EXPOSÉ IV

TOPOLOGIES ET FAISCEAUX

par M. Demazure [(*)]

Cet exposé est destiné à faire connaître au lecteur l'essentiel du langage des topologies et des faisceaux (sans cohomologie), particulièrement commode dans les questions de passage au quotient (entre autres). **160**

Les trois premiers paragraphes développent le langage du passage au quotient. Le quatrième, qui est la partie centrale, est l'exposé de la théorie des faisceaux, orienté principalement vers l'application aux questions de quotients ; le cinquième est une application au passage au quotient dans les groupes et aux fibrés principaux homogènes. Le dernier paragraphe concerne plus spécialement la catégorie des schémas, et définit diverses topologies utiles sur cette catégorie.

Le lecteur se référera utilement à [**AS**], [**MA**], [**D**], et SGA 4 ; [**D**] en ce qui concerne spécialement les applications des topologies à la théorie de la descente, et SGA 4 pour les questions d'univers (particulièrement maltraitées dans cet exposé).

1. Épimorphismes effectifs universels **161**

Dans la suite de cet exposé, on suppose fixée une catégorie $\mathscr{C}$.

Définition 1.1. — Un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est appelé un *épimorphisme* si, pour tout objet X, l'application correspondante

$$\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{T},\mathrm{X})$$

est injective [(1)]. On dit que u est un *épimorphisme universel* si pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe, et $u' : \mathrm{T}' \to \mathrm{S}'$ est un épimorphisme.

[(*)] Ce texte développe la substance de deux exposés oraux de A. Grothendieck, en complétant ces derniers sur plusieurs points importants, qui avaient été passés sous silence ou à peine effleurés.

[(1)] N.D.E. : c'est-à-dire, si u est simplifiable à droite.

Définition 1.2. — Un diagramme

$$A \xrightarrow{u} B \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} C$$

d'applications d'ensembles est dit *exact* si u est injectif et si son image est formée des éléments b de B tels que $v_1(b) = v_2(b)$. Un diagramme de même type dans $\mathscr{C}$ est dit *exact* si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$A(X) \longrightarrow B(X) \rightrightarrows C(X)$$

est exact ; on dit aussi alors que u fait de A un *noyau* du couple de flèches (v_1, v_2). Dualement, un diagramme

$$C \overset{v_1}{\underset{v_2}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{u} A$$

dans $\mathscr{C}$ est dit *exact*, s'il est exact en tant que diagramme dans la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\circ}$, i.e. si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$X(A) \longrightarrow X(B) \rightrightarrows X(C)$$

162 est exact. [(2)] On dit aussi que u fait de A un *conoyau* du couple de flèches (v_1, v_2).

Définition 1.3. — Un morphisme $u : T \to S$ est appelé un *épimorphisme effectif* si le carré fibré $T \times_S T$ existe, et si le diagramme

$$T \times_S T \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{u} S$$

est exact, i.e. si u fait de S un conoyau de $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$. On dit que u est un *épimorphisme effectif universel* si pour tout morphisme $S' \to S$, le produit fibré $T' = T \times_S S'$ existe, et le morphisme $u' : T' \to S'$ est un épimorphisme effectif.

On a évidemment les implications :

$$\begin{array}{ccc}
\text{épimorphisme effectif universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme effectif} \\
\Big\Downarrow & & \Big\Downarrow \\
\text{épimorphisme universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme}
\end{array},$$

mais en général aucune autre implication n'est valable. [(3)]

(2) N.D.E. : Ceci implique, en particulier, que u soit un épimorphisme.

(3) N.D.E. : Par exemple, si $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$ est la catégorie des schémas, on voit facilement que tout épimorphisme *universel* est *surjectif.* Soient $T = \coprod_{p \text{ premier}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, alors le morphisme $u : T \to S$ est un épimorphisme qui n'est *pas universel.* D'autre part, on voit que $T \times_S T$ s'identifie à T, de sorte que les deux projections $T \times_S T \rightrightarrows T$ coïncident ; comme id_T ne descend pas en un morphisme $S \to T$, ceci montre que u n'est *pas* un épimorphisme *effectif* .

Définition 1.4.0. — [4] On « rappelle » qu'un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est dit *quarrable* si pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe.

Lemme 1.4. — *Considérons des morphismes* $\mathrm{U} \xrightarrow{v} \mathrm{T} \xrightarrow{u} \mathrm{S}$. *Alors*

a) u, v *épimorphismes* $\Rightarrow$ uv *épimorphisme* $\Rightarrow$ u *épimorphisme,*

b) u, v *épimorphismes universels* $\Rightarrow$ uv *épimorphisme universel et* u *quarrable* $\Rightarrow$ u *épimorphisme universel.*

Le lemme 1.4 est trivial sur les définitions. On en conclut :

Corollaire 1.5. — *Soient* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *des épimorphismes universels, tels que* $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *existe, alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ *existe et* $u \times u' : \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *est un épimorphisme universel.*

Notons aussi : **163**

Définition 1.6.0. — [5] On dit qu'un objet S de $\mathscr{C}$ est *quarrable* si son produit par tout objet de $\mathscr{C}$ existe. (Si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, ceci équivaut à dire que le morphisme $\mathrm{S} \to e$ est quarrable, cf. 1.4.0.)

Lemme 1.6. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme dans* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ *; pour que ce soit un épimorphisme* (*resp. épimorphisme universel, resp. épimorphisme effectif, resp. épimorphisme effectif universel*), *il suffit que le morphisme correspondant dans* $\mathscr{C}$ *le soit, et c'est aussi nécessaire si on suppose que* S *est un objet quarrable de* $\mathscr{C}$*.*

Démonstration immédiate laissée au lecteur. On utilise l'hypothèse « S quarrable » pour interpréter les $\mathscr{C}$-morphismes d'un objet Y de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans un objet Z de $\mathscr{C}$, comme étant les $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$-morphismes de Y dans $\mathrm{Z} \times \mathrm{S}$.

Lemme 1.7. — *Avec les notations de* 1.4 *:* u, v *épimorphismes effectifs et* v *épimorphisme universel* $\Rightarrow$ uv *épimorphisme effectif.*

Pour le voir, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l, "u"'] & \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
 & \mathrm{U} \arrow[u, "v"] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "v \times_{\mathrm{S}} v"'] \\
 & \mathrm{U} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{U} \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}\quad .$$

On note que par hypothèse, la ligne 1 et la colonne 1 sont exactes, et qu'en vertu de 1.5 et 1.6, $v \times_{\mathrm{S}} v$ est un épimorphisme (v étant un épimorphisme *universel*). La conclusion en résulte par un diagram-chasing évident : si un élément de X(U) a mêmes

[4] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.4.0, pour des références ultérieures.
[5] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.6.0, pour des références ultérieures.

images dans $\mathrm{X}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U})$, il a *a fortiori* mêmes images dans $\mathrm{X}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{U})$, donc provient d'un élément de $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ puisque la colonne 1 est exacte. Comme la ligne 1 est exacte, il suffit de vérifier que l'élément envisagé a mêmes images dans $\mathrm{X}(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T})$, et comme $v \times_{\mathrm{S}} v$ est un épimorphisme, il suffit de vérifier que les images dans $\mathrm{X}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U})$ sont
164 les mêmes, ce qui est bien le cas.

Proposition 1.8. — *Considérons des morphismes* $\mathrm{U} \xrightarrow{v} \mathrm{T} \xrightarrow{u} \mathrm{S}$. *Alors u, v épimorphismes effectifs universels $\Rightarrow$ uv épimorphisme effectif universel et u quarrable $\Rightarrow$ u épimorphisme effectif universel.*

La première implication résulte aussitôt de 1.7. Pour la deuxième, on regarde le diagramme (de type « bisimplicial ») :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l, "u"'] & \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
\mathrm{U} \arrow[u, "vu"] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u] \\
\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd} .$$

Les colonnes 1,2,3 sont exactes en vertu de l'hypothèse « vu épimorphisme effectif universel », la ligne 2 est exacte, car $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{U}$ est un épimorphisme effectif (car il a une section sur U), et il en est de même de la ligne 3 (même raison). Un diagram-chasing évident montre alors que la ligne 1 est exacte, i.e. u est un épimorphisme effectif. Comme les hypothèses faites sont invariantes par un changement de base quelconque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, il s'ensuit que u est même un épimorphisme effectif universel.

Corollaire 1.9. — *Soient* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *des épimorphismes effectifs universels, tels que* $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *existe ; alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ *existe et* $u \times u' : \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *est un épimorphisme effectif universel.*

Démonstration comme pour 1.5 par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Y}' & \mathrm{X}' \arrow[l, "u'"'] \\
\mathrm{X} \arrow[d, "u"'] & \mathrm{X} \times \mathrm{Y}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u \times u'"] \\
\mathrm{Y} & \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}' \arrow[l] &
\end{tikzcd} .$$

165 ***Corollaire 1.10***. — *Considérons un morphisme quarrable* $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$, *et un morphisme de changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *qui soit un épimorphisme effectif universel. Pour que*

u soit un épimorphisme effectif universel, il faut et suffit que $u' : \mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ *le soit :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[d, "u"'] & \mathrm{T}' \arrow[l, "v'"'] \arrow[d, "u'"] \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}' \arrow[l, "v"'] \end{tikzcd} .$$

Seul le « il suffit » demande une démonstration. Or si u' est un épimorphisme effectif universel, il en est de même de vu' grâce à 1.8, et comme $vu' = uv'$, on conclut par 1.8 que u est un épimorphisme effectif universel.

Remarque 1.11. — Le même raisonnement montre que dans 1.10 on peut remplacer « épimorphisme effectif universel » par « épimorphisme universel » ou « épimorphisme universel et effectif », ou simplement par « épimorphisme » (et dans ce dernier cas, l'hypothèse « u quarrable » est évidemment inutile).

Dans la démonstration de 1.8 nous avons utilisé le résultat suivant, qui mérite d'être explicité :

Proposition 1.12. — *Soit* $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *un morphisme qui admette une section. Alors* u *est un épimorphisme, et si* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ *existe, c'est un épimorphisme effectif, et un épimorphisme effectif universel si de plus* u *est quarrable.*

La première assertion est contenue dans 1.4 a), et la troisième va résulter aussitôt de la seconde, qu'il suffira donc d'établir. En fait on a une conclusion plus forte : pour *tout* foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C}^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ (non nécessairement représentable), le diagramme d'ensembles

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}) \rightrightarrows \mathrm{F}(\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T})$$

est exact. Ceci peut être considéré comme un cas particulier du formalisme de la cohomologie de Čech (en dimension 0 !) que nous nous contentons de rappeler ici. Supposons simplement que $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ existe, on pose alors

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{F}(\mathrm{T}) \rightrightarrows \mathrm{F}(\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T})\big).$$

On peut regarder $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$ de façon évidente comme un foncteur contravariant en 166
l'argument T variable dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, tout S-morphisme $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ définissant une application

$$(+) \qquad \mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T}'/\mathrm{S}, \mathrm{F}).$$

Fixons T et T′ dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Un calcul bien connu montre que s'il existe un S-morphisme de T′ dans T, l'application correspondante (+) est en fait indépendante du choix de ce morphisme [6], de sorte que $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$ peut être regardé comme un foncteur sur la catégorie associée à l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ préordonné par la relation de « domination »

---

[6] N.D.E. : Il s'agit de l'argument suivant, communiqué par M. Demazure. Soient $f, g : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, et soit $\phi : \mathrm{T}' \to \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ le morphisme de composantes f et g, d'où $p_1 \circ \phi = f$ et $p_2 \circ \phi = g$. Alors $\mathrm{F}(\phi) : \mathrm{F}(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}')$ vérifie $\mathrm{F}(\phi) \circ \mathrm{F}(p_1) = \mathrm{F}(f)$ et $\mathrm{F}(\phi) \circ \mathrm{F}(p_2) = \mathrm{F}(g)$. Or, pour tout $x \in \mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$, on a $\mathrm{F}(p_1)(x) = \mathrm{F}(p_2)(x)$. Donc, appliquant $\mathrm{F}(\phi)$ aux deux membres, on obtient $\mathrm{F}(f)(x) = \mathrm{F}(g)(x)$, ce qui montre que f et g induisent le même morphisme.

(T' domine T s'il existe un S-morphisme de T' dans T). En particulier, si T et T' sont isomorphes dans cette dernière catégorie, i.e. si chacun domine l'autre, alors (+) est un *isomorphisme* d'ensembles. Ceci s'applique en particulier au cas où T' est l'objet final de $\mathscr{C}_{/S}$, i.e. essentiellement S lui-même ; de toutes façons T domine $T' = S$, et l'inverse est vrai précisément si T/S a une section. Cela établit 1.12 sous la forme renforcée annoncée.

Remarque 1.13. — Pour diverses applications, les notions introduites dans le présent exposé, et les résultats énoncés, doivent se développer plus généralement relativement à une *famille* de morphismes $u_i : T_i \to S$ de même but (au lieu d'un seul morphisme $u : T \to S$). Ainsi, une telle famille sera dite *épimorphique* si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, l'application correspondante

$$X(S) \to \prod_i X(T_i)$$

est injective, et on introduit de même la notion de *famille épimorphique effective* et les variantes « universelles » de ces notions. Nous admettrons au besoin, par la suite, que les résultats du présent exposé s'étendent à cette situation plus générale.

Remarque 1.14. — Tout morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épi-
167 morphisme effectif est un isomorphisme. En effet, dans les notations de 1.3, le fait que $T \to S$ soit un monomorphisme entraîne que les deux morphismes

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \ T \times_S T \rightrightarrows T$$

sont égaux (et sont des isomorphismes). Or un diagramme

$$C \underset{v}{\overset{v}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\ u\ } A$$

n'est exact que si u est un isomorphisme, comme il résulte immédiatement de la définition. [7]

2. Morphismes de descente

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. — Soit $f : S' \to S$ un morphisme tel que $S'' = S' \times_S S'$ existe, et soit $u' : X' \to S'$ un objet sur S'. On appelle *donnée de recollement* sur X'/S', relativement à f, un S''-isomorphisme

$$c : X''_1 \xrightarrow{\sim} X''_2$$

où X''_i $(i = 1, 2)$ désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection $\mathrm{pr}_i : S'' \to S'$. On dit que la donnée de recollement c est une *donnée de descente* si elle satisfait la « condition des cocycles »

$$\mathrm{pr}^*_{3,1}(c) = \mathrm{pr}^*_{3,2}(c)\mathrm{pr}^*_{2,1}(c)$$

[7] N.D.E. : On notera qu'un monomorphisme qui est un épimorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme. Par exemple, dans $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$, le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \coprod \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est un monomorphisme et un épimorphisme surjectif, mais n'est pas un isomorphisme.

où $\mathrm{pr}_{i,j}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant 3)$ sont les projections canoniques de $\mathrm{S}''' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ dans S'' (N. B. on suppose maintenant que S''' existe également), où $\mathrm{pr}_{i,j}^*(c)$ est l'image inverse de c, considéré comme un S'''-morphisme de X_j''' dans X_i''', et où pour tout **168**
entier k entre 1 et 3, X_k''' désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection d'indice k, $q_k : \mathrm{S}''' \to \mathrm{S}'$.

Dans la deuxième partie de la définition, on a donc utilisé des identifications et abus d'écriture d'usage courant [8], que l'expérience prouve être inoffensifs, mais qu'il convient évidemment d'éviter dans un exposé rigoureux de la théorie de la descente, (qui doit précisément justifier dans une certaine mesure ces abus de langage courants). Un tel exposé en forme ([**D**]) a été rédigé par Giraud, (en vue de justifier et de préciser SGA 1, VII, qui n'a jamais été rédigé). Pour un exposé détaillé des résultats de descente fidèlement plate dont il sera fait un usage constant dans le présent Séminaire on pourra consulter SGA 1, VIII.

Soit toujours $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme tel que $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe, et soit X un objet sur S tel que $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{X}'' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ existent ; alors les images inverses de X' par pr_i $(i = 1, 2)$ existent et sont canoniquement isomorphes, et par suite X'/S' est munie d'une donnée de recollement canonique relativement à f. Lorsque S''' et $\mathrm{X}''' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'''$ existent, c'est même une donnée de descente. Si Y est un autre objet sur S, satisfaisant aux mêmes conditions que X/S, alors pour tout S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, le S'-morphisme correspondant $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ est « compatible avec les données de recollement » canoniques sur X', Y'. Si en particulier $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme *quarrable*, alors

$$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'$$

est un foncteur de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans la « catégorie des objets sur S' *munis d'une donnée de descente* relativement à f » – catégorie dont la définition est laissée au lecteur, et qui est une sous-catégorie pleine de la « catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de recollement relativement à f ».

Ceci posé :

Définition 2.2. — On dit qu'un morphisme $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un *morphisme de descente* **169**
(resp. un *morphisme de descente effective*) si f est *quarrable* (i.e. pour tout $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe), et si le foncteur précédent $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ des objets sur S, dans la catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f, est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

On notera que la première de ces deux notions peut s'exprimer à l'aide de la seule notion de donnée de recollement (donc sans faire intervenir le produit fibré triple S'''), f étant un morphisme de descente si f est quarrable et $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}'$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans la catégorie des objets sur S' munis d'une *donnée de recollement* relativement à f. Quand on explicite cette définition, on

---

[8] N.D.E. : par exemple, on a identifié, d'une part, $\mathrm{pr}_{2,1}^*(\mathrm{X}_1'') = \mathrm{pr}_{3,1}^*(\mathrm{X}_1'')$ et, d'autre part, $\mathrm{pr}_{2,1}^*(\mathrm{X}_2'') = \mathrm{pr}_{3,2}^*(\mathrm{X}_2'')$.

constate que cela signifie que pour deux objets X, Y sur S, le diagramme d'ensembles suivant

$$\text{(x)}\qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}') \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')$$

est exact, où $p_i(u')$ désigne l'image inverse de $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ par la projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$, pour $i = 1, 2$; en effet, le noyau du couple (p_1, p_2) n'est autre par définition que l'ensemble des S'-morphismes $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ compatibles avec les données de recollement canoniques.

Notons que, par définition des images inverses $\mathrm{Y}', \mathrm{Y}''$, on a des bijections canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}),$$

de sorte que l'exactitude du diagramme (x) équivaut à celle de

$$\text{(xx)}\qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}),$$

obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{Y})$ au diagramme dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$:

$$\text{(xxx)}\qquad \mathrm{X}'' \rightrightarrows \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$$

170 qui est déduit de

$$\mathrm{S}'' \rightrightarrows \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}$$

par le changement de base $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$. Cela prouve, compte tenu de 1.6, la première partie de la proposition suivante :

Proposition 2.3. — *Soit* $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme. Si c'est un épimorphisme effectif universel, c'est un morphisme de descente, et la réciproque est vraie si* S *est un objet quarrable de* $\mathscr{C}$ (*i.e. son produit par tout objet de* $\mathscr{C}$ *existe*).

Reste à prouver que si f est un morphisme de descente, c'est un épimorphisme effectif universel, c'est-à-dire que pour tout morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$, le diagramme (xxx) est exact, i.e. pour tout objet Z de $\mathscr{C}$, le transformé de ce diagramme par $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{Z})$ est un diagramme exact d'ensembles. Or par hypothèse $\mathrm{Z} \times \mathrm{S}$ existe ; soit Y l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ qu'il définit ; alors le diagramme transformé de (xxx) par $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{Z})$ est isomorphe au diagramme transformé par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{Y})$, or ce dernier est exact par l'hypothèse sur f.

On peut donc appliquer aux épimorphismes effectifs universels les résultats sur les morphismes de descente, tels les suivants :

Proposition 2.4. — *Soit* $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme de descente* (*par exemple un épimorphisme effectif universel*). *Alors :*

a) *Pour tout* S-*morphisme* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, u *est un isomorphisme* (*resp. un monomorphisme*) *si et seulement si* $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *l'est.*

b) *Soient* X, Y *deux sous-objets de* S, X' *et* Y' *les sous-objets de* S' *images inverses des précédents. Pour que* X *soit majoré par* Y (*resp. soit égal à* Y), *il faut et suffit qu'il en soit de même pour* X', Y'.

Pour (a), il résulte de la définition que si u' est un isomorphisme dans la catégorie des objets à donnée de recollement, alors u est un isomorphisme ; or on constate 171
aussitôt que tout isomorphisme d'objets sur S', compatible avec des données de recollement, est un isomorphismes d'objets à donnée de recollement, i.e. son inverse est également compatible avec les données de recollement. Pour b), on est ramené à prouver que si X' est majoré par Y', i.e. s'il existe un S'-morphisme $X' \to Y'$, alors il en est de même pour X, Y sur S. Or comme $Y' \to S'$, donc aussi $Y'' \to S''$, est un monomorphisme, on voit que $X' \to Y'$ est automatiquement compatible avec les données de recollement, donc provient d'un S-morphisme $X \to Y$. Notons que la démonstration vaut plus généralement quand on a deux objets X, Y sur S, avec $Y \to S$ un monomorphisme, et qu'on se demande si le morphisme $X \to S$ se factorise par Y : il suffit que $X' \to S'$ se factorise par Y'.

Corollaire 2.5. — *Soient* $f : S' \to S$ *un épimorphisme effectif universel et* $g : S \to T$ *un morphisme tel que* $S \times_T S$ *existe. Supposons que* $S'' = S' \times_S S'$ *soit aussi un produit fibré de* S' *par lui-même sur* T, *i.e.* $S' \times_S S' \xrightarrow{\sim} S' \times_T S'$. *Alors* $g : S \to T$ *est un monomorphisme* (*et réciproquement bien sûr*).

En effet, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} S' \times_S S' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & S' \times_T S' \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r] & S \times_T S \end{tikzcd} \quad ,$$

où la deuxième flèche horizontale est le morphisme diagonal. En vertu de 1.9 la deuxième flèche verticale f est un épimorphisme effectif universel, par hypothèse la première flèche horizontale est un isomorphisme, donc en vertu de 2.4 a) ou b) au choix [(9)], il en est de même de $S \to S \times_T S$, ce qui signifie précisément que $g : S \to T$ est un monomorphisme.

Remarque 2.6. — Les notions introduites dans 2.1, en termes de morphismes entre certaines limites projectives, s'explicitent de façon évidente en termes des foncteurs 172
contravariants définis par les objets S, S', X' envisagés : sous réserve d'existence des produits fibrés envisagés dans 2.1, il y a correspondance biunivoque entre les données de recollement (resp. de descente) sur X'/S' relativement à $S' \to S$, et les données de recollement (resp. de descente) pour les objets correspondants dans $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^{\circ}, (\mathbf{Ens}))$. Ceci permet, si on le désire, d'étendre ces notions au cas où on ne fait aucune hypothèse d'existence de produits fibrés dans $\mathscr{C}$.

Remarque 2.7. — Les notions introduites dans ce numéro se généralisent au cas de familles de morphismes. Elles peuvent d'autre part se présenter de manière plus intrinsèque à l'aide de la notion de *crible* (4.1). Pour ces questions, le lecteur se reportera à [**D**].

---

(9) N.D.E. : appliqué à $f : S' \times_T S' \to S \times_T S = Y$.

3. Relations d'équivalence effectives universelles

3.1. Relations d'équivalence : définitions

Définition 3.1.1. — On appelle *$\mathscr{C}$-relation d'équivalence* dans $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ un sous-foncteur *représentable* R du foncteur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) soit le graphe d'une relation d'équivalence dans X(S).

Cette définition s'applique en particulier à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$. Si on considère X comme un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, on voit alors qu'une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X n'est autre qu'un sous-foncteur R de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ tel que R(S) soit le graphe d'une relation d'équivalence dans X(S) pour tout objet S de $\mathscr{C}$ [(10)].

Si R est une $\mathscr{C}$-relation d'équivalence dans X, on désigne par p_i le morphisme de R dans X induit par la projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. On a donc un diagramme

$$p_1, p_2 : \mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{X}.$$

173 ***Définition 3.1.2.*** — Un morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est dit *compatible* avec R si $up_1 = up_2$. Un objet de $\mathscr{C}$ conoyau du couple (p_1, p_2) est aussi appelé *objet-quotient* de X par R et noté X/R.

On a donc un diagramme exact

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, shift left, "p_1{,}p_2"] \arrow[r, shift right] & \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{X/R} \end{tikzcd}$$

et X/R représente le foncteur *covariant*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X/R}, \mathrm{Z}) = \{\text{morphismes de X dans Z compatibles avec R}\}.$$

Comme les objets-quotients ont été choisis dans $\mathscr{C}$, le quotient X/R est unique (lorsqu'il existe).

Ces définitions se généralisent aussitôt au cas d'une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X, mais on remarquera que l'identification des objets de $\mathscr{C}$ à leurs images dans $\widehat{\mathscr{C}}$ *ne commute pas à la formation des quotients*, c'est-à-dire que le quotient X/R de X par R dans $\mathscr{C}$ n'est pas *a priori* un quotient de X par R dans $\widehat{\mathscr{C}}$. On se gardera donc d'identifier inconsidérément $\mathscr{C}$ à son image dans $\widehat{\mathscr{C}}$ dans les questions faisant intervenir des passages au quotient. [(11)]

[(10)] N.D.E. : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) est le graphe d'une relation d'équivalence, alors cette relation d'équivalence s'étend à R(F) pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, en déclarant que deux morphismes $\phi, \psi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ sont équivalents si, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $x \in \mathrm{F(S)}$, $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont équivalents dans X(S).

[(11)] N.D.E. : Illustrons ce propos en donnant un aperçu de la suite de cet Exposé. Soient G un $\mathscr{C}$-groupe, H un sous-$\mathscr{C}$-groupe, R la relation d'équivalence dans G définie par $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto (g, gh)$ (cf. 3.2). Le foncteur Q défini par $\mathrm{Q(S)} = \mathrm{G(S)/H(S)}$ est un quotient dans $\widehat{\mathscr{C}}$ (d'après 4.4.9 appliqué à la topologie la moins fine, cf. 4.4.2), mais ce n'est pas en général le quotient que l'on souhaite. Par exemple, pour $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$, on a une suite exacte de schémas en groupes (affines) :

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_2 \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

qui identifie $\mathbb{G}_m$ au quotient $\mathbb{G}_m/\boldsymbol{\mu}_2$. De plus, comme p est un morphisme fini et localement libre, alors $\mathbb{G}_m$ est le *faisceau-quotient* de $\mathbb{G}_m$ par $\boldsymbol{\mu}_2$ dans la catégorie plus grande des *faisceaux pour la*

Dans la suite, *nous dirons* simplement *relation d'équivalence pour* $\widehat{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence* ; nous préciserons, le cas échéant, s'il s'agit de $\mathscr{C}$-relations d'équivalences [12].

Définition 3.1.3. — Si X est un objet de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, on appelle relation d'équivalence dans X au-dessus de S une relation d'équivalence R dans X tel que le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ soit compatible avec R.

Le monomorphisme canonique $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ se factorise alors par le monomorphisme

$$\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X}$$

et définit une relation d'équivalence dans l'objet $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Lorsque le quotient 174
X/R existe, il est muni d'un morphisme canonique dans S et l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ correspondant est un quotient de $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ par la relation d'équivalence précédente. Réciproquement, si S est un objet *quarrable* de $\mathscr{C}$ et si $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est un quotient de X par cette relation d'équivalence (dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$), alors Y est un quotient de X par R dans $\mathscr{C}$. De toutes façons, nous n'aurons jamais à considérer des quotients dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ qui ne soient pas déjà quotients dans $\mathscr{C}$.

Définition 3.1.4. — Si X (resp. X′) est un objet de $\mathscr{C}$ muni d'une relation d'équivalence R (resp. R′), un morphisme

$$u : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$$

est dit *compatible avec* R et R′ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, deux points de X(S) congrus modulo R(S) sont transformés par u en deux points de X′(S) congrus modulo R′(S) ;

(ii) il existe un morphisme $\mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ (nécessairement unique) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}' \arrow[d] \\ \mathrm{X} \times \mathrm{X} \arrow[r, "u\times u"] & \mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \end{tikzcd} \quad .$$

D'après la propriété universelle de X/R, il existe alors (lorsque les quotients X/R et X′/R′ existent) un morphisme unique v rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{X}/\mathrm{R} \arrow[d, "v"'] \\ \mathrm{X}' \arrow[r, "p'"] & \mathrm{X}'/\mathrm{R}' \end{tikzcd} \quad .$$

topologie (fppf), cf. 4.6.6 (ii) et 6.3.2. Par contre, le quotient Q dans $\widehat{\mathscr{C}}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{G}_m$ puisque, par exemple, $\mathrm{Q}(\mathbb{Z}) = \{1\}$ tandis que $\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. Donc Q n'est pas un faisceau (fppf), et a fortiori Q n'est pas représentable.

(12) N.D.E. : Prendre garde que, même pour une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X, on s'intéresse à l'existence d'un quotient *dans* $\mathscr{C}$.

175 ***Définition 3.1.5***. — Un sous-objet (= un sous-foncteur représentable) Y de X est dit *stable* par la relation d'équivalence R si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le sous-ensemble Y(S) de X(S) est stable par R(S).

(ii) Les deux sous-objets de R images inverses de Y par p_1 et p_2 sont identiques.

Un cas particulier important de sous-objet stable de X est le suivant : le quotient X/R existe et Y est l'image inverse sur X d'un sous-objet de X/R.

Définition 3.1.6. — Soient R une relation d'équivalence dans X et $X' \to X$ un morphisme. La relation d'équivalence R′ dans X′ obtenue par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ X' \times X' \arrow[r] & X \times X \end{tikzcd}$$

est dite la relation d'équivalence dans X′ *image inverse* de la relation d'équivalence R dans X. En particulier, si X′ est un sous-objet de X, on dira que c'est la relation d'équivalence *induite* dans X′ par R, on la notera $R_{X'}$.

Le morphisme $X' \to X$ est compatible avec R′ et R ; on a donc, lorsque les quotients existent, un morphisme $X'/R' \to X/R$ (3.1.4). Si X′ est un sous-objet de X, nous verrons plus tard que dans certains cas on peut prouver que $X'/R' \to X/R$ est un monomorphisme, donc identifie X′/R′ à un sous-objet de X/R. Lorsqu'il en sera ainsi, l'image inverse de ce sous-objet dans X sera un sous-objet de X majorant X′ et stable par R : le *saturé* de X′ pour la relation d'équivalence R.

176 ***Proposition 3.1.7***. — *Si le sous-objet* Y *de* X *est stable par* R*, on a deux carrés cartésiens, pour* $i = 1, 2$ *:*

$$\begin{tikzcd} R_Y \arrow[r] \arrow[d, "p_i"'] & R \arrow[d, "p_i"'] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad .$$

Démonstration immédiate.

3.2. Relation d'équivalence définie par un groupe opérant librement

Définition 3.2.1. — Soient X un objet de $\mathscr{C}$ et H un $\mathscr{C}$-groupe opérant sur X (c'est-à-dire muni d'un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$H \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(X)\ ).$$

On dit que H opère *librement* sur X si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le groupe H(S) opère librement sur X(S) ;

(ii) Le morphisme de foncteurs

$$\mathrm{H} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X}$$

défini ensemblistement par $(h, x) \mapsto (hx, x)$ est un monomorphisme.

(Dans la définition précédente, on a supposé que le groupe H opérait « à gauche » sur X. On a évidemment une notion analogue dans le cas où le groupe opère « à droite » c'est-à-dire lorsqu'on s'est donné un morphisme de groupes du groupe H° opposé à H dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{X})$).

Si H opère librement sur X, l'image de H × X par le morphisme de (ii) est une relation d'équivalence dans X dite *relation d'équivalence définie par l'action de* H *sur* X. Lorsque le quotient de X par cette relation d'équivalence existe, on le note H\X **177**
(X/H lorsque H opère à droite). Il représente le foncteur covariant suivant : si Z est un objet de $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{H}\backslash\mathrm{X}, \mathrm{Z}) = \{\text{morphismes de X dans Z invariants par H}\}$$

où le morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est dit invariant par H si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le morphisme $\mathrm{X}(\mathrm{S}) \to \mathrm{Z}(\mathrm{S})$ correspondant est invariant sous le groupe H(S).

Lemme 3.2.2. — *Sous les conditions de* 3.2.1*, soit* Y *un sous-objet de* X*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Y *est stable par la relation d'équivalence définie par* H (3.1.5)*;*

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*, le sous-ensemble* Y(S) *de* X(S) *est stable sous* H(S)*;*

(iii) *Il existe un morphisme* f*, nécessairement unique, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \times \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d] \\ \mathrm{H} \times \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X} \end{tikzcd}.$$

Sous ces conditions, f *définit un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\mathrm{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{Y})$$

et la relation d'équivalence définie dans Y *par cette opération de* H *n'est autre que la relation d'équivalence induite dans* Y *par la relation d'équivalence définie dans* X *par l'action de* H.

Démonstration immédiate. On a évidemment un énoncé analogue pour une « opération à droite ». L'opération de H sur Y définie ci-dessus sera appelée opération *induite* dans Y par l'opération donnée de H sur X.

Considérons maintenant la situation suivante : H et G sont deux $\mathscr{C}$-groupes et on **178**
s'est donné un morphisme de groupes

$$u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Alors H opère sur G par translations (on pose ensemblistement $hg = u(h)g$) et y opère *librement* si et seulement si u est un *monomorphisme.* Le quotient de G par cette opération de H est noté, lorsqu'il existe, $H\backslash G$. On définit de même une opération à droite de H sur G et un quotient G/H. Ces quotients sont fonctoriels par rapport aux groupes en cause ; de manière précise, on a le lemme suivant, énoncé pour les quotients à droite :

Lemme 3.2.3. — *Soient* $u : H \to G$ *et* $u' : H' \to G'$ *deux monomorphismes de* $\mathscr{C}$*-groupes. Supposons donné un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes*

$$f : G \longrightarrow G'.$$

Les condition suivantes sont équivalentes :

(i) *f est compatible avec les relations d'équivalences définies dans* G *et* G′ *par* H *et* H′.

(ii) *Pour tout* $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *on a* $fu(H(S)) \subset u'(H'(S))$.

(iii) *Il existe un morphisme* $g : H \to H'$, *nécessairement unique et multiplicatif, tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & H' \arrow[d, "u'"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd} .$$

Sous ces conditions, si les quotients G/H *et* G′/H′ *existent, il existe un morphisme unique* $\overline{f}$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \arrow[d, "p'"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{f}"] & G'/H' \end{tikzcd} .$$

179

La première partie se démontre par réduction au cas ensembliste. La seconde résulte immédiatement de (i).

On pourrait traduire dans la situation présente les notions introduites ci-dessus pour des relations d'équivalences générales. Signalons simplement le lemme suivant dont la démonstration est immédiate par réduction au cas ensembliste :

Lemme 3.2.4. — *Soient* $u : H \to G$ *un monomorphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes et* G′ *un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* G. *Pour que le sous-objet* G′ *de* G *soit stable par la relation d'équivalence définie par* H, *il faut et il suffit que u se factorise par le monomorphisme canonique* $G' \to G$ *et sous cette condition l'opération de* H *sur* G′ *induite par l'opération de* H *sur* G *définie par u n'est autre que l'opération déduite du monomorphisme* $H \to G'$ *factorisant u.*

3.3. Relations d'équivalence effectives universelles

Définition 3.3.1. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. On appelle *relation d'équivalence définie par* f dans X et on note $\mathscr{R}(f)$, la $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X image du monomorphisme canonique
$$\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}.$$

Définition 3.3.2. — Soit R une relation d'équivalence dans X. On dit que R est *effective* si

(i) R est représentable (i.e. est une $\mathscr{C}$-relation d'équivalence) ;

(ii) le quotient $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ existe dans $\mathscr{C}$ [13] ;

(iii) le diagramme 180
$$\mathrm{R} \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} \mathrm{X} \xrightarrow{p} \mathrm{Y}$$
fait de R le carré fibré de X au-dessus de Y, c'est-à-dire R est la relation d'équivalence définie par p.

Scholie 3.3.2.1. — [14] Si R est une relation d'équivalence effective dans X, alors p est un épimorphisme effectif (1.3). Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme effectif, alors $\mathscr{R}(f)$ est une relation d'équivalence effective dans X dont un quotient est Y. Il y a donc une *correspondance* « galoisienne » *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives dans X et quotients effectifs de X (i.e. classes d'équivalence d'épimorphismes effectifs de source X).

Définition 3.3.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *effective universelle* si le quotient $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ existe, et si, pour tout $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$, les produits fibrés $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ existent et R' est un carré fibré de X' au-dessus de Y'. Il revient au même de dire que R est *effective* et que $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est un *épimorphisme effectif universel*.

Scholie 3.3.3.1. — [14] Il y a donc comme ci-dessus correspondance *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives universelles dans X et quotients effectifs universels de X.

Remarque 3.3.3.2. — [14] Supposons que $\mathscr{C}$ soit la catégorie des S-schémas et notons $\mathbb{A}^1$ l'espace affine de dimension 1 sur S. Soient $\mathrm{R} \subset \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ une relation d'équivalence effective universelle et $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le quotient. Alors, pour tout ouvert U de Y, $\mathscr{O}(\mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathbb{A}^1_{\mathrm{S}})$ est l'ensemble des éléments ϕ de $\mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(p^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{A}^1_{\mathrm{S}})$ tels que $\phi \circ \mathrm{pr}_1 = \phi \circ \mathrm{pr}_2$. En particulier, si R est donnée par l'action d'un groupe H opérant librement à droite sur X (cf. 3.2.1), alors $\mathscr{O}(\mathrm{U})$ est l'ensemble des $\phi \in \mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U}))$ tels que $\phi(xh) = \phi(x)$, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$.

---

[13] N.D.E. : On a ajouté « dans $\mathscr{C}$ ».

[14] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.3.2.1 (resp. 3.3.3.1) pour des références ultérieures. D'autre part, on a ajouté la remarque 3.3.3.2.

Proposition 3.3.4. — *Soit* R *une relation d'équivalence effective universelle dans* X. *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme compatible avec* R *donc se factorisant par* $g : \mathrm{X}/\mathrm{R} \to \mathrm{Z}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *g est un monomorphisme ;*

(ii) R *est la relation d'équivalence définie par f.*

En effet, (i) entraîne (ii) trivialement, la réciproque n'est autre que 2.5.

181 ***Définition 3.3.5***. — Soit H un $\mathscr{C}$-groupe opérant librement sur X. On dit que H opère de manière effective, ou que l'opération de H sur X est effective (resp. effective universelle), si la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H est effective (resp. effective universelle).

3.4. (M)-effectivité. — Dans la pratique, il est le plus souvent difficile de caractériser les épimorphismes effectifs universels. On dispose souvent, néanmoins, d'un certain nombre de morphismes de ce type, par exemple en théorie des schémas, des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. Cela conduit aux développements ci-dessous.

3.4.1. — Énonçons d'abord un certain nombre de conditions portant sur une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$:

(a) (M) *est stable par extension de la base*, c.-à-d., tout $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ élément de (M) est quarrable (cf. 1.4.0) et pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $u' : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ est élément de (M).

(b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M).

(c) Tout *isomorphisme* est élément de (M).

(d) Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif*.

Notons que (a) et (b) entraînent :

(a′) Le *produit cartésien* de deux éléments de (M) est dans (M) : Soient $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ deux S-morphismes éléments de (M). Si $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}'$ existe, alors $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ existe et $u \times_{\mathrm{S}} u'$ est élément de (M).

Cela résulte du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Y}' & \mathrm{X}' \arrow[l, "u'"'] \\
\mathrm{X} \arrow[d, "u"'] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u \times_{\mathrm{S}} u'"] \\
\mathrm{Y} & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[l] &
\end{tikzcd}.$$

182 De même (a) et (d) entraînent :

(d′) Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif universel.*

3.4.2. — La famille (M_0) des épimorphismes effectifs universels vérifie les conditions (a) à (d) de 3.4.1. En effet, (a), (c) et (d) sont vérifiés par définition, (b) résulte de 1.8. Dans la suite, nous supposerons donnée une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant ces conditions : nos résultats s'appliqueront donc à la famille (M_0) en particulier.

Définition 3.4.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *de type* (M) si elle est représentable et si $p_1 \in (M)$ (ce qui par (b) et (c) entraîne que $p_2 \in (M)$).

On dit que R est (M)-*effective* si elle est effective et si le morphisme canonique $X \to X/R$ est élément de (M).

On dit que le quotient Y de X est (M)-*effectif* si le morphisme canonique $X \to Y$ est élément de (M).

Il résulte de cette définition les conséquences suivantes : [15]

Proposition 3.4.3.1. — (i) *Une relation d'équivalence* (M)-*effective est de type* (M) *et effective universelle.*

(ii) *Un quotient* (M)-*effectif est effectif universel* (*cf.* 3.3.3).

(iii) *Les applications* $R \mapsto X/R$ *et* $p \mapsto \mathscr{R}(p)$ *réalisent une correspondance biunivoque entre relations d'équivalence* (M)-*effectives dans* X *et quotients* (M)-*effectifs de* X.

(iv) (M_0)-*effectif équivaut à effectif universel.*

Démontrons le point (i). Comme R est (M)-effective, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"] & X/R \end{tikzcd} ,$$

et $p \in (M)$. Alors, d'après 3.4.1 (a), p_1 et p_2 appartiennent à (M), donc R est de type (M).

Posons $Y = X/R$ et soit $Y' \to Y$ un morphisme arbitraire. D'après 3.4.1 (a), les produits fibrés $X' = X \times_Y Y'$ et $R' = R \times_Y Y'$ existent et les morphismes $X' \to Y'$ et $p'_i : R' \to X'$ appartiennent à (M). Enfin, comme $R = X \times_Y X$, on obtient, par associativité du produit fibré :

$$R' = X \underset{Y}{\times} X \underset{Y}{\times} Y' = X' \underset{Y'}{\times} X'.$$

Ceci montre que R′ est (M)-effective ; donc, en particulier, R est effective universelle. Ceci prouve (i), et aussi (iv). Les points (ii) et (iii) en découlent, en tenant compte de la définition 3.3.2.

3.4.4. — Soit H un S-groupe dont le morphisme structural soit élément de (M). Alors 183
si H opère *librement* sur le S-objet X, il y définit une relation d'équivalence de type

[15] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.4.3.1, pour des références ultérieures, et l'on a détaillé la démonstration du point (i).

(M). En effet par (a) le produit fibré $H \times_S X$ existe et $\mathrm{pr}_2 : H \times_S X \to X$ est élément de (M). On dira que l'opération de H est (M)-*effective* si la relation d'équivalence définie dans X par cette opération est (M)-effective.

Proposition 3.4.5 **((M)-effectivité et changement de base).** — *Soit* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X *au-dessus de* S. *Posons* $Y = X/R$. *Soit* $S' \to S$ *un changement de base tel que* $Y' = Y \times_S S'$ *existe. Alors* $X' = X \times_S S'$ *existe,* $R' = R \times_S S'$ *est une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X′ *au-dessus de* S′ *et* $X'/R' \simeq (X/R)'$.

En effet, les morphismes canoniques $X \to Y$ et $R \to Y$ sont éléments de (M), donc par (a′) X′ et R′ sont représentables. Par associativité du produit, R′ est la relation d'équivalence définie dans X′ par le morphisme canonique $X' \to Y'$ qui est élément de (M), d'où la conclusion.

Proposition 3.4.6 **((M)-effectivité et produits cartésiens).** — *Soit* R (*resp.* R′) *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X (*resp.* X′) *au-dessus de* S. *Si* $(X/R) \times_S (X'/R')$ *existe, alors* $X \times_S X'$ *existe,* $R \times_S R'$ *est une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* $X \times_S X'$ *au-dessus de* S *et*

$$(X \underset{S}{\times} X')/(R \underset{S}{\times} R') \simeq (X/R) \underset{S}{\times} (X'/R').$$

Posons $Y = X/R, Y' = X'/R'$. D'après (a′), le produit fibré $X \times_S X'$ existe et le morphisme canonique

$$q : X \underset{S}{\times} X' \to Y \underset{S}{\times} Y'$$

est élément de (M). Or la formule

$$(X \times X') \underset{(Y \times Y')}{\times} (X \times X') \simeq (X \underset{Y}{\times} X) \times (X' \underset{Y'}{\times} X')$$

184 (tous les produits non indicés sont pris sur S) montre que $R \times_S R'$ est la relation d'équivalence définie par q dans $X \times_S X'$, ce qui achève la démonstration.

3.4.7. — [16] Supposons que $\mathscr{C}$ possède un objet final e et soit $f : G \to G'$ un morphisme de $\mathscr{C}$-groupes, tel que $f \in (M)$. Alors, d'après 3.4.1 (a), le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est représentable par $e \times_{G'} G$, et le morphisme $\mathrm{Ker}(f) \to e$ appartient à (M).

D'autre part, la relation d'équivalence définie par f est la même que celle définie par l'action de $\mathrm{Ker}(f)$ (disons, à droite) sur G, c.-à-d., c'est l'image du morphisme $G \times \mathrm{Ker}(f) \to G \times G$, défini ensemblistement par $(g, h) \mapsto (g, gh)$. Par conséquent, on déduit de 3.3.2.1 le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.7.1. — *Supposons que* $\mathscr{C}$ *possède un objet final* e *et soit* $f : G \to G'$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes, tel que* $f \in (M)$. *Alors l'action de* $\mathrm{Ker}(f)$ *sur* G *est* (M)*-effective et* G′ *est le quotient* $G/\mathrm{Ker}(f)$.

[16] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

3.5. Construction de quotients par descente. — Il arrive fréquemment que l'on ne sache pas construire directement un quotient, mais qu'on sache le faire après un changement de base convenable. Le présent numéro donne un critère utile dans cette situation.

On a vu au paragraphe 2.1 la définition d'une donnée de descente sur un objet X' au-dessus de S' relativement à un morphisme $S' \to S$.

Définition 3.5.1. — On dit qu'une donnée de descente sur X' relativement à $S' \to S$ est *effective*, si X' muni de cette donnée de descente est isomorphe à l'image réciproque sur S' d'un objet X au-dessus de S, munie de sa donnée de descente canonique.

Si $S' \to S$ est un morphisme de descente (2.2), alors le X de la définition est unique à isomorphisme unique près. Dire que $S' \to S$ est un morphisme de descente effective (2.2), c'est dire que c'est un morphisme de descente et que toute donnée de descente relativement à ce morphisme est effective.

Considérons maintenant une relation d'équivalence R dans un objet X au-dessus de S. Soient X' (resp. X'', resp. X''') les images inverses de X sur S', $S'' = S' \times_S S'$ et $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ et soient R', R'', R''' les relations d'équivalence déduites de R par image inverse. Supposons que la relation d'équivalence R' dans X' soit (M)-effective, et considérons le quotient $Y' = X'/R'$ qui est un objet au-dessus de S'. Ses deux images inverses sur S'' sont isomorphes à X''/R'' d'après 3.4.5. Le S'-objet Y' est donc muni d'une donnée de recollement canonique. Utilisant de même l'unicité de X'''/R''', on voit que c'est même une *donnée de descente*. (Remarque : on a implicitement supposé dans cette démonstration que tous les produits fibrés écrits existaient, ce qui est le cas en particulier si $S' \to S$ est quarrable, par exemple un morphisme de descente).

Proposition 3.5.2. — *Soit* R *une relation d'équivalence dans l'objet* X *au-dessus de* S. 185
Soit $S' \to S$ *un épimorphisme effectif universel. Supposons que tout* S*-morphisme dont l'image inverse sur* S' *est dans* (M) *soit lui-même dans* (M). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est* (M)*-effective dans* X *;*

(ii) R' *est* (M)*-effective dans* X' *et la donnée de descente canonique sur* X'/R' *est effective.*

S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' *est canoniquement isomorphe à* X/R.

Le fait que (i) entraîne (ii) n'est autre que la traduction dans le langage de la descente de 3.4.4. Si on montre la réciproque, la dernière affirmation de la proposition sera conséquence du fait qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente (2.3), donc que l'« objet descendu » est unique (à isomorphisme unique près).

Démontrons donc (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit Y' le quotient X'/R' et Y l'objet descendu. Comme le morphisme canonique $p' : X' \to X'/R' = Y'$ est compatible par construction avec les données de descente (ses images inverses sur S'' coïncident avec le morphisme canonique $X'' \to X''/R''$), il provient par image inverse sur S' d'un S-morphisme $p : X \to Y$. Comme p' est élément de (M), il résulte de l'hypothèse faite sur le morphisme $S' \to S$ que p est également élément de (M). Comme p' est compatible avec la relation d'équivalence R', p est compatible avec R, toujours parce qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente. On a donc un morphisme

$$\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}.$$

Pour démontrer que R est (M)-effective et que Y est isomorphe à X/R, il suffit de prouver que ce morphisme est un isomorphisme. Or il le devient par extension de la base de S à S', car R' est effective ; c'est donc un isomorphisme pour la même raison que précédemment (2.4).

186 Remarquons que l'hypothèse du texte est vérifiée si on prend pour (M) la famille (M_0) des épimorphismes effectifs universels et si $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés (1.10). On en déduit le

Corollaire 3.5.3. — *Supposons que $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés* (*au-dessus de* S *suffirait*). *Soient* R *une relation d'équivalence dans* X *au-dessus de* S *et* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un épimorphisme effectif universel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est effective universelle dans* X*,*

(ii) R' *est effective universelle dans* X' *et la donnée de descente canonique sur* X'/R' *est effective.*

S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' *est canoniquement isomorphe à* X/R.

4. Topologies et faisceaux

La notion de crible, et la présentation de la notion de topologie (4.2.1) adoptée ici, (plus intrinsèque et plus commode à bien des égards que celle par familles couvrantes de [**MA**]), sont dus à J. Giraud [**AS**].

4.1. Cribles

Définition 4.1.1. — On appelle *crible* de la catégorie $\mathscr{C}$ un sous-foncteur C du foncteur final $\underline{\mathbf{e}} : \mathscr{C}^\circ \to (\mathbf{Ens})$.

À tout crible C de $\mathscr{C}$ on associe l'ensemble E(C) des objets X de $\mathscr{C}$ tels que $\mathrm{C}(\mathrm{X}) \neq \varnothing$, c'est-à-dire tels que le morphisme structural $\mathrm{X} \to \underline{\mathbf{e}}$ se factorise par C. On a donc les équivalences

$$(+) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} \in \mathrm{E}(\mathrm{C}) \Longleftrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{X}) = \underline{\mathbf{e}}(\mathrm{X}) = \{\varnothing\}. \\ \mathrm{X} \notin \mathrm{E}(\mathrm{C}) \Longleftrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{X}) = \varnothing. \end{cases}$$

187 L'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathrm{C})$ jouit de la propriété suivante :

$$(++) \qquad \text{Si } \mathrm{X} \in \mathrm{E} \text{ et si } \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \neq \varnothing, \text{ alors } \mathrm{Y} \in \mathrm{E}.$$

(Remarquons que si on munit l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ de sa *structure de préordre naturelle*, (Y *dominant* X s'il existe une flèche de Y dans X), les ensembles E vérifiant (++)

sont les sous-ensembles de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ qui contiennent tout majorant [17] d'un de leurs éléments.)

Réciproquement, si E est un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ jouissant de la propriété (++), alors E s'écrit de manière unique sous la forme E(C) et C est défini par les formules (+). Il y a donc correspondance biunivoque entre les cribles de $\mathscr{C}$ et les sous-ensembles de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ vérifiant la condition (++). Par *abus de langage*, nous dirons parfois que l'ensemble E(C) est un crible de $\mathscr{C}$.

[18] Soient C et C′ deux cribles de $\mathscr{C}$; comme ce sont deux sous-foncteurs du foncteur final $\underline{\mathrm{e}}$, il revient au même de dire que C *domine* C′ (pour la relation de domination dans $\mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$), ou que C est un *sous-foncteur* de C′, ou encore que $\mathrm{E(C)} \subset \mathrm{E(C')}$; on dira alors que C est *plus fin* que C′. On voit qu'il s'agit dans ce cas d'une structure d'ordre sur l'ensemble des cribles de $\mathscr{C}$. De plus, on a $\mathrm{E(C)} \cap \mathrm{E(C')} = \mathrm{E(C \times C')}$ et donc l'ensemble des cribles de $\mathscr{C}$ est *filtrant* pour la relation d'ordre « être plus fin ».

Tout sous-ensemble E de $\mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, par exemple un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, définit un crible C(E) : l'ensemble des $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, tels que $\mathrm{F(X)} \neq \varnothing$ pour au moins un $\mathrm{F} \in \mathrm{E}$ vérifie la condition (++) et définit le crible cherché.

Ce crible peut aussi être défini comme l'*image* de la famille de morphismes $\{\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{e}}, \mathrm{F} \in \mathrm{E}\}$ au sens de la définition suivante :

Définition 4.1.2. — Soit $\{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$ de même but F. On appelle *image* de cette famille le sous-foncteur de F défini par

$$\mathrm{S} \mapsto \bigcup_i \mathrm{Im}\,\mathrm{F}_i(\mathrm{S}) \subset \mathrm{F(S)}.$$

Proposition 4.1.3. — *La formation de* l'image commute à l'extension de la base *: dans les notations précédentes, désignons par* I *l'image de la famille* $\{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ *; pour tout morphisme* $\mathrm{G} \to \mathrm{F}$ *de* $\widehat{\mathscr{C}}$*, l'image de la famille de morphismes* $\{\mathrm{F}_i \times_{\mathrm{F}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}\}$ *est le sous-foncteur* $\mathrm{I} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{G}$ *de* G.

Définition 4.1.4.0. — [19] Soit C un crible de $\mathscr{C}$. Si E est un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ tel que C(E) = C, on dit que E est une *base* de C. Tout crible C possède une base, **188**
par exemple l'ensemble E(C).

Nous nous proposons de décrire l'ensemble Hom(C, F), où C est un crible de $\mathscr{C}$ et F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, à l'aide d'une base $\{\mathrm{S}_i\}$ de C. Pour chaque couple (i, j), on a un

---

[17] N.D.E. : Ici, « majorant » est pris au sens de la relation de préordre sus-mentionnée, c.-à-d., Y majore X s'il existe une flèche $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. D'autre part, si X, Y sont deux sous-objets d'un objet Z, on dit (cf. 2.4) que Y majore X si $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$. Pour éviter toute ambiguïté entre ces deux terminologies, on a remplacé dans la suite « majorant » par « *dominant* » dans le premier cas, et par « *contenant* », dans le second.

[18] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

[19] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.1.4.0, pour mettre en évidence cette définition.

diagramme dans $\widehat{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd} S_i \times S_j \arrow[r] \arrow[d] & S_i \arrow[d] \\ S_j \arrow[r] & \underline{\mathbf{e}} \end{tikzcd} \quad ,$$

d'où un diagramme d'ensembles

$$\Gamma(F) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, F) \xrightarrow{\ \sigma\ } \prod_i \mathrm{Hom}(S_i, F) \overset{\tau_1}{\underset{\tau_2}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)$$

tel que $\tau_1\sigma = \tau_2\sigma$. On a donc un morphisme

$$\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, F) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)\right).$$

On vérifie immédiatement :

Proposition 4.1.4. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* F

$$\mathrm{Hom}(C, F) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)\right),$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(S_i, F) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times S_j, F)\right) \\ \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C, F) \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd} \quad ,$$

où la dernière ligne est induite par le morphisme canonique $C \to \underline{\mathbf{e}}$*, soit commutatif.*

189 ***Corollaire 4.1.5***. — *Supposons que les produits fibrés* $S_i \times S_j$ *soient représentables, par exemple que les* S_i *soient quarrables. On a alors pour tout* $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$*, un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(C, F) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ker}\left[\prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \times S_j)\right].$$

Remarque 4.1.6. — Soit R un crible de $\mathscr{C}$; désignons par $\mathscr{R}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ dont l'ensemble des objets est E(R) et par

$$i_R : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{C}$$

le foncteur d'inclusion. On a un isomorphisme fonctoriel en $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$

$$\mathrm{Hom}(R, F) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(F \circ i_R)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\underline{e}, \mathrm{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{F}) \arrow[d, "\wr"'] \\ \Gamma(\mathrm{F}) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{F} \circ i_{\mathrm{R}}) \end{tikzcd} ,$$

où la seconde ligne est induite par le foncteur i_{R}, soit commutatif.

Définition 4.1.7. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *crible* de l'objet S de $\mathscr{C}$ un crible de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

Un crible de S est donc un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-objet de S. Il lui correspond canoniquement un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ contenant la source de toute flèche dont il contient le but. Par abus de langage, un tel ensemble sera aussi appelé *crible* de S.

4.2. Topologies : définitions

Définition 4.2.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *topologie* sur $\mathscr{C}$ la donnée pour chaque S de $\mathscr{C}$ d'un ensemble J(S) de cribles de S, appelés *cribles couvrants* ou *raffinements* de S, donnée vérifiant les axiomes suivants : **190**

(T 1) Pour tout raffinement R de S et tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, le crible $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est couvrant (« stabilité par *changement de base* »).

(T 2) Si R, C sont deux cribles de S, si R est couvrant et si pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{R}$, le crible $\mathrm{C} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est couvrant, alors C est un raffinement de S. [20]

(T 3) Si $\mathrm{C} \supset \mathrm{R}$ sont deux cribles de S et si R est couvrant, alors C est couvrant.

(T 4) Pour tout S, S est un raffinement de S.

On peut reformuler ces axiomes de la manière suivante. Supposons donnée une topologie $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{J}(\mathrm{S})$ sur $\mathscr{C}$ et, pour tout objet F de $\widehat{\mathscr{C}}$, notons J(F) l'ensemble des sous-foncteurs R de F tels que pour tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{F}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, où T est *représentable*, $\mathrm{R} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{T}$, qui est un crible de T, soit *couvrant*. En vertu de (T 1), cette notation est bien compatible avec la précédente. On dira également que $\mathrm{R} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$ est un *raffinement* de F. On vérifie immédiatement que les axiomes précédents entraînent les propriétés suivantes :

(T′ 0) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G}$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, et si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{F}$, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{S} \in \mathrm{J}(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 1) Si $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$, et si $\mathrm{H} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$, alors $\mathrm{G} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{H})$.

(T′ 2) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G} \supset \mathrm{H}$ sont trois objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, si $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 3) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G} \supset \mathrm{H}$ sont trois objets de $\widehat{\mathscr{C}}$ et si $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$, alors $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 4) Pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, $\mathrm{F} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

[20] N.D.E. : c'est-à-dire : si C est couvrant « *localement par rapport au crible couvrant* R », alors C est couvrant.

191 Réciproquement, si on se donne pour tout $F \in \operatorname{Ob}\widehat{\mathscr{C}}$ un ensemble $J(F)$ de sous-objets de F vérifiant les propriétés (T′ 0) à (T′ 4), l'application $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur $\mathscr{C}$ et les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

De (T′ 1), (T′ 2) et (T′ 3) [21] résulte la propriété suivante :

(T′ 5) Si G et H sont deux sous-objets de F et si $G, H \in J(F)$, alors $G \cap H \in J(F)$.

L'ensemble J(F), ordonné par la relation $\supset$ est donc *filtrant* ; cette remarque nous servira plus tard.

4.2.2. — On dira que la topologie définie par J est plus fine que la topologie définie par J′ si pour tout $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, $J(S) \supset J'(S)$ (il revient au même de dire que pour tout $F \in \operatorname{Ob}\widehat{\mathscr{C}}$, $J(F) \supset J'(F)$).

Tout ensemble de topologies sur $\mathscr{C}$ possède une borne *inférieure* : soit I un ensemble d'indices, et pour chaque $i \in I$, soit $S \mapsto J_i(S)$ une topologie sur $\mathscr{C}$. Posons $J(S) = \bigcap_{i\in I} J_i(S)$; il est immédiat que l'on a défini ainsi une topologie sur $\mathscr{C}$, et que c'est bien la borne inférieure de l'ensemble donné.

En particulier, donnons-nous pour chaque $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, un ensemble E(S) de cribles de S. On appelle *topologie engendrée* par ces ensembles la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de E(S) soient des raffinements de S pour tout S.

Définition 4.2.3. — Soit $\{F_i \to F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$. Soit $G \subset F$ l'image (4.1.2) de cette famille. La famille est dite *couvrante* si $G \in J(F)$. Un morphisme est dit *couvrant* si la famille réduite à ce morphisme est couvrante.

Cette définition s'applique en particulier à une inclusion : un crible C de S est couvrant si et seulement si le morphisme canonique $C \to S$ est couvrant.

192 Les axiomes (T′ 0) à (T′ 5) entraînent pour les familles couvrantes les propriétés suivantes :

(C 0) Soit $\{F_i \to F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$. Si pour tout changement de base *représentable* $S \to F$, la famille $\{F_i \times_F S \to S\}$ est couvrante, alors la famille initiale l'est aussi.

(C 1) Pour toute famille couvrante $\{F_i \to F\}$ et tout morphisme $G \to F$, la famille $\{F_i \times_F G \to G\}$ est couvrante (« *stabilité par changement de base* »).

(C 2) Si $\{F_i \to F\}$ est une famille couvrante et si, pour chaque i, $\{F_{ij} \to F_i\}$ est une famille couvrante, alors la famille composée $\{F_{ij} \to F\}$ est couvrante (« *stabilité par composition* »).

(C 3) Si $\{G_j \to F\}$ est une famille couvrante, et si $\{F_i \to F\}$ est une famille de morphismes de but F telle que pour chaque j il existe un i tel que $G_j \to F$ se factorise par $F_i \to F$, alors $\{F_i \to F\}$ est couvrante (« *saturation* »).

(C 4) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Noter que (C 2) et (C 3) entraînent aussi :

[21] N.D.E. : (T′ 1) et (T′ 2) suffisent : $G \cap H = G \times_F H$ appartient à J(H), d'après (T′ 1), donc à J(F), d'après (T′ 2).

(C 5) Si $\{F_i \to F\}$ est une famille de morphismes de but F telle qu'il existe une famille couvrante $\{G_j \to F\}$ telle que pour tout j la famille $\{F_i \times_F G_j \to G_j\}$ soit couvrante, alors la famille $\{F_i \to F\}$ est couvrante (« *une famille localement couvrante est couvrante* »).

4.2.4. — Soit réciproquement $\mathscr{C}$ une catégorie *possédant des produits fibrés* et donnons-nous pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ un ensemble de familles de morphismes de $\mathscr{C}$ de but S dites familles *couvrantes*, donnée vérifiant les axiomes (C 1) à (C 4) (donc aussi (C 5) qui en est une conséquence). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, soit J(S) l'ensemble **193**
des cribles de S possédant une base couvrante (ou, ce qui revient au même par (C 3), dont toutes les bases sont couvrantes). Alors $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur $\mathscr{C}$. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

En fait, dans les applications, il est peu pratique de considérer *toutes* les familles couvrantes, car on possède parfois des descriptions assez simples d'un nombre « suffisant » de ces familles. Cela conduit à poser les définitions suivantes.

Définition 4.2.5.0. — [22] Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On suppose donné, pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, un ensemble P(S) de familles de morphismes de $\mathscr{C}$ de but S. On appelle topologie *engendrée* par P la topologie la moins fine pour laquelle les familles données soient couvrantes.

Définition 4.2.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *prétopologie* sur $\mathscr{C}$ la donnée pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ d'un ensemble R(S) de familles de morphismes $\{S_i \to S\}$ de but S dites *couvrantes* pour la prétopologie envisagée, vérifiant les axiomes suivants :

(P 1) Pour toute famille $\{S_i \to S\} \in R(S)$ et tout morphisme $T \to S$, les produits fibrés $S_i \times_S T$ existent et $\{S_i \times_S T \to T\} \in R(T)$.

(P 2) Si $\{S_i \to S\} \in R(S)$ et si pour chaque i, $\{T_{ij} \to S_i\} \in R(S_i)$, alors la famille composée $\{T_{ij} \to S\}$ appartient à R(S).

(P 3) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Proposition 4.2.6. — *Soit pour tout* S, J(S) *l'ensemble des cribles de* S *couvrants pour la topologie engendrée par la prétopologie* R. *Soit* $J_R(S)$ *la partie de* J(S) *formée des cribles définis par les familles de* R(S). *Alors* $J_R(S)$ *est* cofinal *dans* J(S) *: tout raffinement de* S *contient un crible défini par une famille de* R(S).

Soit pour tout S, J′(S) l'ensemble des cribles de S contenant un crible de $J_R(S)$. **194**
On a évidemment $J'(S) \subset J(S)$. Pour montrer que $J(S) = J'(S)$, il suffit de montrer que les J′(S) font une topologie sur $\mathscr{C}$, c'est-à-dire vérifient les axiomes (T 1) à (T 4). Or (T 1), (T 3), (T 4) sont évidemment vérifiés. Il reste à vérifier (T 2). [23]

Soit donc U un élément de J′(S) et C un crible de S ; on suppose que pour tout $T \to U$, le crible $C \times_S T$ est dans J′(T) et il faut prouver que $C \in J'(S)$. Par définition de J′, U contient un raffinement U′ défini par une famille $\{S_i \to S\} \in R(S)$. Comme

[22] N.D.E. : On a mis ici cette définition (placée dans l'original après 4.2.5), car elle sera utilisée en 6.2.1 dans un cadre un peu plus général que celui de 4.2.5.
[23] N.D.E. : dans ce qui suit, on a corrigé des coquilles de l'original.

on a vérifié (T 3), il suffit de prouver que $U' \cap C \in J'(S)$, on peut donc supposer que $U = U'$. Par hypothèse, pour tout i, $C \times_S S_i \in J'(S_i)$; il existe donc pour chaque i une famille couvrante $\{T_{ij} \to S_i\} \in R(S_i)$ telle que $T_{ij} \to S_i$ se factorise par $C \times_S S_i \to S_i$. Le morphisme $T_{ij} \to S$ se factorise donc par $C \to S$, ce qui montre que C contient le crible défini par la famille composée $\{T_{ij} \to S\}$ et on a terminé par (P 2).

Les axiomes (P 1) à (P 3) sont ceux de [**MA**]. Étant donné l'intérêt pratique des prétopologies, nous interpréterons chaque résultat important à l'aide d'une prétopologie définissant la topologie donnée.

Remarque 4.2.7. — On peut introduire une notion un peu plus générale : on donne pour chaque S un ensemble de familles couvrantes vérifiant (P 1), (P 3) et la proposition 4.2.6. Ceci se présente en particulier, lorsque les familles données vérifient (P 1), (P 3) et (C 5). Le lecteur pourra consulter [**D**].

Définition 4.2.8. — Soit $\mathscr{C}$ munie d'une topologie, et soit S un objet de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{P}(S')$ une relation faisant intervenir un argument $S' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/S}$. On suppose que $\mathrm{Hom}(S'', S') \neq \varnothing$ entraîne $\mathscr{P}(S') \Rightarrow \mathscr{P}(S'')$. On dit que $\mathscr{P}$ est vrai *localement sur* S pour la topologie considérée, si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble des $S' \to S$ tels que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai est un raffinement de S

(ii) Il existe un raffinement de S tel que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de ce raffinement.

195 (iii) (Si la topologie donnée est définie par une prétopologie). Il existe une famille couvrante pour cette prétopologie telle que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de cette famille.

Exemple 4.2.9. — Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme. On dira que f est *localement* un isomorphisme s'il existe une famille couvrante $\{S_i \to S\}$ telle que pour tout i, $f \times_S S_i$ soit un isomorphisme. Il revient au même d'exiger qu'il existe un raffinement R de S tel que pour tout $T \to R$, $X(T) \to Y(T)$ soit un isomorphisme.

On verra dans la suite bien d'autres exemples de langage « local ».

4.3. Préfaisceaux, faisceaux, faisceau associé un préfaisceau

Définition 4.3.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *préfaisceau* d'ensembles sur $\mathscr{C}$ tout foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles. La catégorie $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ est appelée *catégorie des préfaisceaux* sur $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie, on dit que le préfaisceau P est *séparé* (resp. est un *faisceau*) si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $R \in J(S)$, l'application canonique

$$(+) \qquad P(S) = \mathrm{Hom}(S, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, P)$$

est *injective* (resp. *bijective*). On appelle *catégorie des faisceaux* et on note $\widetilde{\mathscr{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ dont les objets sont les faisceaux. [24]

[24] N.D.E. : On notera que si Q est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau *séparé* P, alors Q est séparé. En effet, pour tout crible R de S, l'application composée $Q(S) \hookrightarrow P(S) \hookrightarrow P(R)$ est injective et se factorise à travers $Q(S) \to Q(R)$.

Proposition 4.3.2. — *Soit* P *un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*). *Pour tout foncteur* $\mathrm{H} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *et tout* $\mathrm{R} \in \mathrm{J(H)}$, *l'application canonique*

$$(+) \qquad \mathrm{Hom(H,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom(R,P)}$$

est injective (*resp. bijective*).

Soient en effet P un préfaisceau séparé, H un préfaisceau, $\mathrm{R} \in \mathrm{J(H)}$, et $u, v : \mathrm{H} \to \mathrm{P}$ tels que $uj = vj$. Pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S}$ est un raffinement de S et **196**
$ufj_{\mathrm{S}} = vfj_{\mathrm{S}}$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{R} \arrow[r, "j"] & \mathrm{H} \arrow[r, "u,v"] & \mathrm{P} \\
\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \arrow[ur, "f_{\mathrm{R}}"] \arrow[r, "j_{\mathrm{S}}"] & \mathrm{S} \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Comme P est séparé, on en tire $uf = vf$. Ceci étant vrai pour tout S représentable, on a $u = v$.

Supposons maintenant que P soit un faisceau. Soit $g : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$, montrons qu'il se factorise par H. Pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $g \circ f_{\mathrm{R}} : \mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ se factorise de manière *unique* par S, donc définit un morphisme $h : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$, qui est évidemment fonctoriel par rapport à f, par unicité :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \arrow[r, "f_{\mathrm{R}}"] \arrow[d, "j_{\mathrm{S}}"'] & \mathrm{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & \mathrm{P} \\
\mathrm{S} \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend right=60, "h"'] & \mathrm{H} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

On a donc défini pour tout S une application de H(S) dans P(S) fonctorielle en S, donc un morphisme de H dans P qui répond bien aux conditions exigées.

Corollaire 4.3.2.1. — [25] *Soient* R, F *deux* faisceaux. *Si* R *est un raffinement de* F, *alors* R = F.

En effet, supposons que R soit un raffinement de F et notons j l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{F}$. D'après 4.3.2, on a $\mathrm{Hom(F,R)} = \mathrm{End(R)}$, donc il existe $\pi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ tel que $\pi \circ j = \mathrm{id}_{\mathrm{R}}$. On a de même $\mathrm{End(F)} = \mathrm{Hom(R,F)}$, et l'égalité $j \circ \pi \circ j = j$ entraîne $j \circ \pi = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, donc j est un isomorphisme.

Proposition 4.3.3 ([AS], 1.3). — *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie. Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$; *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *notons* J(S) *l'ensemble des cribles* R *de* S *tels que pour tout* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, *l'application*

$$(+) \qquad \mathrm{Hom(T,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{R} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}, \mathrm{P})$$

[25] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

soit injective (*resp. bijective*). *Alors les* J(S) *définissent une topologie sur* $\mathscr{C}$, *i.e. vérifient les axiomes* (T 1) *à* (T 4).

Corollaire 4.3.4. — *Soit pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, K(S) *une famille de cribles vérifiant* (T 1). *Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$. *Pour qu'il soit* séparé (*resp. un* faisceau) *pour la topologie engendrée par les* K(S), *il faut et il suffit que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et tout* $\mathrm{R} \in \mathrm{K(S)}$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom(S,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom(R,P)} \tag{+}$$

soit injective (*resp. bijective*).

197 ***Corollaire 4.3.5***. — *Soit pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) *un ensemble de familles de morphisme de* $\mathscr{C}$ *de but* S, *vérifiant* (P 1) (*par exemple définissant une prétopologie*). *Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$. *Pour que* P *soit* séparé (*resp. un* faisceau) *pour la topologie engendrée par* R, *il faut et il suffit que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et toute famille* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{R(S)}$, *l'application*

$$\mathrm{P(S)} \longrightarrow \prod_i \mathrm{P}(\mathrm{S}_i)$$

soit injective, (*resp. le diagramme*

$$\mathrm{P(S)} \longrightarrow \prod_i \mathrm{P}(\mathrm{S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{P}(\mathrm{S}_i \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_j)$$

soit exact).

Définition 4.3.6. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *topologie canonique* sur $\mathscr{C}$ la topologie la plus fine pour laquelle tous les foncteurs représentables soient des faisceaux.

Corollaire 4.3.7. — *Pour qu'un crible* R *de* S *soit un raffinement pour la topologie canonique, il faut et il suffit que pour tout morphisme* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *de* $\mathscr{C}$ *et tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom(T,X)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{R} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}, \mathrm{X})$$

soit bijective.

Définition 4.3.8. — Un crible couvrant pour la topologie canonique sera dit *crible épimorphique effectif universel.*

Corollaire 4.3.9. — *Une famille épimorphique effective universelle définit un crible épimorphique effectif universel. Réciproquement, toute famille* quarrable *définissant un crible épimorphique effectif universel est épimorphique effective universelle.*

Revenons au cas où $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie arbitraire et passons à la construc-
198 tion du *faisceau associé* à un préfaisceau P. Soit S un objet de $\mathscr{C}$. Si $\mathrm{R} \supset \mathrm{R}'$ sont

deux raffinements de S, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{P}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}(\mathrm{R}',\mathrm{P}) \end{tikzcd} .$$

L'ensemble ordonné J(S) est filtrant comme on l'a déjà remarqué. Comme S est un élément de J(S), on a un morphisme évident

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{P}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathrm{R}\in \mathrm{J(S)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}).$$

Définition 4.3.10.0. — [26] On pose $\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P}) = \varinjlim_{\mathrm{R}\in \mathrm{J(S)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P})$. On vérifie que $\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P})$ dépend fonctoriellement de S, donc définit un foncteur LP par

$$(++) \qquad \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{LP}) = \check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P}) = \varinjlim_{\mathrm{R}\in \mathrm{J(S)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}).$$

On a par construction des morphismes

$$\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{LP}$$
$$z_{\mathrm{R}} : \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{LP}).$$

Lemme 4.3.10. — (i) *Pour tout raffinement* R *de* S *et tout* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] & \mathrm{LP} \\ \mathrm{R} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"'] & \mathrm{S} \arrow[u, "z_{\mathrm{R}}(u)"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) *Pour tout morphisme* $\mathrm{S} \xrightarrow{v} \mathrm{LP}$*, il existe un raffinement* R *de* S *et un morphisme* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ *avec* $v = z_{\mathrm{R}}(u)$. 199

(iii) *Soit* Q *un foncteur et* $u, v : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ *tels que* $\ell_{\mathrm{P}} u = \ell_{\mathrm{P}} v$*. Alors le noyau du couple* (u, v) *est un raffinement de* Q.

(iv) *Soient* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ *et* $u' : \mathrm{R}' \to \mathrm{P}$ *; pour que* $z_{\mathrm{R}}(u) = z_{\mathrm{R}'}(u')$*, il faut et il suffit qu'il existe un raffinement* $\mathrm{R}'' \subset \mathrm{R} \cap \mathrm{R}'$ *de* S *tel que* u *et* u' *coïncident sur* R''.

[26] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.3.10.0 pour des références ultérieures. D'autre part, il résulte de la définition que si $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ est un monomorphisme, il en est de même de $\mathrm{LP} \to \mathrm{LQ}$; donc L « *préserve les monomorphismes* » (voir aussi 4.3.16 pour un résultat plus général : L « *commute aux limites projectives finies* »).

Démonstration (i) : Il faut vérifier que $z_{\mathrm{R}}(u)i_{\mathrm{R}} = \ell_{\mathrm{P}}u$. Pour cela, il suffit de vérifier que les composés de ces deux morphismes avec tout morphisme $\mathrm{T} \xrightarrow{g} \mathrm{R}$, où T est représentable, sont égaux. Or considérons $f = i_{\mathrm{R}}g$ et le produit fibré $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$: [27]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\ell_{\mathrm{P}}"] & \mathrm{LP} \\
\mathrm{R} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"] & \mathrm{S} \arrow[u, "z_{\mathrm{R}}(u)"'] \\
\mathrm{R}' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\sim", "i_{\mathrm{R}'}"'] & \mathrm{T} \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}.$$

Par définition de ℓ_{P}, $\ell_{\mathrm{P}}ug = z_{\mathrm{R}}(u)f$ (c'est le cas particulier de ce qu'on cherche à démontrer dans lequel i_{R} est un isomorphisme), or $z_{\mathrm{R}}(u)f = z_{\mathrm{R}}(u)i_{\mathrm{R}}g$.

(ii) et (iv) ne font que traduire la définition de $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{LP})$ comme limite inductive.

(iii) : Si K désigne le noyau du couple (u, v), pour chaque morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{Q}$ où S est représentable, $\mathrm{K} \times_{\mathrm{Q}} \mathrm{S}$ est un sous-foncteur du noyau du couple de flèches uf, $vf : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$. On est donc ramené, d'après (T′ 0), à démontrer l'assertion dans le cas où $\mathrm{Q} = \mathrm{S}$ est représentable. Mais en ce cas, il résulte de (ii) et (iv) que K contient un raffinement de S donc est un raffinement de S.

200 On vérifie enfin que $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{LP}$ définit un foncteur

$$\mathrm{L} : \widehat{\mathscr{C}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}}$$

et $\mathrm{P} \mapsto \ell_{\mathrm{P}}$ un morphisme de foncteurs

$$\ell : \mathrm{Id}_{\widehat{\mathscr{C}}} \longrightarrow \mathrm{L}.$$

Énonçons maintenant le résultat essentiel :

Proposition 4.3.11. — (i) *Si* P *est un préfaisceau quelconque,* LP *est* séparé *et* $\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est* couvrant (4.2.3).

(ii) *Si* P *est un faisceau,* $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est un isomorphisme.*

(iii) *Pour tout préfaisceau* P *et tout préfaisceau* séparé (*resp.* faisceau) F*, l'application*

$$\mathrm{Hom}(\ell_{\mathrm{P}}, \mathrm{F}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{LP}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F})$$

est injective (*resp.* bijective).

(iv) *Si* P *est* séparé*,* $\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est un* monomorphisme couvrant (*donc* P *est un* raffinement *de* LP)*, et* LP *est un faisceau.*

---

[27] N.D.E. : Notons p la projection $\mathrm{R}' \to \mathrm{R}$. Comme i_{R} est un monomorphisme, on a $p = gi_{\mathrm{R}'}$. Soit g' la section de $i_{\mathrm{R}'}$ définie par g, alors $pg' = g$ et donc $pg'i_{\mathrm{R}'} = gi_{\mathrm{R}'} = p$; ceci entraîne $g'i_{\mathrm{R}'} = \mathrm{id}_{\mathrm{R}'}$ et donc $i_{\mathrm{R}'} : \mathrm{R}' \to \mathrm{T}$ est un isomorphisme, d'inverse g'.

Démonstration : (i) D'abord, $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est couvrant ; en effet, pour tout morphisme $\mathrm{S} \xrightarrow{v} \mathrm{LP}$, il existe, d'après 4.3.10 (i) et (ii), un raffinement R de S tel qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P} \arrow[rr, "\ell_{\mathrm{P}}"] & & \mathrm{LP} \\ & \mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{S} \arrow[u, "v'"'] \arrow[rr, two heads] & & \mathrm{S} \arrow[u, "v"'] \\ \mathrm{R} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[urrr, two heads, "i_{\mathrm{R}}"'] & & & \end{tikzcd} ,$$

donc $\mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ est couvrant. Il en résulte, d'après (C 0), que $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est couvrant.

Si d'autre part deux morphismes $\mathrm{S} \xrightarrow{v_1, v_2} \mathrm{LP}$ induisent le même morphisme d'un raffinement R de S, montrons qu'ils sont égaux. Il existe des raffinements R_i, $i = 1, 2$, et des morphismes $u_i : \mathrm{R}_i \to \mathrm{P}$ tels que $z_{\mathrm{R}_i}(u_i) = v_i$. En prenant R assez petit, on peut supposer que $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}$. Il résulte alors du diagramme commutatif de 4.3.10 (i) que $\ell_{\mathrm{P}} u_1 = \ell_{\mathrm{P}} u_2$. D'après *loc. cit.* (iii), u_1 et u_2 coïncident donc sur un raffinement **201**
de R, donc un raffinement de S, ce qui entraîne que $z_{\mathrm{R}}(u_1) = z_{\mathrm{R}}(u_2)$, par *loc. cit.* (iv).

(ii) est clair, car si P est un faisceau, $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{P}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{P})$ est déjà un isomorphisme pour tout raffinement R de S.

(iii) Soient u et v deux morphismes $\mathrm{LP} \to \mathrm{F}$ tels que $u\ell_{\mathrm{P}} = v\ell_{\mathrm{P}}$. Pour montrer que $u = v$, il suffit de voir que $uf = vf$ pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{LP}$ où S est représentable. Or il existe un raffinement R de S et un morphisme $g : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ avec $f = z_{\mathrm{R}}(g)$. Alors uf et vf coïncident sur R avec $u\ell_{\mathrm{P}} g = v\ell_{\mathrm{P}} g$, donc coïncident sur R. Si F est séparé, on a donc $uf = vf$. Supposons maintenant que F soit un faisceau ; on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] \arrow[d] & \mathrm{LP} \arrow[d] \arrow[dl] \\ \mathrm{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{LF} \end{tikzcd}$$

qui montre que $\mathrm{Hom}(\ell_{\mathrm{P}}, \mathrm{F})$ est surjectif.

(iv) Montrons que si P est séparé, $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est un monomorphisme. Pour cela, il suffit de voir que pour tout couple de morphismes $u, v : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ (où S est représentable) tels que $\ell_{\mathrm{P}} u = \ell_{\mathrm{P}} v$ on a $u = v$. Or *loc. cit.* (iii) montre que u et v coïncident sur un raffinement de S, donc coïncident car P est séparé. Ceci montre que $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est un monomorphisme ; comme il est couvrant d'après (i), on obtient que P est un raffinement de LP.

Montrons enfin que LP est un faisceau. Comme on sait déjà par (i) que c'est un préfaisceau séparé, il suffit de voir que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, tout raffinement R de S et tout morphisme $h : \mathrm{R} \to \mathrm{LP}$, il existe un morphisme $u : \mathrm{S} \to \mathrm{LP}$ avec $ui_{\mathrm{R}} = h$. Or **202**
$\mathrm{R}' = \mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{R}$ est un raffinement de R, car P est un raffinement de LP, donc R' est

un raffinement de S. Posons $u = z_{\mathrm{R}'}(h')$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] & \mathrm{LP} & \\
\mathrm{R}' \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "j"'] & \mathrm{R} \arrow[u, "h"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"'] & \mathrm{S} \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}.$$

On a $ui_{\mathrm{R}'} = \ell_{\mathrm{P}} h' = hj$, d'où $ui_{\mathrm{R}}\, j = hj$. Comme R' est un raffinement de R et comme LP est séparé, 4.3.2 montre que $ui_{\mathrm{R}} = h$.

Corollaire 4.3.12. — [28] *Soient* F *un faisceau et* R *un sous-*$\widehat{\mathscr{C}}$*-objet de* F*. Alors* R *est un préfaisceau séparé,* $\ell_{\mathrm{R}} : \mathrm{R} \to \mathrm{LR}$ *est un monomorphisme couvrant, et l'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "\ell_{\mathrm{R}}"'] & & \mathrm{F} \\
& \mathrm{LR} \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}.$$

Par conséquent, R *est un raffinement de* F *si et seulement si* j *est un isomorphisme.*

On a déjà noté que R est séparé et que j est un monomorphisme, cf. N.D.E. (24) et (26). D'après 4.3.11 (iv), ℓ_{R} est un monomorphisme couvrant. Donc, si j est un isomorphisme, R est un raffinement de F. Réciproquement, si i est couvrant, j l'est aussi, donc est un isomorphisme d'après 4.3.2.1.

Remarque 4.3.13. — Si $\mathrm{J}'(\mathrm{S})$ est un sous-ensemble cofinal de $\mathrm{J}(\mathrm{S})$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{LP}) = \varinjlim_{\mathrm{R}\in\mathrm{J}'(\mathrm{S})} \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{P}).$$

En particulier, soit $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{R}(\mathrm{S})$ une prétopologie engendrant la topologie donnée. Le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes éléments de R(S). En explicitant la formule ci-dessus, on retrouve la construction de [**MA**].

Notons i le foncteur d'inclusion $\widetilde{\mathscr{C}} \to \widehat{\mathscr{C}}$. De la proposition 4.3.11 résulte le théorème suivant :

Théorème 4.3.14. — *Il existe un foncteur unique* $a : \widehat{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathscr{C}} \arrow[r, "\mathrm{L}"] \arrow[d, "a"'] & \widehat{\mathscr{C}} \arrow[d, "\mathrm{L}"] \\
\widetilde{\mathscr{C}} \arrow[r, "i"] & \widehat{\mathscr{C}}
\end{tikzcd},$$

[28] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du corollaire et sa démonstration.

i.e. pour tout préfaisceau P, L(L(P)) *est un faisceau. Les foncteurs* i *et* a *sont adjoints l'un de l'autre : pour tout préfaisceau* P *et tout faisceau* F *on a un isomorphisme fonctoriel en* P *et* F 203

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathrm{P}, i(\mathrm{F})) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}}}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \simeq \mathrm{Hom}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}).$$

Définition 4.3.15. — Le faisceau $a(\mathrm{P})$ est dit *associé* au préfaisceau P.

Remarque 4.3.16. — Comme le foncteur L est construit à l'aide de limites projectives et de limites inductives filtrantes, il *commute* aux *limites projectives finies.* [29]

De plus, si on identifie $\mathrm{L}(\mathrm{P}\times\mathrm{P})$ à $\mathrm{LP}\times\mathrm{LP}$, le morphisme $\ell_{\mathrm{P}\times\mathrm{P}}$ s'identifie à $\ell_{\mathrm{P}}\times\ell_{\mathrm{P}}$. Il en résulte par exemple que si P est un préfaisceau en groupes, LP est aussi muni canoniquement d'une structure de préfaisceau en groupes et le morphisme canonique $\mathrm{P}\to\mathrm{LP}$ est un morphisme de groupes. Il en est de même pour le foncteur a, ce qui montre que si P est un préfaisceau en groupes et F un faisceau en groupes, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(\mathrm{P}, i(\mathrm{F})) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}).$$

Voir [**D**] pour plus de détails.

4.3.17. — Si $\mathscr{V}$ est une catégorie quelconque, on appelle *préfaisceau* sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{V}$. Pour définir les faisceaux à valeurs dans $\mathscr{V}$, il nous faut d'abord rappeler la définition de la *limite projective* d'un foncteur. Si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{V}$ sont deux catégories, et

$$\mathrm{F} : \mathscr{R}^\circ \longrightarrow \mathscr{V}$$

un foncteur contravariant de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{V}$, on note $\varprojlim \mathrm{F}$ l'objet de $\widehat{\mathscr{V}}$ défini de la manière suivante :

$$\varprojlim \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{V}}}(\mathrm{X}, \varprojlim \mathrm{F}) = \varprojlim_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{R}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{F}(\mathrm{U}), \mathrm{X}) = \mathrm{Hom}(c_{\mathrm{X}}, \mathrm{F}),$$

où X est un objet variable de $\mathscr{V}$, où c_{X} dénote le foncteur contravariant de $\mathscr{R}$ dans 204
$\mathscr{V}$ qui envoie chaque objet de $\mathscr{R}$ sur X et chaque flèche de $\mathscr{R}$ sur id_{X}, et où le dernier Hom est pris dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{R}^\circ, \mathscr{V})$. Si $\mathscr{R}$ possède un objet final $\underline{\mathbf{e}}_{\mathscr{R}}$, on a $\varprojlim \mathrm{F} = \mathrm{F}(\underline{\mathbf{e}}_{\mathscr{R}})$. Si $\mathscr{V}$ est la catégorie des ensembles, le foncteur $\varprojlim$ s'identifie au foncteur Γ.

Si S est un objet de $\mathscr{C}$ et R un crible de S, notons $\mathscr{R}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dont l'ensemble d'objets est E(R) et $i_{\mathrm{R}} : \mathscr{R} \to \mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ le foncteur canonique. Si P est un préfaisceau sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$, il définit par restriction un foncteur $\mathrm{P}_{\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^\circ \to \mathscr{V}$. Le foncteur i_{R} induit un morphisme de $\widehat{\mathscr{V}}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}) = \varprojlim \mathrm{P}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \varprojlim(\mathrm{P}_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{R}}).$$

[29] N.D.E. : En particulier, si K est le *noyau* d'un couple de morphismes de préfaisceaux $u, v : \mathrm{Q} \rightrightarrows \mathrm{P}$, alors LK est le noyau de $\mathrm{L}u, \mathrm{L}v : \mathrm{LQ} \rightrightarrows \mathrm{LP}$ (ceci sera utilisé en 4.4.5).

On note $\varprojlim_{\mathrm{R}} \mathrm{P}$ l'objet $\varprojlim(\mathrm{P}_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{R}})$ de $\widehat{\mathscr{V}}$. En vertu de 4.1.6, la définition 4.3.1 se généralise en la

Définition 4.3.18. — Le préfaisceau P sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ est dit *séparé* (resp. un *faisceau*), si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{R} \in \mathrm{J(S)}$, le morphisme canonique de $\widehat{\mathscr{V}}$

$$\mathrm{P(S)} \longrightarrow \varprojlim_{\mathrm{R}} \mathrm{P}$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

Dans le cas où $\mathscr{V}$ est la catégorie (Gr.) des groupes (ou toute autre catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies), on peut voir (cf. [**D**]) qu'il y a équivalence entre les notions suivantes : un préfaisceau sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans (Gr.) dont le préfaisceau d'ensembles sous-jacent est un faisceau, et un groupe dans la catégorie des faisceaux d'ensembles. Compte tenu de
205 ces identifications, nous considèrerons toujours les faisceaux à valeurs dans une catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies, comme des faisceaux d'ensembles, munis dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ de la structure algébrique correspondante.

4.4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Théorème 4.4.1. — (i) *Les limites projectives quelconques existent dans $\widetilde{\mathscr{C}}$; « elles se calculent dans $\widehat{\mathscr{C}}$ », i.e. le foncteur d'inclusion $i : \widetilde{\mathscr{C}} \to \widehat{\mathscr{C}}$ commute aux limites projectives : si (X_α) est un système projectif de faisceaux, le préfaisceau*

$$\varprojlim i(\mathrm{X}_\alpha) : \mathrm{S} \longmapsto \varprojlim \mathrm{X}_\alpha(\mathrm{S})$$

est un faisceau et on a $i(\varprojlim \mathrm{X}_\alpha) = \varprojlim i(\mathrm{X}_\alpha)$.

(ii) *Les limites inductives quelconques existent dans $\widetilde{\mathscr{C}}$: si (X_α) est un système inductif de faisceaux, on a*

$$\varinjlim \mathrm{X}_\alpha = a(\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha))$$

où $\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha)$ est le préfaisceau limite inductive des $i(\mathrm{X}_\alpha)$:

$$\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha) : \mathrm{S} \longmapsto \varinjlim \mathrm{X}_\alpha(\mathrm{S}).$$

(iii) *Le foncteur $a : \widehat{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies.*

Les assertions (i) et (ii) résultent formellement de la formule d'adjonction (4.3.14), et [(30)] la première assertion de (iii) découle de (ii). Enfin, la seconde assertion de (iii) a déjà été signalée dans 4.3.16.

Scholie 4.4.2. — Ce théorème permet d'utiliser la méthode suivante pour démontrer dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ une assertion portant simultanément sur des limites inductives quelconques
206 et des limites projectives finies (par exemple : « tout épimorphisme est effectif universel », cf. plus loin). On commence par démontrer l'assertion correspondante dans la catégorie des ensembles, puis on l'étend « argument par argument » à la catégorie des

[(30)] N.D.E. : On a modifié l'original ici.

préfaisceaux. Ensuite, on utilise le théorème précédent pour passer de la catégorie des préfaisceaux à la catégorie des faisceaux. On verra dans la suite bien des exemples de cette méthode (4.4.3, 4.4.6, 4.4.9, etc.).

Remarquons enfin que les assertions relatives à la catégorie des préfaisceaux sont formellement des corollaires des assertions relatives à la catégorie des faisceaux. Il suffit en effet de prendre comme topologie la topologie la moins fine (« chaotique ») c'est-à-dire la topologie définie par $\mathrm{J(S)} = \{\mathrm{S}\}$ pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; tout foncteur est en effet un faisceau pour cette topologie.

Proposition 4.4.3. — *Soit* $\mathscr{F} = \{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ *une famille de morphismes de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{F}$ *est une famille épimorphique.*

(ii) $\mathscