{X}}, \mathbf{h}'_{\mathrm{Y}})$$

et donc : se donner un morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ « est la même chose » que se donner, de façon fonctorielle en T, une application $\phi(\mathrm{T}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{Y})$, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.

1.2. [(5)] On dira que $\mathbf{F}$ est un *sous-objet* (ou un sous-foncteur) de $\mathbf{G}$ si $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour chaque S.

Dans $\widehat{\mathscr{C}}$ les limites projectives « quelconques » *existent* et se calculent par :

$$(\varprojlim_i \mathbf{F}_i)(\mathrm{S}) = \varprojlim_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S}). \quad ^{(6)}$$

En particulier les produits fibrés sont définis par :

$$\big(\mathbf{F} \underset{\mathbf{G}}{\times} \mathbf{F}'\big)(\mathrm{S}) = \mathbf{F}(\mathrm{S}) \underset{\mathbf{G}(\mathrm{S})}{\times} \mathbf{F}'(\mathrm{S}). \quad ^{(7)}$$

3 Nous choisirons comme objet final de $\widehat{\mathscr{C}}$ le foncteur $\underline{\mathbf{e}}$ tel que $\underline{\mathbf{e}}(\mathrm{S}) = \{\varnothing\}$ [(8)]. Tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ possède un morphisme unique dans $\underline{\mathbf{e}}$ et on pose

$$\mathbf{F} \times \mathbf{F}' = \mathbf{F} \underset{\underline{\mathbf{e}}}{\times} \mathbf{F}'.$$

Le foncteur $\mathbf{h}$ *commute aux limites projectives* ; en particulier pour que $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ existe ($\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), resp. pour que $\mathscr{C}$ admette un objet final e, il faut et il suffit que $\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'}$ soit représentable, resp. $\underline{\mathbf{e}}$ soit représentable, et on a

$$\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X} \times \mathrm{X}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{h}_e \simeq \underline{\mathbf{e}}\,.$$

---

(4) N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

(5) N.D.E. : On a modifié l'ordre, pour introduire les produits fibrés avant les monomorphismes, cf. N.D.E. (9).

(6) N.D.E. : De même, les limites inductives « quelconques » existent et se calculent « *argument par argument* », c.-à-d., $(\varinjlim_i \mathbf{F}_i)(\mathrm{S}) = \varinjlim_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$; mais en général le foncteur $\mathbf{h}$ ne commute *pas* aux limites inductives.

(7) N.D.E. : En particulier, le *noyau* d'un couple de morphismes $u, v : \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{G}$ est le sous-foncteur $\mathrm{Ker}(u, v)$ de $\mathbf{F}$ défini par $\mathrm{Ker}(u, v)(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{F}(\mathrm{S}) \mid u(x) = v(x)\}$.

(8) N.D.E. : $\{\varnothing\}$ (l'ensemble des parties de l'ensemble vide) désigne l'ensemble à un élément.

Un *monomorphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$ n'est autre qu'un morphisme $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ tel que pour $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, l'application d'ensembles correspondante $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ soit injective. [9]

Le foncteur Γ. Pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ on pose

$$\Gamma(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{F});$$

un élément de $\Gamma(\mathbf{F})$ est donc une famille $(\gamma_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, $\gamma_{\mathrm{S}} \in \mathbf{F}(\mathrm{S})$ telle que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, on ait $\mathbf{F}(f)(\gamma_{\mathrm{S}''}) = \gamma_{\mathrm{S}'}$.

On pose $\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})$ pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Si $\mathscr{C}$ a un objet final e, on a donc un isomorphisme $\Gamma(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{Hom}(e, \mathrm{X})$.

1.3. Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On note $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, i.e. la catégorie dont les objets sont les flèches $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(f, f')$ étant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ formé des u tels que $f = f' \circ u$. Si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $\mathscr{C}_{/e}$ est isomorphe à $\mathscr{C}$. La catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ possède un objet final : la flèche identique $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors on peut former la catégorie $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/f}$ que l'on note par abus de langage $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ et on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \simeq (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}\,.$$

Cette construction s'applique aussi à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$, on définit en particulier la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. D'autre part, on peut former la catégorie $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors $\Gamma(f)$ s'identifie à l'ensemble $\Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S})$ des 4
sections de T au-dessus de S, c'est-à-dire des flèches $\mathrm{S} \to \mathrm{T}$ inverses à droite de f. Remarquons que $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est alors un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et que l'on a :

$$\Gamma(\mathbf{h}_f) \simeq \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{T}}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S}) \simeq \Gamma(f).$$

1.4. On se propose maintenant de définir une *équivalence des catégories* $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ *et* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$, c'est-à-dire de prouver que « se donner un foncteur sur la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, c'est « la même chose » que se donner un foncteur sur $\mathscr{C}$ muni d'un morphisme dans $\mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ ».

(i) **Construction de** $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soit d'abord $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. On doit définir un foncteur $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Soit donc d'abord $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; définissons $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f)$ comme l'image inverse de $f \in \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$ par l'application $\mathrm{H}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$. [10]

---

[9] N.D.E. : Si $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ est injectif pour tout S, il est clair que $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ est un monomorphisme ; la réciproque se voit en considérant le diagramme $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{F} \to \mathbf{G}$. On obtient ainsi que : « $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal* $\mathbf{F} \to \mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ *est un isomorphisme* » (cf. EGA I, 5.3.8). De même, il est clair que si $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ est surjectif pour tout S, alors $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ est un *épimorphisme*, et la réciproque se voit en considérant la somme amalgamée $\mathbf{G} \coprod^{\mathbf{F}} \mathbf{G}$, cf. la démonstration du lemme 4.4.4 dans l'Exp. IV.

[10] N.D.E. : *Par exemple*, si $\mathrm{F} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$ alors H correspond à un morphisme $h : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{H}(\mathrm{T}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{S})$ est l'application $g \mapsto h \circ g$, d'où $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(-, \mathrm{X})$.

Soit ensuite $u : f \to f'$ une flèche de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; alors $\mathbf{F}(u) : \mathbf{F}(\mathrm{T}') \to \mathbf{F}(\mathrm{T})$ induit une application de $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f')$ dans $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f)$ que l'on note $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(u)$. On vérifie aussitôt que les applications

$$f \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f) \quad \text{et} \quad u \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(u)$$

définissent bien un foncteur sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, donc un objet $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soient enfin $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{H}' : \mathbf{F}' \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et $\mathrm{U} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[rr, "\mathrm{U}"] \arrow[dr, "\mathrm{H}"'] & & \mathbf{F}' \arrow[dl, "\mathrm{H}'"] \\ & \mathbf{h}_{\mathrm{S}} & \end{tikzcd} .$$

5 Alors pour tout $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'application $\mathrm{U}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{F}'(\mathrm{T})$ induit une application

$$\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})(f) : \quad \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f) \longrightarrow \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}')(f),$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}) : \quad \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) \longrightarrow \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}').$$

On vérifie aisément que les applications

$$\mathrm{H} \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) \quad \text{et} \quad \mathrm{U} \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})$$

définissent bien un foncteur $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

(ii) ***Proposition 1.4.1***. — *Le foncteur* $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ *est une équivalence de catégories.*

Indiquons seulement le principe de la construction d'un foncteur quasi-inverse $\beta_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. Soit $\mathbf{G}$ un foncteur sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; pour tout objet T de $\mathscr{C}$, on pose

$$\beta_{\mathrm{S}}(\mathbf{G})(\mathrm{T}) = \text{somme des ensembles } \mathbf{G}(f) \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{S}) = \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}),$$

ce qui définit un foncteur $\beta_{\mathrm{S}}(\mathbf{G})$ sur $\mathscr{C}$, qui est muni d'une projection évidente sur $\mathbf{h}_{\mathrm{S}}$.

1.5. *L'équivalence* α_{S} *commute aux foncteurs* Γ. En d'autres termes, si $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ l'objet correspondant de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$, on a

$$\Gamma(\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})) \simeq \Gamma(\mathrm{H}) \simeq \Gamma(\mathbf{F}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}).$$

L'équivalence α_{S} *commute aux foncteurs* $\mathbf{h}$, c.-à-d., si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ dont le transformé par α_{S} n'est autre que $\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(f)$, où

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$$

6 est le foncteur canonique [(11)]. En conséquence :

---

(11) N.D.E. : cf. la N.D.E. (10).

Proposition 1.5.1. — *Soit* $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ *un objet de* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. *Pour que* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que* $\mathbf{F} : \mathscr{C}^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable ; si* $\mathbf{F} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{T}}$, *alors* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ *est représentable par l'objet* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *de* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

L'équivalence α_{S} *est transitive en* S : si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on a un diagramme commutatif d'équivalences

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & (\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[r, "\alpha_f"] & \widehat{(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}} \arrow[dl, "\cong"] \\
& \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{T}}"] & \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}}
\end{tikzcd} ,$$

où $\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$ désigne (provisoirement) la *restriction* (cf. 1.6) du foncteur α_{S} aux objets au-dessus de $\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$.

1.6. Changement de base dans un foncteur. — Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a un foncteur canonique

$$i_{\mathrm{S}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

défini par $i_{\mathrm{S}}(f) = \mathrm{T}$ si f est la flèche $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on note $i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_f$ le foncteur :

$$i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \longrightarrow \mathscr{C}_{/\mathrm{S}},$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \arrow[r, "i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \arrow[r, "i_{\mathrm{S}}"] & \mathscr{C} \\
& \mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \arrow[ur, "i_{\mathrm{T}}"'] &
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire, *en identifiant* $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$ *comme nous le ferons désormais*, 7

$$i_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_{\mathrm{T}} .$$

De la même manière, si on identifie $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_{/e}$, lorsque $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $i_{\mathrm{S}/e} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \to \mathscr{C}_{/e}$ s'identifie à i_{S}.

Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (resp. $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$), soit $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ (resp. $p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{Y})$) l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ (resp. de $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$) lorsqu'il existe, défini par $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ (resp. $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$) muni de sa deuxième projection :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \times \mathrm{S} \arrow[d, "p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})"'] & \text{resp.} & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[d, "p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{Y})"] \\
\mathrm{S} & & \mathrm{T}
\end{tikzcd} .$$

Le foncteur (partiellement défini) p_{S} (resp. $p_{\mathrm{T/S}}$) s'appelle *foncteur de changement de base*. C'est par définition du produit (resp. du produit fibré) le foncteur adjoint à droite du foncteur i_{S} (resp. $i_{\mathrm{T/S}}$) [12]. On note également

$$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \qquad \text{et} \qquad p_{\mathrm{T/S}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}\,.$$

Le foncteur i_{S} définit un foncteur (*restriction*)

$$i_{\mathrm{S}}^{*} : \widehat{\mathscr{C}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}};$$

on note $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = i_{\mathrm{S}}^{*}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \circ i_{\mathrm{S}}$. On a évidemment

$$i_{\mathrm{T/S}}^{*} \circ i_{\mathrm{S}}^{*} = i_{\mathrm{T}}^{*},$$

c'est-à-dire pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$,

$$(\mathbf{F}_{\mathrm{S}})_{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\mathrm{T}}.$$

8 La notation demande une justification que voici :

Proposition 1.6.1. — *Pour que le foncteur* $(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que le produit* $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ *existe. On a alors*

$$(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}}}.$$

Ceci montre que $\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ a deux interprétations : *restriction* du foncteur $\mathbf{F}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, foncteur obtenu par *changement de base* $e \leftarrow \mathrm{S}$. Ceci conduit à la notation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{S}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{T}} \arrow[d, dash] \\
e & \mathrm{S} \arrow[l] & \mathrm{T} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

qui rend bien compte des deux interprétations précédentes.

Remarquons que l'on a

$$\Gamma(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{F}) \simeq \mathbf{F}(\mathrm{S}),$$

en particulier

$$\Gamma(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

1.7.0. — [13] Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. Considérons la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathbf{E}}$ des *objets de* $\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathbf{E}$: ses objets sont les couples (V, ρ) formés d'un objet V de $\mathscr{C}$ et d'un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme $\rho : \mathbf{h}_{\mathrm{V}} \to \mathbf{E}$, i.e. $\rho \in \mathbf{E}(\mathrm{V})$; un morphisme de (V, ρ) vers (V', ρ') est la

[12] N.D.E. : i.e. si $g : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ (resp. $h : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$) est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ (resp. $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$) alors $i_{\mathrm{S}}(g) = \mathrm{U}$ et $i_{\mathrm{T/S}}(h)$ est l'objet $f \circ h : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, et l'on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{U}, \mathrm{X} \times \mathrm{S}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}}(\mathrm{V}, \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{V}, \mathrm{X}).$$

[13] N.D.E. : On a ajouté le lemme ci-dessous (cf. SGA 4, I.3.4), il est utilisé dans la démonstration de 1.7.1 et sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

donnée d'un $\mathscr{C}$-morphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$ (i.e. $\mathbf{E}(f)(\rho') = \rho$). Notons $\mathbf{L}$ le foncteur

$$\varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{h}_{\mathrm{V}},$$

c.-à-d., pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{L}(\mathrm{S}) = \varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)} \mathbf{h}_{\mathrm{V}}(\mathrm{S})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de triplets (V, ρ, v), où $v : \mathrm{S} \to \mathrm{V}$ est un $\mathscr{C}$-morphisme, et où l'on identifie (V, ρ, v) à $(\mathrm{V}', \rho', f \circ v)$ pour tout $\mathscr{C}$-morphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$.

Alors, l'application $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ qui à la classe de (V, ρ, v) associe l'élément $\rho \circ v$ de $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ est bien définie, et définit un morphisme de foncteurs

$$\phi_{\mathbf{E}} : \varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{h}_{\mathrm{V}} \longrightarrow \mathbf{E}.$$

Lemme. — *$\phi_{\mathbf{E}}$ est un isomorphisme.*

En effet, soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Tout $x \in \mathrm{E}(\mathrm{S})$ est l'image par $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ du triplet $(\mathrm{S}, x, \mathrm{id}_{\mathrm{S}})$; ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ est surjective. D'autre part, soient $\ell_1 = (\mathrm{V}_1, \rho_1, v_1)$ et $\ell_2 = (\mathrm{V}_2, \rho_2, v_2)$ deux éléments de $\mathbf{L}(\mathrm{S})$ ayant même image dans $\mathbf{E}(\mathrm{S})$; posons $\gamma = \rho_1 \circ v_1 = \rho_2 \circ v_2$. Alors ℓ_1 et ℓ_2 sont tous deux égaux, dans $\mathbf{L}(\mathrm{S})$, à la classe du triplet $(\mathrm{S}, \gamma, \mathrm{id}_{\mathrm{S}})$. Ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ est injective.

Corollaire. — *Pour tout objet $\mathbf{F}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \varprojlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{F}(\mathrm{V}).$$

1.7. Objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, etc. — Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. Nous allons définir un autre objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}).$$

L'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini ci-dessus possède les propriétés suivantes :

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$ [14]

(ii) *La formation de $\underline{\mathrm{Hom}}$ commute à l'extension de la base :* 9

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})_{\mathrm{S}}.$$

(iii) $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *est un bifoncteur, contravariant en $\mathbf{F}$ et covariant en $\mathbf{G}$.*

Ces trois propriétés sont évidentes sur les définitions.

Nous allons montrer que, pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

[14] N.D.E. : et, si $\mathbf{E}$ est un troisième objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{F} \times \mathrm{G}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$.

Soit $\phi : \mathbf{E}\times\mathbf{F} \to \mathbf{G}$; nous devons lui associer un morphisme de $\mathbf{E}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Soit donc $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une flèche de $\mathscr{C}$. On a des applications

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}) \times \mathbf{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathbf{E}(\mathrm{S}') \times \mathbf{F}(\mathrm{S}') \xrightarrow{\phi(\mathrm{S}')} \mathbf{G}(\mathrm{S}').$$

Tout élément e de $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ définit donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une application $\mathbf{F}(\mathrm{S}') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ fonctorielle en S', c.-à-d., un élément $\theta_\phi(e)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S})$. On a donc obtenu une application

$$\phi \mapsto \theta_\phi, \qquad \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})),$$

qui est « fonctorielle en $\mathbf{E}$ ».

Proposition 1.7.1. — [15] *Soient* $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$.

(a) *L'application* $\phi \mapsto \theta_\phi$ *est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})).$$

(b) *De plus, on a un isomorphisme de foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

(a) Considérons les deux membres comme des foncteurs en $\mathbf{E}$. Le résultat annoncé est vrai si $\mathbf{E} = \mathbf{h}_\mathrm{X}$; en effet, ce n'est autre en ce cas que la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. D'autre part les deux membres comme foncteurs en $\mathbf{E}$ transforment limites inductives en limites projectives. Enfin, d'après le lemme 1.7.0, tout objet $\mathbf{E}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ est isomorphe à la limite inductive des $\mathbf{h}_\mathrm{X}$, où X parcourt la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathbf{E}}$. Ceci prouve (a).

[15] Esquissons une démonstration directe de (a). À tout $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))$, on associe l'élément ϕ_θ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini comme suit. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a une application

$$\theta(\mathrm{S}) : \mathbf{E}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{F} \times \mathrm{S}, \mathbf{G}),$$

fonctorielle en S. Si $(e, f) \in \mathbf{E}(\mathrm{S})\times\mathbf{F}(\mathrm{S})$, alors f est un morphisme $\mathrm{S} \to \mathbf{F}$, donc $f\times\mathrm{id}_\mathrm{S}$ est un morphisme $\mathrm{S} \to \mathbf{F} \times \mathrm{S}$; d'autre part, $\theta(\mathrm{S})(e)$ est un morphisme $\mathbf{F} \times \mathrm{S} \to \mathbf{G}$, donc par composition on obtient un morphisme :

$$\theta(\mathrm{S})(e) \circ (f \times \mathrm{id}_\mathrm{S}) : \mathrm{S} \longrightarrow \mathbf{G},$$

c.-à-d., un élément $\phi_\theta(\mathrm{S})(e, f)$ de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. On vérifie facilement que la correspondance $\mathrm{S} \mapsto \phi_\theta(\mathrm{S})$ est fonctorielle en S, donc définit un morphisme ϕ_θ de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ vers $\mathbf{G}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les applications $\theta \mapsto \phi_\theta$ et $\phi \mapsto \theta_\phi$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

---

[15] N.D.E. : On a ajouté le point (b), qui sera utile dans II.1 et II.3.11. D'autre part, on a esquissé une seconde démonstration, plus directe, du point (a).

Démontrons (b). Si $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a, d'après 1.7 (ii) et (a) appliqué à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))(\mathrm{S}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{E}_{\mathrm{S}}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{E}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}})\\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F} \times \mathrm{S}, \mathbf{G})\\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S})\end{aligned}$$

et ces isomorphismes sont fonctoriels en S.

Corollaire 1.7.2. — *On a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})),\\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})).\end{aligned}$$

10

En particulier, faisant $\mathbf{E} = \underline{\mathbf{e}}$, et compte tenu de $\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$, on a

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

Notons que la composition des Hom fournit des morphismes fonctoriels

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{H}).$$

Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, on note $\mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ formé des isomorphismes de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{G}$. On définit alors un sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ par :

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}).$$

On a alors des isomorphismes

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}),$$

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \simeq \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}).$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, on pose

$$\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F})\,, \qquad \mathrm{End}(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})),$$

$$\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F})\,, \qquad \mathrm{Aut}(\mathbf{F}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})).$$

La formation des objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, $\underline{\mathrm{Aut}}$, $\underline{\mathrm{End}}$ commute aux changements de base.

Remarque 1.7.3. — [16] Remarquons que l'on peut construire un objet isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de la manière suivante : on a un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F});$$

permutant $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$, on en déduit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

D'autre part, le morphisme identique de $\mathbf{F}$ est un élément de $\mathrm{End}(\mathbf{F})$ et définit 11

[16] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.7.3, pour des références ultérieures.

donc un morphisme $\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})$. Faisant de même avec $\mathbf{G}$ et effectuant le produit, on trouve un morphisme

$$\underline{\mathbf{e}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

Il est alors immédiat que le produit fibré de $\underline{\mathbf{e}}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ au-dessus de $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

Toutes ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $\mathbf{F} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$, $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{Y}}$. Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}, \mathbf{h}_{\mathrm{Y}})$ est représentable par un objet de $\mathscr{C}$, on note cet objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Il possède la propriété suivante : si $\mathrm{Z} \times \mathrm{X}$ existe, alors

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Z} \times \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Cette propriété le caractérise lorsque les produits existent dans $\mathscr{C}$.

On définit de même (lorsqu'ils veulent bien exister) des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{X});$$

remarquons simplement que d'après la construction donnée plus haut, $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ existe chaque fois que les produit fibrés existent dans $\mathscr{C}$ et que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X})$ et $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Y})$ existent.

Tout ce qui précède s'applique également à des catégories de la forme $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Les objets correspondants seront notés de manière aussi explicite que possible par des symboles appropriés : par exemple, si T et T′ sont deux objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{T}'/\mathrm{S})$

12 **1.8. Objets constants.** — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie où les sommes directes et les produits fibrés existent et où les sommes directes commutent aux changements de base (par exemple la catégorie des schémas [(17)]). Pour tout ensemble E et pour tout objet S de $\mathscr{C}$, posons

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = \begin{cases} \text{la somme directe d'une famille } (\mathrm{S}_i)_{i \in \mathrm{E}} \\ \text{d'objets de } \mathscr{C} \text{ tous isomorphes à S.} \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Cet objet est caractérisé par la formule :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{E}_{\mathrm{S}}, \mathrm{T}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{S}, \mathrm{T})), \tag{1.8.2}$$

pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, où le second Hom est pris dans la catégorie des ensembles.

L'objet E_{S} est muni d'une projection canonique sur S, de telle façon que $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ est en fait un foncteur de $(\mathbf{Ens})$ dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

[(18)] Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est une flèche de $\mathscr{C}$, on a, puisque les sommes directes commutent aux changements de base,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}'} = (\mathrm{E}_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S}'}.$$

En particulier, si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, on a

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{E}_e)_{\mathrm{S}}.$$

[(17)]N.D.E. : On a remplacé l'ancienne terminologie « préschémas/schémas » par la terminologie actuelle « schémas/schémas séparés ».

[(18)]N.D.E. : Dans les trois paragraphes qui suivent, on a modifié l'ordre des phrases et ajouté quelques précisions concernant le rôle de l'hypothèse $(*)$ ci-dessous.

Le foncteur $\mathrm{E} \to \mathrm{E_S}/\mathrm{S}$, de (**Ens**) dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, *commute aux produits finis.* Il suffit, pour cela, de voir que

$$(\times) \qquad \mathrm{E_S} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F_S} = (\mathrm{E} \times \mathrm{F})_\mathrm{S}.$$

Or, d'après les résultats de 1.7 appliqués à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on a, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$, des isomorphismes naturels (tous les Hom non spécifiés étant pris dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}((\mathrm{E}\times\mathrm{F})_\mathrm{S},\mathrm{T}) &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E}\times\mathrm{F},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{T})) \cong \\ &\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{F},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{T}))) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}(\mathrm{F_S},\mathrm{T}))\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{E_S}\times_\mathrm{S}\mathrm{F_S},\mathrm{T}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{E_S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T}))).$$

Or, $\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})$, d'où $(\times)$.

Supposons que, $\varnothing$ désignant un objet initial de $\mathscr{C}$, le diagramme

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & \mathrm{S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{S} & \longrightarrow & \mathrm{S}\coprod\mathrm{S} \end{array} \qquad \text{soit cartésien.}$$

(C'est le cas de la catégorie des schémas). [19] Alors le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ *commute aux limites projectives finies.*

En effet, compte tenu de $(\times)$, il suffit de voir que $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ commute aux produits fibrés. Soient $u : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ et $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications d'ensembles. Comme dans $\mathscr{C}$ les sommes directes commutent aux changements de base, on a

$$(1) \qquad \mathrm{F_S} \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{f\in\mathrm{F}} \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{\substack{f\in\mathrm{F}\\ x\in\mathrm{E}}} \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x.$$

Si $v(f) \neq u(x)$, il existe dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ un morphisme

$$\mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \longrightarrow \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{S}_{v(f)}\coprod \mathrm{S}_{u(x)}}{\times} \mathrm{S}_x;$$

or d'après l'hypothèse $(*)$ le terme de droite est $\varnothing$. Par conséquent,

$$(2) \qquad \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \cong \varnothing \quad \text{si } v(f) \neq u(x).$$

D'autre part, si $v(f) = u(x)$, il existe dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ un morphisme

$$\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x;$$

comme $\mathrm{S} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{S}$ est objet final de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, il en résulte que

$$(3) \qquad \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \cong \mathrm{S} \quad \text{si } v(f) = u(x).$$

---

[19] N.D.E. : $(*)$ n'est *pas* vérifiée si $\mathscr{C}$ est la catégorie dont les flèches sont $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $\mathrm{id_A}, \mathrm{id_B}$; dans ce cas $\mathrm{B}\coprod\mathrm{B} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\times_\mathrm{B}\mathrm{B} = \mathrm{B} \not\cong \mathrm{A}$.

Combinant (1), (2) et (3) on obtient un isomorphisme fonctoriel en S

$$\mathrm{F_S} \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{\mathrm{F} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{E}} \mathrm{S} = (\mathrm{F} \underset{\mathrm{G}}{\times} \mathrm{E})_{\mathrm{S}}.$$

Un objet de la forme $\mathrm{E_S}$ sera appelé *objet constant*. Remarquons que l'on a un morphisme fonctoriel en E :

$$\mathrm{E} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$$

qui associe à chaque $i \in \mathrm{E}$, la section de $\mathrm{E_S}$ sur S définie par l'isomorphisme de S sur S_i. Supposons la condition $(*)$ vérifiée pour tout objet S de $\mathscr{C}$; alors le morphisme $\mathrm{E} \to \Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$ est un monomorphisme pour tout $\mathrm{S} \not\simeq \varnothing$.

Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, alors $\Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$ s'identifie aux applications locale-
13 ment constantes de l'espace topologique S dans l'ensemble E, l'application précédente associant à chaque élément de E l'application constante correspondante. Remarquons qu'il résulte de ce qu'on vient de dire que $\mathrm{E_S}$ peut aussi être défini comme représentant le foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe l'ensemble des fonctions localement constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E. [20]

2. Structures algébriques

Étant donnée une espèce de structure algébrique dans la catégorie des ensembles, nous nous proposons de l'étendre à la catégorie $\mathscr{C}$. Traitons d'abord un exemple : le cas des groupes.

2.1. Structures de groupe.

— Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Définition 2.1.1. — Soit $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ la donnée pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ d'une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbf{G}(\mathrm{S})$, de telle manière que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application $\mathbf{G}(f) : \mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme de groupes. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on appelle *morphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ tout morphisme $u \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'application d'ensembles $u(\mathrm{S}) : \mathbf{G}(\mathrm{S}) \to \mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un homomorphisme de groupes.

On note $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ et ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.) la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes.

Exemples. — Soit $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$; l'objet $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ est muni de manière évidente d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. L'objet final $\underline{\mathbf{e}}$ possède une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique qui en fait un objet final de ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.).

Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, soit $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. La famille des $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$
14 définit un élément $e_{\mathbf{G}} \in \Gamma(\mathbf{G}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G})$ qui est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

[20] N.D.E. : Notons aussi que le morphisme diagonal $\mathrm{E_S} \to \mathrm{E_S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E_S} = (\mathrm{E} \times \mathrm{E})_{\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, i.e. $\mathrm{E_S}$ est séparé sur S.

$\underline{\mathbf{e}} \to \mathbf{G}$ et que l'on appelle *section unité de* $\mathbf{G}$.

Remarquons que se donner une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ revient à se donner une loi de composition sur $\mathbf{G}$, c'est-à-dire un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme

$$\pi_{\mathbf{G}} \;:\; \mathbf{G} \times \mathbf{G} \;\longrightarrow \mathbf{G}$$

tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \pi_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ munisse $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ d'une structure de groupe.

De la même manière, $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{G}}"] \arrow[d, "(f,f)"'] & \mathbf{G} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{H} \times \mathbf{H} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{H}}"] & \mathbf{H} \end{tikzcd} \quad .$$

Un sous-objet $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel que, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ possède évidemment une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe induite par celle de $\mathbf{G}$: c'est la seule pour laquelle le monomorphisme $\mathbf{H} \to \mathbf{G}$ soit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ muni de cette structure est appelé *sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de* $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, le produit $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe évidente : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on munit $\mathbf{G}(\mathrm{S}) \times \mathbf{H}(\mathrm{S})$ de la structure de groupe produit des structures de groupes données sur $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ muni de cette structure sera dit *$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe produit* de $\mathbf{G}$ et de $\mathbf{H}$ (c'en est d'ailleurs le produit dans la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes).

Si $\mathbf{G}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, alors pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{G}_{\mathrm{S}}$ est un $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupe. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on définira l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{H}_{\mathrm{S}})$$

(Nota : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}$ n'est pas en général un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, ni a fortiori l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ dans 15
la catégorie ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.)).

On définit de même les objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}).$$

Définition 2.1.2. — Soit $\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On appelle structure de $\mathscr{C}$-groupe sur G une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{h}_{\mathrm{G}} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle morphisme du $\mathscr{C}$-groupe G dans le $\mathscr{C}$-groupe H un élément $u \in \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{h}_{\mathrm{H}})$ qui définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ dans $\mathbf{h}_{\mathrm{H}}$.

On note ($\mathscr{C}$-Gr.) la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes. Notons qu'il existe dans (**Cat**) un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{C}\text{-Gr.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}) \arrow[d] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "\mathbf{h}"] & \widehat{\mathscr{C}} \end{tikzcd} \quad .$$

Toutes les définitions et constructions précédentes se transportent donc aussitôt à ($\mathscr{C}$-Gr.) chaque fois que les foncteurs qu'elles font intervenir (produits, objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, etc.) sont représentables. Elles s'appliquent aussi aux catégories $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. En ce cas, nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-}\mathrm{Gr.}}$ pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-}\mathrm{Gr.}}$, etc.

2.2. Plus généralement, si (T) est une espèce de structure sur n ensembles de base définie par limites projectives finies (par exemple, par des commutativités de diagrammes construits avec des produits cartésiens : structures de monoïde, groupe, d'ensemble à opérateurs, de module sur un anneau, d'algèbre de Lie sur un anneau, etc.) la construction précédente permet de définir la notion de « structure d'espèce (T)
16 sur n objets $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ » : une telle structure sera la donnée pour chaque S de $\mathscr{C}$, d'une structure d'espèce (T) sur les ensembles $\mathbf{F}_1(\mathrm{S}), \ldots, \mathbf{F}_n(\mathrm{S})$ de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, la famille d'applications $(\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'')) \to (\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'))$ soit un poly-homomorphisme pour l'espèce de structure (T). On définit de manière semblable les morphismes de l'espèce de structure (T), d'où une catégorie $(\widehat{\mathscr{C}} \times \widehat{\mathscr{C}} \cdots \times \widehat{\mathscr{C}})^{(\mathrm{T})}$. Le foncteur pleinement fidèle $(\mathbf{h} \times \mathbf{h} \times \cdots \times \mathbf{h})$ permet alors de définir par image inverse la catégorie $(\mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \cdots \times \mathscr{C})^{(\mathrm{T})}$, puis, comme il commute aux limites projectives, d'y transporter toutes les propriétés, notions et notations fonctorielles introduites dans $\widehat{\mathscr{C}}$. Supposons maintenant que dans $\mathscr{C}$ les produits fibrés existent, et soit (T) une espèce de structure algébrique définie par la *donnée* de certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à des *axiomes* consistant en certaines commutativités de diagrammes construits à l'aide des flèches précédentes. Une structure d'espèce (T) sur une famille d'objets de $\mathscr{C}$ sera donc définie par certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à certaines conditions de commutation. Il en résulte que si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories possédant des produits et $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un foncteur *commutant aux produits*, alors pour toute famille d'objets (F_i) de $\mathscr{C}$ munie d'une structure d'espèce (T), la famille $(f(\mathrm{F}_i))$ d'objets de $\mathscr{C}'$ sera par là-même munie elle aussi d'une structure d'espèce (T). Tout $\mathscr{C}$-groupe sera transformé en $\mathscr{C}'$-groupe, tout couple ($\mathscr{C}$-anneau, $\mathscr{C}$-module sur ce $\mathscr{C}$-anneau) en un couple analogue dans $\mathscr{C}'$, etc.

Soit en particulier $\mathscr{C}$ une catégorie satisfaisant aux conditions de 1.8 [(21)] ; le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ défini dans *loc. cit.* commute aux limites projectives finies ; il transforme donc groupe en S-groupe (i.e. $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$-groupe), anneau en S-anneau, etc.

Remarque. — Il est bon de remarquer que le procédé de construction précédent appliqué à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$ redonne bien les notions que l'on y a déjà définies ; en d'autres termes, il revient au même de se donner sur un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ une structure d'espèce (T) quand on considère cet objet comme un foncteur sur $\mathscr{C}$, ou de se donner une structure d'espèce (T) sur le foncteur représentable sur $\widehat{\mathscr{C}}$ défini par cet objet. [(22)]

[(21)] N.D.E. : y compris la condition $(*)$

[(22)] N.D.E. : Par exemple, pour les structures de groupes : soit $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$; si le foncteur $\widehat{\mathscr{C}} \to$ (**Ens**), $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est muni d'une structure de groupe, il en est de même de sa restriction à $\mathscr{C}$, $\mathrm{X} \mapsto \mathbf{G}(\mathrm{X})$. Réciproquement, si $\mathbf{G}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, alors le morphisme « de multiplication »

Nous allons encore traiter deux cas particuliers de la construction précédente, le cas des structures à groupes d'opérateurs et le cas des modules. 17

2.3. Structures à groupes d'opérateurs. —

Définition 2.3.1. — Soient $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.})$. Une structure d'objet à $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe d'opérateurs $\mathbf{G}$ (ou de $\mathbf{G}$-objet) sur $\mathbf{E}$ est la donnée sur $\mathbf{E}(\mathrm{S})$, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ de telle manière que, pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application d'ensembles $\mathbf{E}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$ soit compatible avec l'homomorphisme d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$.

Comme d'habitude, il revient au même de se donner un morphisme

$$\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

qui pour tout S munisse $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ d'une structure d'ensemble à opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. Mais $\mathrm{Hom}(\mathbf{G} \times \mathbf{E}, \mathbf{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E}))$, donc μ définit un morphisme $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E})$ et il est immédiat que celui-ci applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ et que c'est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. En conséquence : *se donner sur* $\mathbf{E}$ *une structure d'objet à* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupe d'opérateurs* $\mathbf{G}$ *est équivalent à se donner un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E}).$$

En particulier, tout élément $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ définit un automorphisme $\rho(g)$ du foncteur $\mathbf{E}_{\mathrm{S}}$, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ commutant à la projection $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$, et en particulier un automorphisme de l'ensemble $\mathbf{E}(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Définition 2.3.2. — On note $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ le sous-objet de $\mathbf{E}$ défini comme suit :

$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{E}(\mathrm{S}) \mid x_{\mathrm{S}'} \text{ invariant sous } \mathbf{G}(\mathrm{S}') \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},$$

où $x_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image de x par $\mathbf{E}(\mathrm{S}) \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$.

Alors $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ (« sous-objet des invariants de $\mathbf{G}$ ») est le plus grand sous-objet de $\mathbf{E}$ 18
sur lequel $\mathbf{G}$ opère trivialement.

Définition 2.3.3. — Soit $\mathbf{F}$ un sous-objet de $\mathbf{E}$. On note $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ les sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ définis par

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = \mathbf{F}_{\mathrm{S}}\} \quad ^{(23)}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}(\mathrm{S}') = \mathbf{F}(\mathrm{S}'), \quad \text{pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}_{\mathrm{S}}} = \text{ identité}\}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}(\mathrm{S}')} = \text{ identité}, \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$

où la barre verticale après $\rho(g)$ désigne la restriction.

$\pi_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ induit pour pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ une structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, fonctorielle en $\mathbf{F}$.

(23) N.D.E. : On a corrigé l'original, en remplaçant l'inclusion $\rho(g)\mathbf{F}_{\mathrm{S}} \subset \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ par une égalité, afin d'assurer que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{F})$ soit bien un groupe (voir $\mathrm{VI_B}$ 6.4 pour des conditions sous lesquelles le « *transporteur* » coïncide avec le « *transporteur strict* »).

Scholie 2.3.3.1. — [24] En particulier, soit $x \in \Gamma(\mathbf{E})$, i.e. (cf. 1.2) une collection d'éléments $x_{\mathrm{S}} \in \mathbf{E}(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, telle que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on ait $\mathbf{E}(f)(x_{\mathrm{S}}) = x_{\mathrm{S}'}$ (si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0 on a $\Gamma(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathrm{S}_0)$). Alors x définit un sous-foncteur de $\mathbf{E}$, qu'on notera $\mathbf{x}$, et l'on a $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{x} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{x}$. On notera $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ et l'on appellera *stabilisateur* de x ce foncteur ; pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a donc :

$$\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)(\mathrm{S}) = \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{S}}\}.$$

Supposons que les produits fibrés existent dans $\mathscr{C}$; si $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathbf{E} = \mathbf{h}_{\mathrm{E}}$), où G est un $\mathscr{C}$-groupe (resp. $\mathrm{E} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), et si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0, de sorte que x est un morphisme $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{E}$, alors $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ est *représentable* par le produit fibré $\mathrm{G} \times_{\mathrm{E}} \mathrm{S}_0$, où $\mathrm{G} \to \mathrm{E}$ est le composé de $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times x : \mathrm{G} = \mathrm{G} \times \mathrm{S}_0 \to \mathrm{G} \times \mathrm{E}$ et de $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$.

Remarque 2.3.3.2. — [24] La formation de $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F}$ *commute au changement de base*, c.-à-d., pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a

$$(\mathbf{E}^{\mathbf{G}})_{\mathrm{S}} = (\mathbf{E}_{\mathrm{S}})^{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}, \qquad (\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F})_{\mathrm{S}} \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}\, \mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \qquad (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F})_{\mathrm{S}} \simeq \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}\, \mathbf{F}_{\mathrm{S}}.$$

Définition 2.3.4. — Si G est un $\mathscr{C}$-groupe et $\mathbf{E}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ (resp. E un objet de $\mathscr{C}$) une structure de G-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. sur E) est une structure de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{h}_{\mathrm{E}}$).

Vu cette définition, toutes les notions et notations définies ci-dessus se transportent à $\mathscr{C}$, lorsqu'elles ne font intervenir que des foncteurs représentables : par exemple si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{h}_{\mathrm{G}}}(\mathbf{h}_{\mathrm{F}})$ est représentable, alors il existe un et un seul sous-objet de G qui le représente et qui est alors un sous-$\mathscr{C}$-groupe de G, on le note $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, etc.

Définition 2.3.5. — a) On dit que le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ opère sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ si $\mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que, pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de groupe.

Il revient au même de dire que pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme $\rho(g)$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{S}}$
19 est un automorphisme de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupes, ou encore que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{H})$ applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{H})$.

b) Dans la situation ci-dessus, il existe sur le produit $\mathbf{H} \times \mathbf{G}$ une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique telle que, pour tout S, $(\mathbf{H} \times \mathbf{G})(\mathrm{S})$ soit le produit semi-direct des groupes $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ relativement à l'opération donnée de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ sur $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. On notera ce $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ et on l'appellera *produit semi-direct de* $\mathbf{H}$ *par* $\mathbf{G}$. On a donc par définition

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathbf{H}(\mathrm{S}) \cdot \mathbf{G}(\mathrm{S}).$$

Soit $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. Pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, soit $\mathrm{Int}(g)$ l'automorphisme de $\mathbf{G}(\mathrm{S}')$ défini par $\mathrm{Int}(g)h = ghg^{-1}$. Cette définition se prolonge en celle d'un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\mathrm{Int} : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \subset \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{G}).$$

[24] N.D.E. : On a ajouté le scholie 2.3.3.1 et la remarque 2.3.3.2.

La définition 2.3.3 s'applique donc et on a des sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E})$$

pour tout sous-objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{G}$.

Définition 2.3.6. — On appelle *centre* de $\mathbf{G}$ et on note $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G})$ le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$. On dit que $\mathbf{G}$ est commutatif si $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ est commutatif pour tout S.

On dit que le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ est *invariant* dans $\mathbf{G}$ si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ est invariant dans $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour tout S. [25]

Définition 2.3.6.1. — [26] Soit $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. On appelle *noyau* de f, et l'on note $\mathrm{Ker}\, f$ le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\mathbf{G}$ défini par

$$(\mathrm{Ker}\, f)(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid f(\mathrm{S})(x) = 1\} = \mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$$

pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$; c'est un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe *invariant*.

Notons que si $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ et $\mathbf{G}' = \mathbf{h}_{\mathrm{G}'}$, si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0 et si les produits fibrés existent dans $\mathscr{C}$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est *représentable* par $\mathrm{S}_0 \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$.

Définition 2.3.6.2. — [26] Soient $\mathbf{E} \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe opérant sur $\mathbf{E}$. On dit que l'opération de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{E}$ est *fidèle* si le noyau du morphisme $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ est trivial, c.-à-d., si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, la condition $g_{\mathrm{S}'} \cdot x = x$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathbf{E}(\mathrm{S}')$, entraîne $g = 1$.

Beaucoup de définitions et de propositions de la théorie élémentaire des groupes se transposent aisément. Signalons simplement la suivante qui nous sera utile :

Proposition 2.3.7. — *Soit* $f : \mathbf{W} \to \mathbf{G}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes. Posons* $\mathbf{H}(\mathrm{S}) = \mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$. *Soit* $u : \mathbf{G} \to \mathbf{W}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes qui soit une section de* f 20
(*et qui est alors nécessairement un monomorphisme*). *Alors* $\mathbf{W}$ *s'identifie au produit semi-direct de* $\mathbf{H}$ *par* $\mathbf{G}$ *pour l'opération de* $\mathbf{G}$ *sur* $\mathbf{H}$ *définie par* $(g, h) \mapsto \mathrm{Int}(u(g))h$ *pour* $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, $h \in \mathbf{H}(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

L'ensemble de ces définitions et propositions se transporte comme d'habitude à $\mathscr{C}$. On définit en particulier le produit semi-direct de deux $\mathscr{C}$-groupes H et G (G opérant sur H) lorsque le produit cartésien $\mathrm{H} \times \mathrm{G}$ existe, et on a l'analogue de la proposition 2.3.7 sous la forme suivante :

Proposition 2.3.8. — *Soit* $\mathrm{H} \xrightarrow{i} \mathrm{W} \xrightarrow{f} \mathrm{G}$ *une suite de morphismes de* $\mathscr{C}$*-groupes telle que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $(\mathrm{H}(\mathrm{S}),\ i(\mathrm{S}))$ *soit un noyau de* $f(\mathrm{S}) : \mathrm{W}(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$. *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{W}$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes qui soit une section de* f. *Alors* W *s'identifie au produit semi-direct de* H *par* G *pour l'opération de* G *sur* H *telle que si* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, *si* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *et* $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, *on ait* $\mathrm{Int}(u(g))i(h) = i({}^g h)$.

[25] N.D.E. : De plus, on dit que $\mathbf{H}$ est *central* dans $\mathbf{G}$ si $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ est central dans $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour tout S.

[26] N.D.E. : On a ajouté les définitions 2.3.6.1 et 2.3.6.2.

3. La catégorie des O-modules, la catégorie des G-O-modules

Définition 3.1. — Soient $\mathbf{O}$ et $\mathbf{F}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que $\mathbf{F}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-module sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, ou en abrégé un $\mathbf{O}$-module, si, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a muni $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ d'une structure d'anneau et $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ d'une structure de module sur cet anneau de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, $\mathbf{O}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{O}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme d'anneaux et $\mathbf{F}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{F}(\mathrm{S}')$ un homomorphisme de groupes abéliens compatible avec cet homomorphisme d'anneaux.

Si $\mathbf{O}$ est fixé, on définit de manière habituelle un morphisme des $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$, d'où le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, et la catégorie des $\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{O}$-Mod.).

Lemme 3.1.1. — [27] ($\mathbf{O}$-Mod.) *est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument ». De plus,* ($\mathbf{O}$-Mod.) *vérifie l'axiome* (AB 5) (cf. [**Gr57**, 1.5])*, c.-à-d., les sommes directes arbitraires existent et si* $\mathbf{M}$ *est un* $\mathbf{O}$*-module,* $\mathbf{N}$ *un sous-module, et* $(\mathbf{F}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille filtrante croissante de sous-modules de* $\mathbf{M}$*, alors*

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} (\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) = \Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{F}_i\Big) \bigcap \mathbf{N}.$$

En effet, soit $f : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$ un morphisme de $\mathbf{O}$-modules. On définit les $\mathbf{O}$-modules $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$) en posant, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $(\mathrm{Ker}\, f)(\mathrm{S}) = \mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$ (resp. $\cdots$). Alors $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Coker}\, f$) est un noyau (resp. conoyau) de f, et l'on a un isomorphisme de $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{F}/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$. Ceci prouve que ($\mathbf{O}$-Mod.) est une catégorie abélienne.

Les sommes directes arbitraires existent et sont définies « argument par argument ». Enfin, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}$-module, $\mathbf{N}$ un sous-module, et $(\mathbf{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille *filtrante croissante* de sous-modules de $\mathbf{M}$, alors l'inclusion

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} (\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) \subset \Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{F}_i\Big) \bigcap \mathbf{N}$$

est une égalité : en effet, si $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{N}(\mathrm{S}) \cap \bigcup_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathbf{N}(\mathrm{S}) \cap \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$.

Proposition 3.1.2. — [27] *On suppose la catégorie* $\mathscr{C}$ petite*, c.-à-d., que* $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *est un ensemble. Alors* $\mathbf{O}$ *est un générateur de* ($\mathbf{O}$-Mod.) *; par conséquent,* ($\mathbf{O}$-Mod.) *possède assez d'objets injectifs.*

Démonstration. Soit $\mathbf{F}$ un $\mathbf{O}$-module. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, soit $\mathbf{F}_0(\mathrm{S})$ un système de générateurs du $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module $\mathbf{F}(\mathrm{S})$. Comme, par hypothèse, $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ est un ensemble, on peut considérer l'ensemble $\mathrm{I} = \bigsqcup_{\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})} \mathbf{F}_0(\mathrm{S})$; alors on a un épimorphisme

$$\mathbf{O}^{\oplus \mathrm{I}} \twoheadrightarrow \mathbf{F}.$$

[27] N.D.E. : On a ajouté les énoncés 3.1.1 et 3.1.2 pour faire voir que la catégorie ($\mathbf{O}$-Mod.) est abélienne et vérifie l'axiome (AB 5), et de plus possède assez d'objets injectifs si la catégorie $\mathscr{C}$ est petite.

Ceci montre que $\mathbf{O}$ est un générateur de ($\mathbf{O}$-Mod.) (cf. [**Gr57**, 1.9.1]). Comme ($\mathbf{O}$-Mod.) vérifie (AB 5), il résulte alors de [**Gr57**, 1.10.1] que ($\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs.

Remarque 3.1.3. — Si $\mathbf{O}_0$ est le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau défini par $\mathbf{O}_0(\mathrm{S}) = \mathbb{Z}$ (qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur associé à l'objet constant $\mathbb{Z}$), alors la catégorie des $\mathbf{O}_0$-modules est isomorphe à la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes commutatifs.

Définition 3.1.4. — Remarquons que, si $\mathbf{F}$ est un $\mathbf{O}$-module, alors pour tout $\mathrm{S} \in$ **21**
$\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ est un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module. On peut donc définir un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe abélien $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{F}_\mathrm{S}, \mathbf{F}'_\mathrm{S}).$$

On définira de même des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'), \quad \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}),$$

le dernier étant un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe pour la structure induite par la composition des automorphismes.

Définition 3.2. — Soient $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau, $\mathbf{F}$ un $\mathbf{O}$-module et $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. On appelle structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module sur $\mathbf{F}$ une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de sa structure de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module.

Il revient au même de dire que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$$

défini en 2.3 applique $\mathbf{G}$ dans le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F})$ de $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$. Se donner une *structure de* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$*-module* sur le $\mathbf{O}$-module $\mathbf{F}$, c'est donc se donner un *morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}).$$

On définit de manière naturelle le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, donc la catégorie additive des $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.).

Remarque 3.2.1. — Le lecteur remarquera que ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) peut également se définir comme la catégorie des $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$-modules, où $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$ est l'algèbre du $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, dont la définition est claire. [(28)] Par conséquent, d'après 3.1.1 et 3.1.2, ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome (AB 5) ; de plus, si $\mathscr{C}$ est *petite*, ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs.

Toutes les constructions de ce paragraphe se spécialisent aussitôt au cas où $\mathbf{G}$ (ou **22**
$\mathbf{O}$, ou les deux) sont représentables par des objets de $\mathscr{C}$ qui sont par là-même munis des structures algébriques correspondantes.

Nous avons traité succinctement le cas des principales structures algébriques rencontrées dans la suite de ce séminaire. Pour les autres (structure de $\mathbf{O}$-algèbre de Lie

(28) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit ; ceci sera utilisé dans la section 5.

par exemple), nous croyons que le lecteur aura eu suffisamment d'exemples dans ce paragraphe pour pouvoir dans chaque cas particulier faire fonctionner lui-même le mécanisme général esquissé dans 2.2.

Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à la catégorie des schémas notée (**Sch**) et plus généralement aux catégories $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ (qu'on notera aussi $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$).

4. Structures algébriques dans la catégorie des schémas

Nous nous permettrons, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, les abus de langage suivants : on désignera par T l'objet $\mathrm{T} \xrightarrow{f} \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, la donnée de f (« morphisme structural de T ») étant sous-entendue, et on identifiera $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie de $\widehat{\mathscr{C}}$. Compte tenu des compatibilités énoncées aux paragraphes précédents, ces identifications peuvent se faire sans danger.

Nous simplifierons d'autre part les appellations sur le modèle suivant : un (**Sch**)-groupe sera aussi appelé *schéma en groupes*, un $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$-groupe *schéma en groupes sur* S, ou S-*schéma en groupes*, ou S-*groupe*, ou A-*groupe* lorsque S sera le spectre de l'anneau A.

4.1. Schémas constants. — La catégorie des schémas satisfait aux conditions exigées en 1.8. On peut donc y définir les objets constants ; pour tout ensemble E, on a un schéma $\mathrm{E}_{\mathbb{Z}}$ et pour tout schéma S, un S-schéma $\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{E}_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{S}}$. Rappelons (cf. *loc. cit.*)
23 que pour tout S-schéma T, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}, \mathrm{E}_{\mathrm{S}})$ est l'ensemble des applications localement constantes de l'espace topologique T dans E.

Le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies. En particulier si G est un groupe, G_{S} est un S-schéma en groupes ; si O est un anneau, O_{S} est un S-schéma en anneaux, etc.

4.2. S-**groupes affines.** — Rappelons un certain nombre de choses sur les S-schémas affines (EGA II, § 1). On dit que le S-schéma T est *affine sur* S si l'image réciproque de tout ouvert affine de S est affine. La $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, que l'on désigne par $\mathscr{A}(\mathrm{T})$, est alors *quasi-cohérente* (f désigne le morphisme structural de T). Réciproquement, à toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$, on peut faire correspondre un S-schéma affine sur S noté $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Ces foncteurs $\mathrm{T} \mapsto \mathscr{A}(\mathrm{T})$ et $\mathscr{A} \mapsto \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des S-schémas affines sur S et la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes.

Il en résulte que se donner une structure algébrique sur un S-schéma affine T est équivalent à se donner la structure correspondante sur $\mathscr{A}(\mathrm{T})$ dans la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes. En particulier, si G est un S-groupe affine sur S, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est munie d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre augmentée, c'est-à-dire que l'on
24 a deux *morphismes de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres*

$$\Delta : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$$

correspondant aux morphismes de S-schémas

$$\pi : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad e_{\mathrm{G}} : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Les applications Δ et ε vérifient les conditions suivantes (qui expriment que G est un S-monoïde) :

(HA 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] & \\ \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \\ & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"'] & \end{tikzcd} .$$

(HA 2) : Δ *est compatible avec* ε : les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \varepsilon} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad ,$$

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad .$$

(29)

Profitons de la circonstance pour remarquer une fois encore qu'il résulte de la définition d'une structure de S-groupe que pour se donner une telle structure sur un S-schéma G affine sur S, *il n'est pas nécessaire de vérifier quoi ce soit sur* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, mais simplement de munir chaque $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ pour S' au-dessus de S d'une structure de groupe fonctorielle en S'. Cette remarque s'applique *mutatis mutandis* aux morphismes. 25

4.3. Les groupes $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$. L'anneau $\mathbb{O}$

4.3.1. — Soit $\mathbf{G}_a$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_a(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$$

muni de la structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe définie par la structure de groupe additif de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. Il est représentable par un schéma affine que l'on notera $\mathbb{G}_a$, et qui est donc un *schéma en groupes*

$$\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}].$$

En effet, $\mathbb{G}_a(\mathrm{S}) = \operatorname{Hom}(\mathrm{S}, \mathbb{G}_a) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$.

(29) N.D.E. : Et, bien sûr, le morphisme d'inversion $\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\tau : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$ qui, avec Δ et ε, fait de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbre de Hopf*.

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, qui correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-bigèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}\otimes 1 + 1\otimes \mathrm{T}, \qquad \varepsilon(\mathrm{T}) = 0.$$

4.3.2. — Soit $\mathbf{G}_m$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_m(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times,$$

où $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$, muni de sa structure naturelle de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe. Il est représentable par un schéma affine noté $\mathbb{G}_m$

$$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}] = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathbb{Z}],$$

26 où $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ désigne l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'anneau $\mathbb{Z}$. En effet

$$\mathbb{G}_m(\mathrm{S}) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times.$$

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ qui correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathbb{Z}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(x) = x\otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad \text{pour} \quad x\in\mathbb{Z}.$$

4.3.3. — Soit $\mathbf{O}$ le foncteur $\mathbf{G}_a$ muni de sa structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-anneau. Il est représenté par le schéma $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}]$ que l'on notera $\mathbb{O}$ lorsqu'on le considèrera comme muni de sa structure de *schéma d'anneaux*.

Pour tout schéma S, $\mathbb{O}_\mathrm{S} = \mathrm{S}\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}] = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T}])$ est donc un S-schéma en anneaux, affine sur S. (*Nota* : dans EGA II 1.7.13, $\mathbb{O}_\mathrm{S}$ est noté S[T]).

4.3.3.1. — [30] Pour tout objet $\mathbf{X}$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, $\mathbf{O}(\mathbf{X}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{O})$ est muni d'une structure d'anneau, fonctorielle en $\mathbf{X}$. En particulier, si X' est un schéma et si l'on se donne des morphismes $x : \mathrm{X}'\to\mathbf{X}$ et $f : \mathbf{X}\to\mathbf{O}$ (c.-à-d., $f\in\mathbf{O}(\mathbf{X})$), alors $f(x) = f\circ x$ est un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{X}') = \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$.

Définition. — Soit $\pi : \mathbf{M}\to\mathbf{X}$ un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, et soit $\mathbf{O}_\mathbf{X} = \mathbf{O}\times\mathbf{X}$. On dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_\mathbf{X}$-*module* si l'on s'est donné, pour tout $\mathbf{X}$-schéma X', une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$-module sur $\operatorname{Hom}_\mathbf{X}(\mathrm{X}', \mathbf{M})$, fonctorielle en X'.

Ceci revient à se donner une loi de $\mathbf{X}$-groupe abélien $\mu : \mathbf{M}\times_\mathbf{X}\mathbf{M}\to\mathbf{M}$ et une « loi externe »

$$\mathbf{O}\times\mathbf{M} = \mathbf{O}_\mathbf{X}\times_\mathbf{X}\mathbf{M}\longrightarrow\mathbf{M}, \qquad (f, m)\mapsto f\cdot m$$

qui est un $\mathbf{X}$-morphisme (i.e. $\pi(f\cdot m) = \pi(m)$) et qui, pour tout $x\in\mathbf{X}(\mathrm{S})$, munit $\mathbf{M}(x) = \{m\in\mathbf{M}(\mathrm{S}) \mid \pi(m) = x\}$ d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module.

Dans ce cas, pour tout $\mathbf{Y}\in\operatorname{Ob}(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathbf{X}}$ (non nécessairement représentable), $\operatorname{Hom}_\mathbf{X}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \Gamma(\mathbf{M}_\mathbf{Y}/\mathbf{Y})$ est un $\mathbf{O}(\mathbf{Y})$-module, de façon fonctorielle en $\mathbf{Y}$.

[30] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile plus loin (cf. II 1.3).

4.4. Groupes diagonalisables

4.4.1. — La construction de $\mathbb{G}_m$ se généralise comme suit : soit M un groupe commutatif et $\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}$ le schéma en groupes qui lui est associé par le procédé de 4.1. Considérons le foncteur défini par

$$\mathbf{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \mathbb{G}_m(\mathrm{S})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_\mathrm{S}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

C'est un $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe commutatif qui est représentable par un *schéma en groupes* que l'on notera D(M) ; on aura donc par définition :

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m).$$

Posons en effet 27

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{M}],$$

où $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$ est l'algèbre du groupe M sur l'anneau $\mathbb{Z}$; on a

$$\mathrm{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{M}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^\times)$$

par définition même de l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$.

4.4.2. — Pour tout schéma S on a donc un S-schéma en groupes affine sur S

$$\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{M})_\mathrm{S} = \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m)_\mathrm{S} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_\mathrm{S}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

Il est associé à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-bigèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{M}]$, munie de l'application diagonale et de l'augmentation définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathrm{M}.$$

4.4.3. — Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un homomorphisme de groupes commutatifs, on définit de manière évidente un morphisme de S-groupes

$$\mathrm{D}_\mathrm{S}(f) : \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}) \ ,$$

d'où un *foncteur*

$$\mathrm{D}_\mathrm{S} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$$

de la catégorie des *groupes abéliens* dans la catégorie des S-*groupes affines sur* S, que l'on peut aussi définir comme composé du foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}_\mathrm{S}$ et du foncteur $\mathrm{M}_\mathrm{S} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_\mathrm{S}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. Ce foncteur *commute aux extensions de la base.*

Un S-groupe isomorphe à un groupe de la forme $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est dit *diagonalisable.* 28
Notons que les éléments de M s'interprètent comme certains caractères de $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, c'est-à-dire certains éléments de $\mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M}), \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. (*Confer* VIII 1).

4.4.4. — Donnons quelques exemples de groupes diagonalisables. On a d'abord

$$\mathrm{D}(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_m \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(\mathbb{Z}^r) = (\mathbb{G}_m)^r.$$

On pose

$$\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

et on le nomme *groupe des racines n-ièmes de l'unité*. En effet, on a

$$\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S})^*) = \{f \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}) \mid f^n = 1\}.$$

Le S-groupe $\boldsymbol{\mu}_{n,\mathrm{S}}$ correspond à la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n - 1)$. Supposons en particulier que S soit le spectre d'un corps k de caractéristique $p = n$. En posant $\mathrm{T} - 1 = s$, on trouve

$$k[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p - 1) = k[s]/(s^p),$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\boldsymbol{\mu}_{p,k}$ est réduit à un point, l'anneau local de ce point étant la k-algèbre artinienne $k[s]/(s^p)$. (Dans le même ordre d'idées, signalons que les S-schémas $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$ sont *lisses* sur S, que $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est *plat* sur S et qu'il est formellement lisse (resp. *lisse*) sur S si et seulement si aucune caractéristique résiduelle de S ne divise la torsion de M (resp. et si de plus M est de type fini), cf. Exp. VIII, 2.1).

29 **4.5. Autres exemples de groupes.** — Le procédé précédent s'applique aux « groupes classiques » (groupes linéaires $\mathbb{GL}_n$, symplectiques $\mathbb{Sp}_n$, orthogonaux $\mathbb{O}_n$, etc.). On définira par exemple $\mathbb{GL}_n$ comme représentant le foncteur $\mathbf{GL}_n$ tel que :

$$\mathbf{GL}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{GL}(n, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) = \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^n).$$

On pourra le construire par exemple comme l'ouvert de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij}]$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ défini par la fonction $f = \mathrm{dét}((\mathrm{T}_{ij})_{i,j=1}^n)$, c'est-à-dire $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij}, f^{-1}]$.

4.6. Foncteurs-modules dans la catégorie des schémas. — Nous nous proposons d'associer à tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module sur le schéma S, un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module (où $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ désigne le foncteur-anneau introduit en 4.3.3). Ceci peut se faire de deux manières différentes. De façon précise :

Définition 4.6.1. — Soit S un schéma. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$ on note $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ les foncteurs contravariants sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ définis par :

$$\mathbf{V}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}),$$
$$\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

(où $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image inverse sur S′ du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$).

Alors $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ sont munis de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*modules* (on rappelle que $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathbf{W}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})(\mathrm{S}')$), de telle façon que l'on a en fait défini deux foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules dans la catégorie des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, $\mathbf{V}$ étant contravariant et $\mathbf{W}$ covariant.

Nous nous restreignons dans la suite de ce paragraphe au cas où les $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules
30 en question sont quasi-cohérents, c'est-à-dire que nous considérons $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ comme des foncteurs de la catégorie ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mathbf{V} : (\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.q.c.})^{\circ} \longrightarrow (\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}),$$
$$\mathbf{W} : (\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.q.c.}) \longrightarrow (\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}).$$

Remarque 4.6.1.1. — [31] Le lecteur remarquera que, dans la suite, toutes les propositions qui ne font intervenir que le foncteur $\mathbf{W}$ sont valables pour des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules arbitraires, non nécessairement quasi-cohérents.

Proposition 4.6.2. — (i) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *commutent à l'extension de la base : si* S' *est au-dessus de* S *et si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent, on a*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})\simeq\mathbf{V}(\mathscr{F})_{\mathrm{S}'}\quad \textit{et}\quad \mathbf{W}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})\simeq\mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{S}'}.$$

(ii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont pleinement fidèles : les application canoniques*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F}))\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}'))\end{aligned}$$

sont bijectives.

(iii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont additifs :*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F}\oplus\mathscr{F}')\simeq\mathbf{V}(\mathscr{F})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathbf{V}(\mathscr{F}')\quad \textit{et}\quad \mathbf{W}(\mathscr{F}\oplus\mathscr{F}')\simeq\mathbf{W}(\mathscr{F})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathbf{W}(\mathscr{F}').$$

Les parties (i) et (iii) sont évidentes sur les définition. Pour (ii), on prend pour S' **31**
des ouverts de S. Nous laissons la démonstration au lecteur (pour $\mathbf{V}$, utiliser EGA II, 1.7.14).

Rappelons (cf. 3.1.4) que si $\mathbf{F},\mathbf{F}'$ sont des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{F},\mathbf{F}')$ désigne le S-foncteur (en groupes abéliens) qui à tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}'},\mathbf{F}'_{\mathrm{S}'})$.

Proposition 4.6.3. — [32] *On a des morphismes canoniques dans* ($\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) *:*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}')) \arrow[rr, equal] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F})) \\ & \mathbf{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}')) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Cela résulte immédiatement de 4.6.2 (i) et (ii).

Notation 4.6.3.1. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On sait (EGA II, 1.7.8) que le S-foncteur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ est représentable par un S-schéma affine sur S que l'on note $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ et que l'on appelle *fibration vectorielle* [33] définie par $\mathscr{F}$:

$$\mathbb{V}(\mathscr{F})=\mathrm{Spec}(\mathcal{S}(\mathscr{F})),$$

[31] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.6.1.1, pour des références ultérieures.

[32] N.D.E. : On a ajouté l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}'))\cong\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F}))$.

[33] N.D.E. : on a remplacé « fibré vectoriel » par « fibration vectorielle » ; l'usage actuel étant d'appeler « fibré vectoriel de rang r » une fibration vectorielle qui est *localement triviale* de rang r, c.-à-d., dont le faisceau des sections est localement isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{\oplus r}$.

où $\mathcal{S}(\mathscr{F})$ désigne l'algèbre symétrique du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$. [34]

Proposition 4.6.4. — *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents, $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente. On a un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}'), \mathbf{W}(\mathscr{F}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}', \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}).$$

En effet, si on note $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, le premier membre est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}'), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X})$, c'est-à-dire par définition à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}')_{\mathrm{X}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}), \mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}))$$

32 (cf. 4.6.2 (i)), ce qui par 4.6.2 (ii) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}', \pi_*(\pi^*(\mathscr{F}))),$$

où on note $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Mais, par EGA II, 1.4.7, on a $\pi_*(\pi^*(\mathscr{F})) \simeq \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.4.1. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

En effet, [35] soient $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un S-schéma et $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

et d'après EGA II, 1.5.2, X' est affine sur S' et $\pi'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}) = f^*(\mathscr{A})$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}\big(\mathrm{Spec}(f^*(\mathscr{A})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big)$$

et d'après 4.6.4 appliqué à $f^*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ et $f^*(\mathscr{A})$, ceci égale

$$\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F}) \otimes f^*(\mathscr{A})) = \Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})) = \mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})(\mathrm{S}').$$

Proposition 4.6.5. — *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de type fini, les morphismes de* 4.6.3 *sont des isomorphismes.*

En effet, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a

$$\mathbf{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}'))(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}).$$

Mais le second membre est bien isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}'))(\mathrm{S}')$ et à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'), \mathbf{V}(\mathscr{F}))(\mathrm{S}')$, par 4.6.2 (i) et (ii).

Corollaire 4.6.5.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini. Posons $\mathscr{F}^{\vee} =$*
33 *$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. On a des isomorphismes canoniques :*

(34) N.D.E. : Signalons ici les articles [**Ni04**] (resp. [**Ni02**]) qui montrent que si S est *noethérien* et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *cohérent*, alors $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ (resp. le S-groupe qui à tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ associe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$) est représentable si et *seulement si* $\mathscr{F}$ est localement libre.

(35) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathscr{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_\mathrm{S}) \simeq \mathbf{V}(\mathscr{F}),\\ \mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_\mathrm{S}) \simeq \mathbf{W}(\mathscr{F}).\end{aligned}$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 4.6.6. — *Soit $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libres de rang fini. Pour que $\mathbf{W}(f) : \mathbf{W}(\mathscr{F}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F}')$ soit un monomorphisme, il faut et il suffit que f identifie $\mathscr{F}$ localement à un facteur direct de $\mathscr{F}'$.*

La proposition directe est essentiellement contenue dans EGA 0_I, 5.5.5. [36] Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est localement facteur direct de $\mathscr{F}'$ alors, pour tout $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\pi^*\mathscr{F}$ est un sous-module de $\pi^*\mathscr{F}'$ (car localement facteur direct), donc $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \pi^*\mathscr{F})$ est un sous-module de $\mathbf{W}(\mathscr{F}')(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \pi^*\mathscr{F}')$.

4.7. La catégorie des G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules. — Soient G un S-groupe et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module ; $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module.

Définition 4.7.1. — On appelle structure de G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module sur $\mathscr{F}$ une structure de $\mathbf{h}_\mathrm{G}$-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ (cf. 3.2). Un morphisme de G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules est par définition un morphisme des $\mathbf{h}_\mathrm{G}$-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules associés. On obtient ainsi la catégorie (G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Mod.), et l'on note (G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Mod.q.c.) la sous-catégorie pleine formée des G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules qui sont quasi-cohérents comme $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules.

Se donner une structure de G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module sur $\mathscr{F}$, c'est donc par 3.2 se donner un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathrm{S}}$-groupes

$$\rho : \mathbf{h}_\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

Remarque 4.7.1.0. — [37] Puisqu'on a, d'après 4.6.2, un *anti-isomorphisme* de S-foncteurs en groupes

$$(\dagger) \qquad \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{W}(\mathscr{F})) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{V}(\mathscr{F})),$$

on voit qu'il est équivalent de se donner une structure de $\mathbf{h}_\mathrm{G}$-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ ou sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$. En effet, soit $\rho : \mathbf{h}_\mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ comme ci-dessus. Pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, notons $\rho^*(g)$ l'image de $\rho(g)$ par l'anti-isomorphisme (†) ; on a donc $\rho^*(gh) = \rho^*(h) \circ \rho^*(g)$, i.e. ρ^* définit une structure de $\mathbf{h}_\mathrm{G}$-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module « *à droite* » sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$. En posant $\rho^\vee(g) = \rho^*(g^{-1})$, on obtient bien une structure de $\mathbf{h}_\mathrm{G}$-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$, dont la donnée équivaut à celle de ρ.

Remarque 4.7.1.1. — On peut dire que l'on a construit les catégories que l'on vient de définir par les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.q.c.}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{h}_\mathrm{G}\text{-}\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}) \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ (\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.q.c.}) \arrow[r, hook] & (\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}) \arrow[r, "\mathbf{W}"] & (\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}) \end{tikzcd}$$

[36] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

[37] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, tirée de [DG], II, § 2, 1.1.

[38] Les catégories ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) et ($\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) sont abéliennes, mais on prendra garde qu'en général le foncteur $\mathbf{W}$ n'est pas exact, ni à gauche ni à droite.

Remarque 4.7.1.2. — [39] Soit $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Le sous-faisceau des invariants $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$ est défini comme suit : pour tout ouvert U de S,

$$\mathscr{F}^{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = \mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = \{x \in \mathscr{F}(\mathrm{U}) \mid g \cdot x_{\mathrm{S}'} = x_{\mathrm{S}'} \quad \text{pour tout } \mathrm{S}' \xrightarrow{f} \mathrm{U},\ g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')\},$$

où $x_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image de x dans $\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F})) = \Gamma(\mathrm{U}, f_*f^*(\mathscr{F}))$.

On prendra garde que le morphisme naturel $\mathbf{W}(\mathscr{F}^{\mathrm{G}}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}$ n'est pas un isomorphisme en général. Par exemple, si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et G est le groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \tau\}$ agissant sur $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ par $\tau \cdot 1 = -1$, on a $\mathscr{F}^{\mathrm{G}} = 0$ mais, si R est une $\mathbb{F}_2$-algèbre, $\mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{R})) = \mathrm{R}$.

34 ***4.7.2***. — On suppose désormais, jusqu'à la fin du n°4.7, que G est *affine* sur S. [40] Alors, en vertu de 4.6.4, la donnée d'un morphisme de S-foncteurs

$$\rho : \mathbf{h}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$$

équivaut à celle d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}).$$

Dire que ρ est un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathrm{S}}$-groupes équivaut alors à dire que μ satisfait aux axiomes suivants :

(CM 1) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\
\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})
\end{tikzcd} .$$

(CM 2) *le composé ci-dessous est l'identité*

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\ \mu\ } \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \varepsilon} \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{F}.$$

Ces axiomes (CM 1) et (CM 2) sont ceux de la structure de *comodule* (à droite) [41] sur la bigèbre $\mathscr{A}(\mathrm{G})$.

[38] N.D.E. : On a corrigé l'original, en supprimant l'assertion que la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) est abélienne, voir 4.7.2.1 plus bas.

[39] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[40] N.D.E. : cf. VI_{B}, §§ 11.1–11.6 pour l'extension des résultats de 4.7.2 au cas où G n'est pas nécessairement affine, mais où G et $\mathscr{F}$ sont supposés *plats* sur S.

[41] N.D.E. : Les G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules *à gauche* correspondent de façon naturelle aux $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodules *à droite*.

Posons $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des $\mathscr{A}$-comodules, un morphisme de comodules $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ est un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{F}' \arrow[d, "\mu_{\mathscr{F}'}"] \\ \mathscr{F} \otimes \mathscr{A} \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{F}' \otimes \mathscr{A}. \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie ($\mathscr{A}$-Comod.), et l'on notera ($\mathscr{A}$-Comod.q.c.) la sous-catégorie pleine formée des $\mathscr{A}$-comodules qui sont quasi-cohérents comme $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules. On a donc obtenu :

Proposition 4.7.2. — *Soit* G *un* S-*groupe* affine sur S. *On a des équivalences de catégories :* 35

$$(\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}) \cong (\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.})$$
$$(\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.q.c.}) \cong (\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.q.c.})$$

(42) *Si de plus* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ *est* affine *et si on note* $\Lambda[\mathrm{G}] = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{G}))$, *on a une équivalence de catégories*

$$(\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.q.c.}) \cong (\Lambda[\mathrm{G}]\text{-Comod.}).$$

(43) Supposons de plus que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module *plat*. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}$-comodule et $\mathscr{F}$ un sous-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module de $\mathscr{E}$. Comme $\mathscr{A}$ est plat sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$, on peut identifier $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$) à un sous-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module de $\mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$). Supposons que $\mu_{\mathscr{E}}$ applique $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, alors sa restriction $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$ munit $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule ; on dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-comodule* de $\mathscr{E}$. Par passage au quotient, $\mu_{\mathscr{E}}$ définit un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules $\mathscr{E}/\mathscr{F} \to \mathscr{E}/\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, qui munit $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule. Si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un morphisme de $\mathscr{A}$-comodules, $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Im}\, f$) est un sous-$\mathscr{A}$-comodule de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$), et f induit un isomorphisme de $\mathscr{A}$-comodules : $\mathscr{E}/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$. De plus, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules quasi-cohérents, il en est de même de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Par conséquent, ($\mathscr{A}$-Comod.) et ($\mathscr{A}$-Comod.q.c.) sont des catégories *abéliennes*.

Corollaire 4.7.2.1. — *On suppose que* G *est* affine et plat sur S. *Alors la catégorie* (G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Mod.q.c.) (*resp.* (G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Mod.)), *équivalente à la catégorie des* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodules quasi-cohérents sur* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ (*resp.* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodules*), *est* abélienne.

4.7.3. — Supposons maintenant que G soit un *groupe diagonalisable*, c'est-à-dire que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit l'algèbre d'un groupe commutatif M sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_\mathrm{S}$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module, on a

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_\mathrm{S}.$$

(42) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
(43) N.D.E. : On a ajouté le paragraphe qui suit, tiré de [**Se68**, § 1.3].

Se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$$

est donc équivalent à se donner des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-endomorphismes $(\mu_m)_{m\in\mathrm{M}}$ de $\mathscr{F}$, tels que pour toute section x de $\mathscr{F}$ sur un ouvert de S, $(\mu_m(x))$ soit une section de la somme directe $\coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathscr{F}$ (cela veut dire que sur tout ouvert suffisamment petit, il n'y ait qu'un nombre fini de restrictions des $\mu_m(x)$ qui soient non nulles).

Pour que μ définie par

$$\mu(x) = \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m(x) \otimes m$$

vérifie (CM 1) (resp. (CM 2)) il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_m \circ \mu_{m'} = \delta_{mm'}\mu_m, \quad (\text{resp. } \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}),$$

36 ce qui signifie que les μ_m sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité. On a donc prouvé :

Proposition 4.7.3. — *Si* $\mathrm{G} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$ *est un* S*-groupe diagonalisable, la catégorie des* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents* (*resp. des* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*) *est équivalente à la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents* (*resp. des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*) *gradués de type* M.

Remarque. — Si $\mathscr{F}$ est muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbre* conservée par les opérations de G, alors la graduation de $\mathscr{F}$ est une graduation d'algèbre. Plus précisément :

Corollaire 4.7.3.1. — *Le foncteur* $\mathscr{A} \mapsto \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ *induit une équivalence entre la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres quasi-cohérentes graduées de type* M *et la catégorie opposée à celle des* S*-schémas affines sur* S *à* S*-groupe d'opérateurs* $\mathrm{G} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$.

Proposition 4.7.4. — *Soit* G *un* S*-groupe diagonalisable. Si* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *est une suite exacte de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, alors elle se scinde également comme suite de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules.*

En effet, si $\mathrm{G} = \mathrm{D_S}(\mathrm{M})$, chacun des $\mathscr{F}_i$ est gradué par des $(\mathscr{F}_i)_m$ et pour chaque $m \in \mathrm{M}$ la suite

$$0 \longrightarrow (\mathscr{F}_1)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_2)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_3)_m \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules est scindée. La proposition précédente entraîne alors le résultat.

5. Cohomologie des groupes

37

5.1. Le complexe standard. — [44] Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau et $\mathbf{F}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module. On pose, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}),$$

[44] N.D.E. : Ce complexe est souvent appelé « complexe de Hochschild » ; voir par exemple le § II.3 de [**DG70**].

où $\mathbf{G}^0$ est l'objet final $\underline{\mathrm{e}}$. Alors $\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) est muni de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}$-module (resp. de $\Gamma(\mathbf{O})$-module) et on a

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \cong \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})(\mathrm{S}) = \mathrm{C}^n(\mathbf{G}_{\mathrm{S}},\mathbf{F}_{\mathrm{S}}).$$

Se donner un élément de $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$, c'est se donner pour chaque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ une n-cochaine de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ dans $\mathbf{F}(\mathrm{S})$, fonctoriellement en S. L'opérateur bord

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})),$$

qui, rappelons-le, est donné par la formule

$$\begin{aligned}\partial f(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1})\\ + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n),\end{aligned}$$

est fonctoriel en S et définit donc un homomorphisme :

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G},\mathbf{F})$$

tel que $\partial\circ\partial = 0$. On a donc défini un complexe de groupes abéliens (et même de $\Gamma(\mathbf{O})$-modules) noté $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$. On définit de la même manière le complexe de $\mathbf{O}$-modules $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ et on a : 38

$$\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})).$$

On note $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) les groupes (resp. les $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes) d'homologie du complexe $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$).

On a en particulier

$$\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathbf{G}} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}).$$

Remarque 5.1.1. — [45] La description « ensembliste » de ∂ donnée plus haut est commode pour vérifier que $\partial\circ\partial = 0$. On peut aussi définir ∂ en termes de la multiplication $m : \mathbf{G}\times\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ et de l'action $\mu : \mathbf{G}\times\mathbf{F} \to \mathbf{F}$ comme suit : pour tout $f \in \mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$,

$$\partial f = \mu\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times f) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}^{i-1}} \times m \times \mathrm{id}_{\mathbf{G}^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f\circ \mathrm{pr}_{[1,n]},$$

où $\mathrm{pr}_{[1,n]}$ désigne la projection de $\mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}^n \times \mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}^n$. De même, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $f \in \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})(\mathrm{S}) = \mathrm{C}^n(\mathbf{G}_{\mathrm{S}},\mathbf{F}_{\mathrm{S}})$, on a

$$\partial f = \mu_{\mathrm{S}}\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}} \times f) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}^{i-1}} \times m_{\mathrm{S}} \times \mathrm{id}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f\circ \mathrm{pr}_{[1,n]},$$

où m_{S} et μ_{S} sont déduits de m et μ par changement de base.

[45]N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

5.2. [46] On rappelle (cf. § 3) que ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument » ; ainsi,

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules si, et seulement si, la suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}''(\mathrm{S}) \longrightarrow 0$$

est exacte, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

[47] Supposons $\mathscr{C}$ *petite* ; alors, d'après 3.2.1, ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs, de sorte que les foncteurs dérivés des foncteurs exacts à gauche $\underline{\mathrm{H}}^0$ et H^0 sont définis. Nous nous proposons maintenant de montrer que les foncteurs $\underline{\mathrm{H}}^n$ (resp. H^n) sont bien les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{H}}^0$ (resp. H^0).

Définition 5.2.0. — [48] Pour tout $\mathbf{O}$-module $\mathbf{P}$, on note $\mathrm{E}(\mathbf{P})$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ muni de la structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module définie comme suit : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$, et on fait opérer $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$ sur $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ par les formules

$$(g \cdot \phi)(h) = \phi(hg) \qquad \text{et} \qquad (a \cdot \phi)(h) = a\phi(h),$$

pour tout $h \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. De plus, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ on pose

$$\varepsilon(\phi) = \phi(1) \in \mathbf{P}(\mathrm{S})$$

(où 1 désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$).

Ceci définit un foncteur $\mathrm{E} : (\mathbf{O}\text{-Mod.}) \to (\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ et une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{E} \to \mathrm{Id}$, où Id désigne le foncteur identique de ($\mathbf{O}$-Mod.).

Remarque 5.2.0.1. — [48] Dans ce qui suit, désignons par $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux copies de $\mathbf{G}$. Alors le morphisme

$$\mathbf{G}_1 \times \mathrm{E}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{P}), \qquad (g_1, \phi) \mapsto \Big(g_2 \mapsto \phi(g_2 g_1)\Big)$$

correspond via les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_1 \times \mathrm{E}(\mathbf{P}), \mathrm{E}(\mathbf{P})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_1, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2, \mathbf{P}))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})) \end{aligned}$$

au morphisme $\phi \mapsto \Big((g_2, g_1) \mapsto \phi(g_2 g_1)\Big)$, i.e. au morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})$$

induit par la multiplication $\mu_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $(g_2, g_1) \mapsto g_2 g_1$.

[46] N.D.E. : On a ajouté le rappel qui suit.
[47] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[48] N.D.E. : On a modifié l'original, afin d'introduire 5.2.0.1 et 5.2.0.2, qui seront utiles dans la démonstration du théorème 5.3.1.

Lemme 5.2.0.2. — [48] (i) *Le foncteur* E *est adjoint à droite du foncteur d'oubli* $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.}) \to (\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.})$ *; plus précisément,* $\varepsilon : \mathrm{E} \to \mathrm{Id}$ *induit pour tout* $\mathbf{M} \in (\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.})$ *et* $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.})$ *une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{P})$$

fonctorielle en $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{P}$.

(ii) *Par conséquent, si* $\mathbf{I}$ *est un objet injectif de* $(\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.})$ *alors* $\mathrm{E}(\mathbf{I})$ *est un objet injectif de* $(\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.})$.

Démonstration. À tout $\mathbf{O}$-morphisme $f : \mathbf{M} \to \mathbf{P}$, on associe l'élément ϕ_f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P}))$ défini comme suit. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $\phi_f(m)$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ défini par : pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) \in \mathbf{P}(\mathrm{S}').$$

Alors, pour tout $h \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, on a $\phi_f(hm) = h \cdot f(m)$, i.e. ϕ_f est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P})).$$

Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-}\mathrm{Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P}))$ et si on note, pour tout $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $f(m) = \phi(m)(1)$, alors

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) = \phi(gm)(1) = \big(g \cdot \phi(m)\big)(1) = \phi(m)(g),$$

i.e. $\phi_f = \phi$. Réciproquement, il est clair que $\phi_f(m)(1) = f(m)$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle aussitôt.

Définition 5.2.0.3. — Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module ; l'application identique de $\mathbf{M}$ (considéré comme $\mathbf{O}$-module) correspond par adjonction au morphisme de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules

$$\mu_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{M})$$

tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)$ est le morphisme $\mathbf{G}_{\mathrm{S}} \to \mathbf{M}_{\mathrm{S}}$ défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)(g) = g \cdot m_{\mathrm{S}'} \in \mathbf{M}(\mathrm{S}')$.

Notons que $\mu_{\mathbf{M}}$ est un *monomorphisme.* En effet, $\varepsilon_{\mathbf{M}} : \mathrm{E}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ est un morphisme de $\mathbf{O}$-modules tel que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ \mu_{\mathbf{M}} = \mathrm{id}_{\mathbf{M}}$; par conséquent $\mathbf{M}$ est facteur direct, comme $\mathbf{O}$-module, de $\mathrm{E}(\mathbf{M})$.

Proposition 5.2.1. — *On suppose que* $\mathscr{C}$ *est petite, que les produits finis y existent, et* 39
que $\mathbf{G}$ *est représentable. Alors, les foncteurs* $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ *(resp.* $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$*) sont les foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche* $\mathrm{H}^0(\mathbf{G},\ )$ *(resp.* $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\ )$*) sur la catégorie des* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$*-modules.*

En vertu des résultats généraux bien connus [49], il suffit de vérifier que les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$) forment un foncteur cohomologique effaçable en degrés > 0.

Soit

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules, et soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Par hypothèse, $\mathbf{G}$ est représentable par un objet $\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, et les produits finis existent dans $\mathscr{C}$; en particulier $\mathscr{C}$

[49] N.D.E. : cf. [**Gr57**], 2.2.1 et 2.3. Par ailleurs, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

possède un élément final e. Donc, chaque $\mathbf{G}^n \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est représentable par $\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}$ (avec $\mathrm{G}^0 = e$), et la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}''(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ceci montre que la suite de $\mathbf{O}$-modules

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}') \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}'') \longrightarrow 0$$

est exacte. Il en résulte que $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\ \ )$ considéré comme foncteur sur ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) à valeurs dans la catégorie des complexes de ($\mathbf{O}$-Mod.) est exact. Ceci montre que les $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ \ )$ forment bien un foncteur cohomologique. Comme le foncteur Γ est exact, il en est de même pour les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ \ )$. Il nous suffira maintenant de démontrer :

Lemme 5.2.2. — *Pour tout* $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$*, on a :*

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0 \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0, \ \textit{pour } n > 0.$$

Il nous suffit de démontrer que $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ et $\mathrm{C}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ sont homotopiquement triviaux en degrés > 0. Il suffit même de le faire pour le second, le résultat correspondant pour le premier s'en déduisant par changement de base. [(50)] Or, on définit pour tout $n \geqslant 0$ un morphisme

$$\sigma : \quad \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) \longrightarrow \mathrm{C}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$$

comme suit. Soit $f \in \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$; pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, $\sigma(f)(g_1, \dots, g_n)$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$,

$$\sigma(f)(g_1, \dots, g_n)(x) = f(x, g_1, \dots, g_n)(e) \in \mathbf{P}(\mathrm{S}')$$

(où e désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S}')$). Alors, σ est un opérateur d'homotopie en degrés > 0. En effet, pour tout $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ on a, d'une part :

$$\begin{aligned}\partial\sigma(f)(g_1, \dots, g_{n+1})(x) &= f(xg_1, g_2, \dots, g_{n+1})(e) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x, g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1})(e) + (-1)^{n+1} f(x, g_1, \dots, g_n)(e),\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\sigma(\partial f)(g_1, \dots, g_{n+1})(x) &= (xf(g_1, g_2, \dots, g_{n+1}))(e) - f(xg_1, g_2, \dots, g_{n+1})(e) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x, g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+2} f(x, g_1, \dots, g_n)(e),\end{aligned}$$

d'où

$$\big(\partial\sigma(f) + \sigma(\partial f)\big)(g_1, \dots, g_{n+1})(x) = f(g_1, \dots, g_{n+1})(x),$$

i.e. $\partial\sigma + \sigma\partial$ est l'application identique de $\mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$, pour tout $n \geqslant 0$.

[(50)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Remarque 5.2.3. — [51] L'hypothèse « $\mathscr{C}$ petite » n'est utilisée que pour assurer l'existence des foncteurs dérivés $\mathrm{R}^n\mathrm{H}^0$ et $\mathrm{R}^n\underline{\mathrm{H}}^0$. Dans tous les cas, ce qui précède montre que les foncteurs $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$) forment un foncteur cohomologique, effaçable en degrés >0, donc ce sont les foncteurs *satellites* (droits) du foncteur exact à gauche $\mathrm{H}^0(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\ )$), au sens de [**Gr57**, 2.2] ; si (**G**-**O**-Mod.) possède assez d'objets injectifs (ce qui est le cas si $\mathscr{C}$ est petite), ils coïncident avec les foncteurs dérivés (*loc. cit.* 2.3).

5.3. Cohomologie des G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. — Soient S un schéma, G un S-groupe et $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On définit les groupes de cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$ par

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \mathrm{H}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}},\mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

(pour les notations, cf. 4.6).

Supposons G *affine* sur S. Alors, vu la proposition 4.6.4, cette cohomologie se calcule de la façon suivante : $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F})$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\mathscr{F})$ dont le n-ième terme est : 40

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S},\mathscr{F}\otimes\underbrace{\mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})}_{n\text{ fois}}).$$

Si f (resp. a_i) est une section de $\mathscr{F}$ (resp. de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$) sur un ouvert de S, on a

$$\begin{aligned}\partial(f\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &= \mu_{\mathscr{F}}(f)\otimes a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\otimes a_1\otimes\cdots\otimes\Delta a_i\otimes\cdots\otimes a_n\\ &\quad+(-1)^{n+1}f\otimes a_1\otimes a_2\cdots\otimes a_n\otimes 1,\end{aligned}$$

où $\Delta:\mathscr{A}(\mathrm{G})\to\mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})$ et $\mu_{\mathscr{F}}:\mathscr{F}\to\mathscr{F}\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})$ décrivent la structure de cogèbre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ et de comodule de $\mathscr{F}$. Remarquons en passant que la cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$ ne dépend donc que de la structure de comodule de $\mathscr{F}$, et en particulier que de la structure de S-monoïde de G.

On a en particulier

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S},\mathscr{F}^{\mathrm{G}}),$$

où $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$, le *faisceau des invariants de* $\mathscr{F}$, est défini comme le faisceau dont les sections sur l'ouvert U de S sont les sections de $\mathscr{F}$ sur U dont l'image inverse dans tout S′ au-dessus de U est invariante par G(S′) (cf. 4.7.1.2).

Théorème 5.3.1. — *Soient* S *un schéma* affine, G *un* S*-groupe* affine et plat *sur* S. *Les foncteurs* $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ )$ *sont les foncteurs dérivés de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\ )$ *sur la catégorie des* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents.* 41

[51] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Démonstration. [52] Comme G est affine et plat sur S alors, d'après 4.7.2.1, la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) est équivalente à la catégorie ($\mathscr{A}(\mathrm{G})$-Comod.q.c.) des $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodules quasi-cohérents sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et est donc abélienne. D'autre part, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ étant un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, chaque foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})^{\otimes n}$ est exact ; comme de plus S est affine, on obtient que $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\ \ )$ est un foncteur exact sur (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.).

Notons Δ (resp. η) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{P}$, on note $\mathrm{Ind}(\mathscr{P}) = \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ muni de la structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule définie par

$$\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta : \quad \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G});$$

ceci définit un foncteur $\mathrm{Ind} : (\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.q.c.}) \to (\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.q.c.})$.

Il résulte de 4.6.4.1, 5.2.0 et 5.2.0.1 que l'on a un isomorphisme de G-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules :

$$(*) \qquad \mathbf{W}(\mathrm{Ind}(\mathscr{P})) \simeq \mathrm{E}(\mathbf{W}(\mathscr{P})) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathscr{P})).$$

Via cette identification, le morphisme $\varepsilon : \mathrm{E}(\mathbf{W}(\mathscr{P})) \to \mathbf{W}(\mathscr{P})$ correspond au morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta : \mathrm{Ind}(\mathscr{P}) \to \mathscr{P}$.

On a déjà utilisé que le foncteur $\mathbf{W} : (\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}) \to (\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.})$ est pleinement fidèle ; il en est de même, d'après la définition 4.7.1, de sa restriction à (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.), i.e. si $\mathscr{M}, \mathscr{M}'$ sont des G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{M}, \mathscr{M}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathbf{W}(\mathscr{M}), \mathbf{W}(\mathscr{M}')).$$

Par conséquent, on déduit du lemme 5.2.0.2 le

Corollaire 5.3.1.1. — (i) *Le foncteur* Ind *est adjoint à droite du foncteur d'oubli* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) $\to$ ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.). *Plus précisément, l'application* $\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta : \mathrm{Ind}(\mathscr{P}) \to \mathscr{P}$ *induit pour tout objet* $\mathscr{M}$ *de* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) *une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{M}, \mathrm{Ind}(\mathscr{P})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M}, \mathscr{P}).$$

(ii) *Par conséquent, si* $\mathscr{I}$ *est un objet injectif de* ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) *alors* $\mathrm{Ind}(\mathscr{I})$ *est un objet injectif de* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.).

Soient $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module et $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ l'application définissant la structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule. Il résulte de 5.2.0.3 (ou bien des axiomes (CM 1) et (CM 2) de 4.7.2) que $\mu_{\mathscr{F}}$ est un morphisme de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, et que $(\mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathscr{F}} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$, donc que $\mathscr{F}$ est un facteur direct de $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module ; en particulier, $\mu_{\mathscr{F}}$ est un monomorphisme. Comme on a, d'après $(*)$ et 5.2.2,

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{Ind}(\mathscr{F}))) \simeq \mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathscr{F}))) = 0 \qquad \text{pour } n > 0.$$

on obtient donc que $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ \ )$ est effaçable pour $n > 0$.

Enfin, S étant affine, ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) possède assez d'objets injectifs. Soit donc $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$ un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, où $\mathscr{I}$ est un objet injectif de ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) ; alors, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ étant plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ est un sous-G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathrm{Ind}(\mathscr{I})$, d'où :

---

[52] N.D.E. : On a modifié l'original, pour faire voir que la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) est abélienne et a assez d'objets injectifs. On pourra comparer avec [**Ja03**], Part I, 3.3-3.4, 3.9, 4.2 et 4.14-4.16 (où l'on prendra garde que « k-group scheme » signifie « *affine* k-group scheme », cf. *loc. cit.*, 2.1).

Corollaire 5.3.1.2. — *La catégorie abélienne* (G-$\mathscr{O}_S$-Mod.q.c.) *possède assez d'objets injectifs.*

Compte tenu de [**Gr57**, 2.2.1 et 2.3] (déjà utilisé dans la preuve de 5.2.1), ceci achève la démonstration du théorème 5.3.1.

Remarque 5.3.1.3. — On peut aussi démontrer 5.3.1.1 par le calcul suivant. À tout morphisme de G-$\mathscr{O}_S$-modules $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$ on associe le $\mathscr{O}_S$-morphisme $(\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \phi : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$. Réciproquement, à tout $\mathscr{O}_S$-morphisme $f : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$ on associe le morphisme de G-$\mathscr{O}_S$-modules $(f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}) \circ \mu_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G)$. On voit aussitôt que

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}) \circ \mu_{\mathscr{M}} = (f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_S}) \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathscr{M}} = f.$$

D'autre part, pour tout ϕ le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mu_{\mathscr{M}}"'] & \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta"] \\
\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G) \arrow[r, "\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}"] & \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}(G) .
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\Big(\big((\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \phi\big) \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}\Big) \circ \mu_{\mathscr{M}} &= (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}) \circ \mu_{\mathscr{M}} \\
&= (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(G)}) \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta) \circ \phi = \phi.
\end{aligned}$$

Ceci prouve 5.3.1.1 (i) (et (ii) en découle).

Soit $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_S$-module ; on a vu plus haut que l'axiome (CM 2) de 4.7.2 montre que considéré comme $\mathscr{O}_S$-module, $\mathscr{F}$ est un facteur direct de $E(\mathscr{F})$. Cela entraîne :

Proposition 5.3.2. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S*-groupe* affine et plat *; supposons que toute suite exacte* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *de* G-$\mathscr{O}_S$*-modules quasi-cohérents, qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_S$*-modules, se scinde également comme suite de* G-$\mathscr{O}_S$*-modules.*

Alors, les foncteurs $H^n(G, \ )$ *sont nuls pour* $n > 0$ (*ou ce qui revient au même, le foncteur* $H^0(G, \ )$ *est exact*).

En effet, d'après l'hypothèse, la suite de G-$\mathscr{O}_S$-modules

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow E(\mathscr{F}) \longrightarrow E(\mathscr{F})/\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

est scindée ; $\mathscr{F}$ est donc facteur direct, comme G-$\mathscr{O}_S$-module, dans $E(\mathscr{F})$, or la cohomologie de ce dernier est nulle.

On tire immédiatement de là et de la proposition 4.7.4 :

Théorème 5.3.3. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S*-groupe* diagonalisable*. Pour tout* G-$\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, on a* $H^n(G, \mathscr{F}) = 0$*, pour* $n > 0$. 42

Remarque. — La proposition 5.3.2 reste valable, lorsque G n'est pas nécessairement plat sur S ; la démonstration fait alors appel à la cohomologie relative. [53]

6. Objets et modules G-équivariants

[54] Soit $\mathscr{C}$ une catégorie ayant un objet final et où les produits fibrés existent. Soit $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$, et $\lambda = \lambda_{\mathrm{X}} : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ une action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$. Dans la suite, on notera $\mathbf{Y} \times_f \mathbf{M}$ le produit fibré de $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ et d'un $\mathbf{X}$-foncteur $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$.

Pour tout $\mathrm{U} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{X}(\mathrm{U})$, on notera $\mathbf{M}_x = \mathrm{U} \times_x \mathbf{M}$, i.e. pour tout $\phi : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$, on a

$$\mathbf{M}_x(\mathrm{U}') = \{m \in \mathbf{M}(\mathrm{U}') \mid \pi(m) = x_{\mathrm{U}'} = \phi^*(x)\}.$$

Enfin, si $g \in \mathbf{G}(\mathrm{U})$ on notera aussi gx l'élément $\lambda(g, x)$ de $\mathbf{X}(\mathrm{U})$.

Définition 6.1. — a) On dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{X}$-objet $\mathbf{G}$-*équivariant* si l'on s'est donné une action $\Lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{M}$ relevant λ, i.e. telle que le carré ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times \mathbf{M} \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \pi"'] & \mathbf{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{G} \times \mathbf{X} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbf{X} \end{tikzcd} .$$

Ceci équivaut à se donner pour tout morphisme $(g, x) : \mathrm{U} \to \mathbf{G} \times \mathbf{X}$ des applications

$$\Lambda_x^{\mathrm{U}}(g) : \quad \mathbf{M}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbf{M}_{gx}(\mathrm{U}), \qquad m \mapsto g \cdot m$$

vérifiant $1 \cdot m = m$ et $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$ et fonctorielles en le $(\mathbf{G} \times \mathbf{X})$-objet U. Ceci équivaut encore à se donner des morphismes de U-objets :

$$\Lambda_x(g) : \quad \mathbf{M}_x \longrightarrow \mathbf{M}_{gx}$$

vérifiant $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$.

b) Soit maintenant $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau et soit $\mathbf{O}_{\mathbf{X}} = \mathbf{O} \times \mathbf{X}$. Sous les conditions de (a), on dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-*module* $\mathbf{G}$-*équivariant* si c'est un $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-module (cf. la définition 4.3.3.1, valable pour tout foncteur en anneau sur une catégorie $\mathscr{C}$) et si l'action Λ est compatible avec la structure de $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-module de $\mathbf{M}$, c.-à-d., si pour tout $(g, x) \in \mathbf{G}(\mathrm{U}) \times \mathbf{X}(\mathrm{U})$ ($\mathrm{U} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), l'application $\Lambda_x(g) : \mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$, $m \mapsto g \cdot m$ est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules.

Remarque 6.2. — (i) Dans (a) ci-dessus, les conditions $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ entraînent évidemment que chaque $\Lambda_x(g)$ est un *isomorphisme*, d'inverse $\Lambda_{gx}(g^{-1})$. Réciproquement, si l'on suppose que chaque $\Lambda_x(g)$ est un isomorphisme, la condition $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ appliquée à $h = 1$ donne $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$.

---

[53] N.D.E. : Les éditeurs n'ont pas cherché à développer cette remarque.

[54] N.D.E. : On a ajouté cette section.

(ii) Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module. D'abord, on voit que se donner un morphisme Λ : $\mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ rendant commutatif le diagramme de 6.1 et tel que chaque morphisme $\Lambda_x(g) : \mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$, $m \mapsto g \cdot m$, soit un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules, équivaut à se donner un *isomorphisme* de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules :

$$\begin{aligned}\theta : \quad \mathbf{G} \times \mathbf{M} = (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}} \mathbf{M} &\xrightarrow{\sim} (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda} \mathbf{M} \\ (g, x, m) &\longmapsto (g, x, g \cdot m)\,.\end{aligned}$$

Comme on a supposé que chaque $\Lambda_x(g)$ est un isomorphisme, l'égalité $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ sera conséquence de l'égalité $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ appliquée à $h = 1$. On obtient donc que Λ est une *action* de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{M}$ (i.e. $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$) si et seulement si le diagramme de $(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X})$-isomorphismes ci-dessous est commutatif (où on note μ la multiplication de $\mathbf{G}$ et $f^*(\theta)$ l'isomorphisme déduit de θ par un changement de base $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{G} \times \mathbf{X}$) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ \mathrm{pr}_{2,3}}{\times} \mathbf{M} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{2,3}^*(\theta)", "\sim"'] \arrow[d, equal] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ \mathrm{pr}_{2,3}}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, equal] \\
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, "(\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})^*(\theta)"', "\wr"] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)^*(\theta)", "\wr"'] \\
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})}{\times} \mathbf{M} \arrow[r, equal] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)}{\times} \mathbf{M}
\end{tikzcd}\;.$$

On voit donc que se donner une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant sur $\mathbf{M}$ équivaut à se donner un isomorphisme θ de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules comme plus haut, tel que le diagramme ci-dessus soit commutatif.

(iii) Tout ce qui précède s'étend au cas où $\mathbf{G}$ est seulement un *$\widehat{\mathscr{C}}$-monoïde* : dans ce cas, se donner une action $\Lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ relevant λ et telle que chaque $\Lambda_x(g)$: $\mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$ soit un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules, équivaut à se donner un *morphisme* θ de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules comme en (ii), tel que le diagramme ci-dessus (sans les signes $\sim$ sous les flèches) soit commutatif, et tel que $p_{\mathbf{M}} \circ \theta \circ (\varepsilon_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, où ε_{G} désigne la section unité de G et $p_{\mathbf{M}}$ la projection sur $\mathbf{M}$.

6.3. Morphismes G-équivariants. — Soit $\mathbf{Y}$ un second objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, muni d'une action $\lambda_{\mathrm{Y}} : \mathbf{G} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ de $\mathbf{G}$, et soit $\mathbf{N}$ un second $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. On dit qu'un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ (resp. un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\phi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$) est $\mathbf{G}$-*équivariant* s'il commute à l'action de $\mathbf{G}$, i.e. si l'on a ensemblistement $f(g \cdot y) = g \cdot f(y)$ (resp. $\phi(g \cdot m) = g \cdot \phi(m)$), ce qui équivaut à dire que $f \circ \lambda_{\mathrm{Y}} = \lambda_{\mathrm{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times f)$ (resp. $\phi \circ \Lambda_{\mathrm{M}} = \Lambda_{\mathrm{N}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \phi)$).

On obtient alors aussitôt le lemme suivant :

Lemme 6.3.1. — *Soient $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un morphisme $\mathbf{G}$-équivariant et $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. Alors l'image inverse $f^*(\mathbf{M}) = \mathbf{Y} \times_f \mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant.*

D'autre part, $\mathbf{G}$ agit sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. En effet, soient $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $g \in \mathbf{G}(\mathrm{T})$ et ϕ un T-morphisme $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{X}_{\mathrm{T}}$, alors g définit des automorphismes $\lambda_{\mathbf{Y}}(g)$ et $\lambda_{\mathbf{X}}(g)$ de $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$, et l'on notera $g \cdot \phi$ (ou aussi $g\phi g^{-1}$) le morphisme $\lambda_{\mathbf{X}}(g) \circ \phi \circ \lambda_{\mathbf{Y}}(g^{-1})$. Ceci définit une action de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}, \mathbf{X}_{\mathrm{T}})$, fonctorielle en T.

Définition 6.3.2. — Si $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme arbitraire, on peut donc considérer son stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$ (cf. 2.3.3.1) : pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)(\mathrm{T})$ est le sous-groupe $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ formé des g tels que $g \circ \phi_{\mathrm{T}} = \phi_{\mathrm{T}} \circ g$, i.e. tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{T}}"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{T}}"] & \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \end{tikzcd}$$

commute. Alors, le morphisme $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est équivariant sous $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$.

6.4. Sections globales. — Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. Notons S_0 l'objet final de $\mathscr{C}$ et (cf. Exp. II, 1.1) $\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}$ le « foncteur des sections de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{X}$ » : c'est le foncteur qui à tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ associe

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{X}_{\mathrm{T}}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M}_{\mathrm{T}}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathrm{T}}/\mathbf{X}_{\mathrm{T}}).$$

Rappelons d'autre part que tout morphisme $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$-objets au-dessus de $\mathbf{X}$ induit un morphisme de groupes abéliens $\mathbf{M}(g) : \mathbf{M}(\mathbf{Y}) \to \mathbf{M}(\mathbf{Z})$, qui est compatible avec le morphisme d'anneaux $g^* : \mathbf{O}(\mathbf{Y}) \to \mathbf{O}(\mathbf{Z})$. En particulier, lorsque $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}$ (g étant alors un $\mathbf{X}$-endomorphisme de $\mathbf{Y}$), on obtient un morphisme de groupes abéliens

$$\mathbf{M}(g) : \quad \mathbf{M}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{Y})$$

qui n'est pas en général un morphisme de $\mathbf{O}(\mathbf{Y})$-modules, mais qui vérifie, pour tout $m \in \mathbf{M}(\mathbf{Y})$ et $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{Y})$:

$$\mathbf{M}(g)(\alpha \cdot m) = g^*(\alpha) \cdot \mathbf{M}(g)(m).$$

Ceci étant dit, on écrira simplement, dans la suite, g^* au lieu de $\mathbf{M}(g)$.

Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et soient $\mathbf{X}_{\mathrm{T}} = \mathbf{X} \times \mathrm{T}$ et $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}}$ la projection $\mathbf{X}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{X}$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{T})$, posons $g(\alpha) = (g^{-1})^*(\alpha)$: c'est l'élément de $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ défini ensemblistement par : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{X}(\mathrm{S})$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$,

$$g(\alpha)(x, t) = \alpha(g^{-1}x, t).$$

On obtient ainsi une action (à gauche) de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ par automorphismes d'anneaux sur $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$, fonctorielle en T, et telle que $g(\alpha) = \alpha$ si α est l'image dans $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ d'un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$.

Notons maintenant ϕ le morphisme identité de $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ (cf. 6.3 et la généralisation plus bas à un morphisme $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$) et désignons $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M})$ par $\mathbf{M}(\phi g^{-1})$ resp. $\mathbf{M}(\phi)$, selon que $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ est regardé comme $\mathbf{X}$-objet via $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ \lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$, resp. $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}}$.

Alors $\lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$ est un $\mathbf{X}$-morphisme entre ces deux $\mathbf{X}$-objets donc, d'après ce qui précède, on obtient un morphisme de groupes abéliens

$$(g^{-1})^* : \quad \mathbf{M}(\phi) \longrightarrow \mathbf{M}(\phi g^{-1}), \qquad m \mapsto m \circ \lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$$

qui vérifie $(g^{-1})^*(\alpha \cdot m) = (g\alpha) \cdot (g^{-1})^*(m)$ pour tout $m \in \mathbf{M}(\phi)$ et $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$. (Si m est une section de $\mathbf{M}_{\mathrm{T}}$ sur $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ alors $(g^{-1})^*(m)$ est la section définie ensemblistement par $(x,t) \mapsto m(g^{-1}x, t)$.) En particulier, $(g^{-1})^*$ est un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$-modules.

D'après la fonctorialité des morphismes de $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$-modules $\Lambda_x(g)$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(\phi) \arrow[r, "(g^{-1})^*"] \arrow[d, "\Lambda_\phi(g)"'] & \mathbf{M}(\phi g^{-1}) \arrow[d, "\Lambda_{\phi g^{-1}}(g)"] \\
\mathbf{M}(g\phi) \arrow[r, "(g^{-1})^*"] & \mathbf{M}(g\phi g^{-1})
\end{tikzcd}$$

et $g\phi g^{-1} = \phi$, puisque ϕ est l'application identité. Notant $\mathrm{A}(g) = (g^{-1})^* \circ \Lambda_\phi(g)$, on obtient donc un morphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{A}(g) : \quad \mathbf{M}(\phi) \longrightarrow \mathbf{M}(\phi)$$

qui est « compatible avec l'action de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ sur $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ », i.e. qui vérifie

$$\mathrm{A}(g)(\alpha \cdot m) = (g\alpha) \cdot \mathrm{A}(g)(m).$$

Enfin, si h est un second élément de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$, il résulte de la fonctorialité de $\mathbf{M}$ et des morphismes $\Lambda_x(g)$ que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(\phi) \arrow[d, "\Lambda_\phi(g)"'] \arrow[dr, "\Lambda_\phi(hg)"] & & \\
\mathbf{M}(g\phi) \arrow[r, "\Lambda_\phi(h)"] \arrow[d, "(g^{-1})^*"'] & \mathbf{M}(hg\phi) \arrow[d, "(g^{-1})^*"'] \arrow[dr, "((hg)^{-1})^*"] & \\
\mathbf{M}(\phi) \arrow[r, "\Lambda_\phi(h)"] & \mathbf{M}(h\phi) \arrow[r, "(h^{-1})^*"] & \mathbf{M}(\phi)
\end{tikzcd}$$

d'où $\mathrm{A}(h) \circ \mathrm{A}(g) = \mathrm{A}(hg)$. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante

Proposition 6.4.1. — *Pour tout* T*, le* $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$*-module* $(\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M})(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathrm{T}}/\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ *est muni, de façon fonctorielle en* T*, d'une action de* $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ *« compatible avec l'action de* $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ *sur* $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ *», i.e. qui vérifie*

$$\mathrm{A}(g)(\alpha \cdot m) = g(\alpha) \cdot \mathrm{A}(g)(m).$$

Comme $g(\alpha) = \alpha$ *pour* $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{T})$ *ceci donne, en particulier, que* $\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}$ *est un* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$*-module.*

Plus généralement soient, comme en 6.3, $\mathbf{Y}$ un second $\widehat{\mathscr{C}}$-objet $\mathbf{G}$-équivariant, $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme et $\mathbf{H} = \underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$. Alors le produit fibré $\mathbf{M}_\phi = \mathbf{Y} \times_\phi \mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathbf{Y}}$-module $\mathbf{H}$-équivariant. On obtient donc le :

Corollaire 6.4.2. — *Le foncteur* $\prod_{\mathbf{Y}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}_\phi$ *est un* $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$*-module.*

6.5. $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules G-équivariants. — Appliquons ce qui précède dans la situation suivante. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module (pas nécessairement quasi-cohérent).

Définition 6.5.1. — On dit que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module G-*équivariant* si le $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{M} = \mathbf{W}(\mathscr{F})$ est G-équivariant, c.-à-d., si on s'est donné, pour tout morphisme (g, x) : $\mathrm{U} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\Lambda_x(g) : \quad \mathbf{W}\big(x^*(\mathscr{F})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{W}\big((gx)^*(\mathscr{F})\big),$$

fonctoriels en U et vérifiant $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$. Comme le foncteur $\mathbf{W}$ est pleinement fidèle (cf. 4.6.1.1 et 4.6.2), on obtient donc des isomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\Lambda_x(g) : \quad x^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (gx)^*(\mathscr{F}),$$

où l'on rappelle que gx désigne le morphisme $\lambda \circ (g, x) : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$. En particulier, appliquant ceci au morphisme identité de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, on obtient un *isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}}$*-modules*

$$(\star) \qquad \theta : \quad \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\mathscr{F})$$

tel que le diagramme $(\star\star)$ de morphismes de faisceaux sur $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_{2,3}^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{2,3}^*(\theta)", "\sim"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}_{2,3}^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "(\star\star)"] & (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \lambda)^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times\lambda)^*(\theta)", "\wr"'] \\
(\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}})^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[r, "(\mu\times\mathrm{id}_{\mathrm{X}})^*(\theta)", "\sim"'] & (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}})^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) \arrow[r, equal] & (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times\lambda)^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) .
\end{tikzcd}$$

De plus, si $\mathscr{E}$ est un second $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant, on dit qu'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\phi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est G-*équivariant* si le morphisme $\mathbf{W}(\phi) : \mathbf{W}(\mathscr{E}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F})$ l'est. Avec les notations ci-dessus, ceci équivaut à dire que $\theta_{\mathscr{F}} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\phi) = \lambda^*(\phi) \circ \theta_{\mathscr{E}}$.

Remarque 6.5.2. — Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme G-équivariant, il résulte de 6.3.1 que $f^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-module G-équivariant.

Remarque 6.5.3. — Supposons de plus $\mathscr{F}$ *quasi-cohérent*. Alors il résulte de ce qui précède que la donnée d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant sur $\mathbf{M} = \mathbf{W}(\mathscr{F})$ *équivaut* à la donnée d'une telle structure sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$, ce qui équivaut encore à se donner une action de G sur la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, compatible avec l'action sur X et « linéaire » sur les fibres.

En effet, notons ϕ l'isomorphisme $\lambda^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F})$ inverse de θ. Pour tout morphisme $(g, x) : \mathrm{U} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules $\phi_x(g) = \Lambda_x(g)^{-1} = \Lambda_{gx}(g^{-1})$ de $(gx)^*(\mathscr{F})$ vers $x^*(\mathscr{F})$, il induit un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\mathbf{V}\big((gx)^*(\mathscr{F})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}\big(x^*(\mathscr{F})\big)$$

qu'on notera ${}^t\phi_x(g)$. On a alors

$$ {}^t\phi_{gx}(h) \circ {}^t\phi_x(g) = {}^t\big(\Lambda_{gx}(h) \circ \phi_x(g)\big)^{-1} = {}^t\Lambda_x(hg)^{-1} = {}^t\phi_x(hg). $$

Comme, pour tout X-schéma $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, on a $\mathbf{V}(\mathscr{F}) \times_f \mathrm{Y} \simeq \mathbf{V}(f^*(\mathscr{F}))$ (cf. 4.6.2), on obtient donc que l'isomorphisme

$$ \begin{aligned} {}^t\phi : \quad \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathscr{F}) = (\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}) \times_{\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}} \mathbf{V}(\mathscr{F}) &= \mathbf{V}(\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\lambda^*(\mathscr{F})) = (\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}) \times_{\lambda} \mathbf{V}(\mathscr{F}) \end{aligned} $$

munit $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant. Enfin, identifiant chaque foncteur $\mathbf{V}(-)$ à la fibration vectorielle qui le représente, et composant ${}^t\phi$ avec la projection sur $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, on obtient une action de G sur la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, compatible avec l'action sur X et « linéaire » sur les fibres.

On retrouve ainsi la définition donnée, par exemple, dans [**GIT**, Chap. 1, § 3], à ceci près que dans *loc. cit.* Mumford considère un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module localement libre de rang fini $\mathscr{E}$, et définit une action de G sur $\mathbf{V}(\mathscr{E}) = \mathbf{W}(\mathscr{E}^\vee)$. En effet, le diagramme $(\star\star)$ précédent, avec θ remplacé par ϕ et le sens des flèches renversé, est exactement celui qu'on trouve dans *loc. cit.*, Def. 1.6, et l'isomorphisme ${}^t\phi$ ci-dessus coïncide avec l'isomorphisme Φ de *loc. cit.*, p. 31.

Remarque 6.5.4. — Considérons en particulier le cas où X = S, muni de l'action triviale de G. Dans ce cas, un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module G-équivariant $\mathscr{F}$ est la même chose qu'un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module (cf. 4.7.1). De plus, si l'on note f le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ (égal ici à pr_{X} et à λ), alors l'isomorphisme

$$ (\star) \qquad \theta : \quad f^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathscr{F}) $$

est un élément de

$$ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{G}}}\big(\mathbf{W}(f^*(\mathscr{F})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{G}) $$

qui n'est autre que le morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ définissant l'opération de G sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$. De plus, θ correspond par adjonction au morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $f_*(\theta) \circ \tau : \mathscr{F} \to f_*f^*(\mathscr{F})$, où $\tau : \mathscr{F} \to f_*f^*(\mathscr{F})$ est le morphisme « unité » de l'adjonction. (Ceci sera utilisé dans $\mathrm{VI_B}$, 11.10.bis.)

6.6. Les foncteurs $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{W}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}\big(p_*(\mathscr{F})\big)$. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur des S-schémas X et Y via les morphismes $\lambda : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ et $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$, et soit $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme G-équivariant. On suppose que les morphismes $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $\nu_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont *quasi-compacts et quasi-séparés*, et que $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est *plat*.

Alors la projection $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ est plate, ainsi que μ (puisque μ est la composée de pr_{Y} et de l'automorphisme $(g, y) \mapsto (g, gy)$). Enfin, pour un S-schéma $f : \mathrm{T} \to$ variable, on notera $p^{\mathrm{T}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ et $f_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}$ les morphismes déduits de p et f par changement de base.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module *quasi-cohérent* et G-équivariant, et soit θ l'isomorphisme $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\mathscr{F})$ de 6.5.1 $(\star)$. Comme p est quasi-compact et quasi-séparé, alors $p_*(\mathscr{F})$ est quasi-cohérent (cf. EGA I, 9.2.1).

Lemme 6.6.1. — *Le $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-module quasi-cohérent $p_*(\mathscr{F})$ est* G*-équivariant.*

En effet, on a les deux carrés cartésiens ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] & \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X} \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}"] & \mathrm{Y} & \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}. \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Comme p est quasi-compact et quasi-séparé et pr_{Y} et μ plats, il résulte de EGA III, 1.4.15 (complété par EGA IV_1, 1.7.21) que l'on a $q_*\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) = \mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}^*\, p_*(\mathscr{F})$ et $q_*\lambda^*(\mathscr{F}) = \mu^* p_*(\mathscr{F})$. Par conséquent, θ induit un isomorphisme :

$$\theta_{\mathrm{Y}}:\quad \mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}^*\, p_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mu^* p_*(\mathscr{F}),$$

et l'on obtient de même que θ_{Y} vérifie la « condition de cocycle » 6.5.1 ($\star\star$) (puisque les morphismes $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}\to\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}$ qui interviennent sont plats). Ceci prouve le lemme.

En particulier, prenons $\mathrm{Y} = \mathrm{S}$ muni de l'action triviale de G. Tenant compte de la remarque 6.5.4, on obtient alors que $p_*(\mathscr{F})$ est un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Si de plus G est *affine* sur S et si l'on note $\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$, alors $p_*(\mathscr{F})$ est donc un $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule, d'après 4.7.2.

D'autre part, d'après 6.4.1, le foncteur $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}\mathbf{W}(\mathscr{F})$, qui à tout $f:\mathrm{T}\to\mathrm{S}$ associe

$$\mathbf{W}(f_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}))(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}) = \Gamma(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, f_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F})) = \Gamma(\mathrm{T}, p_*^{\mathrm{T}} f_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}))$$

est un G-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. De plus, on a un morphisme canonique $\tau:\mathbf{W}(p_*(\mathscr{F}))\to\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}\mathbf{W}(\mathscr{F})$, qui est donné pour tout $f:\mathrm{T}\to\mathrm{S}$ par le morphisme canonique :

$$\Gamma(\mathrm{T}, f^*p_*(\mathscr{F})) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}, p_*^{\mathrm{T}} f_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}))$$

et qui est un isomorphisme lorsqu'on le restreint à la sous-catégorie pleine des schémas T *plats* sur S, et l'on vérifie sans difficultés que τ est un morphisme de G-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante (pour le point (ii), comparer avec [**GIT**], p. 32).

Proposition 6.6.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes opérant sur un* S*-schéma* X*, et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent et* G*-équivariant. On suppose que* $\pi:\mathrm{G}\to\mathrm{S}$ *est* plat *et que* $p:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ *est* quasi-compact et quasi-séparé.

(i) *Alors $p_*(\mathscr{F})$ est un* G*-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. D'autre part, le morphisme canonique $\mathbf{W}(p_*(\mathscr{F}))\to\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est un morphisme de* G*-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, et ces deux foncteurs coïncident sur la catégorie des* S*-schémas* plats.

(ii) *Si de plus* G *est* affine *sur* S *et si l'on note $\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$, alors $p_*(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule.* [55]

[55] N.D.E. : Il en est de même si G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S et si $p_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat*, cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$, 11.6.1 (ii).

6.7. Stabilisateurs. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent G-équivariant. Soit Y un second S-schéma muni d'une action de G (éventuellement triviale), soit $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un S-morphisme, pas nécessairement G-équivariant, et soit $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ le stabilisateur dans G de ϕ (cf. 6.3.2).

Signalons tout de suite (voir Exp. VI_{B}, § 6) que $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé H de G si X est *séparé* sur S et si Y est *essentiellement libre* sur S (cf. *loc. cit.*, Déf. 6.2.1). En effet, considérons le morphisme $r : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ donné ensemblistement par $r(g, y) = \big(\phi(y), g\phi(g^{-1}y)\big)$, et soient $\mathrm{P} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ et P' l'image inverse par r de la diagonale $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$. Alors on a (cf. *loc. cit.*, 6.2.4 (a))

$$\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi) = \prod_{\mathrm{P}/\mathrm{G}} \mathrm{P}'$$

et donc, d'après *loc. cit.*, $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé H de G si X est séparé sur S et si Y est essentiellement libre sur S ; cette seconde condition étant automatiquement vérifiée si S est le spectre d'un corps, ou bien si Y = S. Sous ces hypothèses, $\phi^*(\mathscr{F})$ est alors un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-module quasi-cohérent H-équivariant (cf. 6.5.2).

Donc, si de plus $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et $p : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont quasi-compacts et quasi-séparés sur S, et π plat, alors $p_*\phi^*(\mathscr{F})$ est un H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, d'après 6.6.2. En particulier, on obtient le :

Corollaire 6.7.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes opérant sur un* S*-schéma* X*, et* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module quasi-cohérent* G*-équivariant. On suppose que* π : $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *est* plat *et que* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *est* quasi-compact et séparé. *Soit* $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ *une section de* X *sur* S.

(i) *Le stabilisateur* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\tau)$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G*, et* $\tau^*(\mathscr{F})$ *est un* H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent.*

(ii) *Si de plus* H *est* affine *sur* S (*par exemple, si* G *l'est*) *et si l'on note* $\mathscr{A}(\mathrm{H}) = \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}})$*, alors* $\tau^*(\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{A}(\mathrm{H})$*-comodule.*

6.8. Faisceaux G-équivariants sur G. — Pour terminer, indiquons deux résultats (6.8.1 et 6.8.6 ci-dessous) qui seront utilisés dans les exposés II et III (cf. en particulier III, 4.25).

Proposition 6.8.1. — *Soient* S *un schéma,* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *un* S*-schéma en groupes,* ε : $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$ *la section unité. On considère l'action par translations à gauche de* G *sur lui-même. Alors les foncteurs* $\mathscr{E} \mapsto \pi^*(\mathscr{E})$ *et* $\mathscr{F} \mapsto \varepsilon^*(\mathscr{F})$ *induisent des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents et celle des* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$*-modules quasi-cohérents* G*-équivariants.*

Démonstration. Notons μ la multiplication de G et pr_2 la deuxième projection $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Comme $\pi \circ \mu = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ alors, pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, on a un isomorphisme canonique $\mu^*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathrm{pr}_2^*\,\pi^*(\mathscr{E})$, et l'on vérifie facilement que cet isomorphisme satisfait à la « condition de cocycle » 6.5.1 ($\star\star$), i.e. $\pi^*(\mathscr{E})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module G-équivariant. Comme $\varepsilon^*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, le foncteur $\mathscr{E} \mapsto \pi^*(\mathscr{E})$ est pleinement fidèle ; il reste donc à voir que pour tout $\mathscr{O}_G$-module G-équivariant $\mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} \simeq \pi^*\varepsilon^*(\mathscr{F})$. Par hypothèse, on a un isomorphisme $\theta : \mathrm{pr}_2^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mu^*(\mathscr{F})$; prenant l'image inverse de θ par le morphisme $\tau : G \to G \times_S G$ de composantes $(\mathrm{id}_G, \varepsilon \circ \pi)$, on obtient un isomorphisme $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \pi^*\varepsilon^*(\mathscr{F})$.

Remarques 6.8.2. — (a) Considérons l'action de $G \times_S G$ sur G définie par $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$, alors le stabilisateur de la section unité $\varepsilon : S \to G$ est le sous-groupe diagonal H de $G \times_S G$. Par conséquent, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_G$-module quasi-cohérent $(G \times_S G)$-équivariant alors, d'après 6.5.2, $\mathscr{E} = \varepsilon^*(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de H-$\mathscr{O}_S$-module.

(b) On peut montrer que $\mathscr{F} \mapsto \varepsilon^*(\mathscr{F})$ est une équivalence de catégories, entre la catégorie des $\mathscr{O}_G$-modules quasi-cohérents $(G \times_S G)$-équivariants et celle des H-$\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents. Ceci est un cas particulier de résultats « de descente » (cf. Exp. IV, § 2 et SGA 1, VIII) plus généraux, voir par exemple [**Th87**], 1.2–1.3.

Remarque 6.8.3. — On conserve les notations de 6.8.1. Pour tout $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, notons $\pi_*^G\pi^*(\mathscr{E})$ le sous-$\mathscr{O}_S$-module de $\pi_*\pi^*(\mathscr{E})$ dont les sections sur tout ouvert V de S sont les $\gamma \in \Gamma(\pi^{-1}(V), \pi^*(\mathscr{E}))$ tels que $g \cdot \gamma_{S'} = \gamma_{S'}$ pour tout $S' \to V$ et $g \in G(S')$. Alors le morphisme naturel $\mathscr{E} \to \pi_*^G\pi^*(\mathscr{E})$ est un isomorphisme : ceci est immédiat si $\pi_*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \pi_*(\mathscr{O}_G)$ (par exemple si $G \to S$ est affine, ou si $G \to S$ est quasi-compact et quasi-séparé et $\mathscr{E}$ plat), et cela se vérifie sans difficultés dans le cas général.

Remarque 6.8.4. — Soient S un schéma, H un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module. On suppose H *plat* sur S et l'on note $\mathbf{W}_P(\mathscr{F})$ la restriction du foncteur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ à la sous-catégorie pleine formée des S-schémas *plats*. Comme, d'après 6.5.1, munir $\mathscr{F}$ d'une structure de module H-équivariant équivaut à se donner un isomorphisme $\theta : \mathrm{pr}_X^*(\mathscr{F}) \to \lambda^*(\mathscr{F})$ de faisceaux sur $G \times_S X$, vérifiant la « condition de cocyle » $(\star\star)$, on voit que pour se donner une structure de module H-équivariant sur $\mathscr{F}$, il suffit de se donner une telle structure sur $\mathbf{W}_P(\mathscr{F})$.

Rappel 6.8.5. — Soient X un S-schéma et Y un sous-S-schéma de X. On note $\mathscr{N}_{Y/X}$ le faisceau conormal de l'immersion $i : Y \hookrightarrow X$ (cf. EGA IV_4, 16.1.2). Si $S' \to S$ est un morphisme *plat* et si l'on note $i' : Y' \hookrightarrow X'$ l'immersion déduite de i par changement de base, alors d'après *loc. cit.*, 16.2.2 (iii), on a $\mathscr{N}_{Y/X} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{N}_{Y'/X'}$.

Proposition 6.8.6. — *Soient* S *un schéma,* X *un* S*-schéma en groupes,* Y *un sous-*S*-schéma en groupes de* X. *On suppose* Y plat *sur* S. *Alors le faisceau conormal* $\mathscr{N}_{Y/X}$ *est un* $\mathscr{O}_Y$*-module* $(Y \times_S Y)$*-équivariant.*

En effet, $H = Y \times_S Y$ est plat sur S donc, d'après la remarque 6.8.4, il suffit de munir $\mathbf{W}_P(\mathscr{N}_{Y/X})$ d'une structure de module H-équivariant. Soit S' un S-schéma plat, soit $Y' \hookrightarrow X'$ l'immersion obtenue par changement de base, et soit $\mathscr{N}' = \mathscr{N}_{X/Y} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$. D'après 6.8.5, on a $\mathscr{N}' = \mathscr{N}_{Y'/X'}$.

Tout $h \in H(S')$ induit un automorphisme de Y' et l'on obtient donc, pour tout $y \in Y'(S')$, des isomorphismes

$$\Gamma(S', y^*(\mathscr{N}')) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S', y^*h^*(\mathscr{N}'))$$

qui munissent $\mathbf{W}_{\mathrm{P}}(\mathscr{N})$ d'une structure de module H-équivariant (cf. 6.1).

Bibliographie

[56]

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[Ja03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1987 ; 2ème éd. Amer. Math. Soc., 2003.

[GIT] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965 ; 2ème éd., avec J. Fogarty, 1982 ; 3ème éd., avec J. Fogarty & F. Kirwan, 1994.

[Ni02] N. Nitsure, *Representability of* GL_{E}, Proc. Indian Acad. Sci. **112** (2002), No. 4, 539-542.

[Ni04] N. Nitsure, *Representability of* Hom *implies flatness*, Proc. Indian Acad. Sci. **114** (2004), No. 1, 7-14.

[Se68] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. math. I.H.É.S. **34** (1968), 37-52.

[Th87] R. W. Thomason, *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. Maths. **65** (1987), 16-34.

[56] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé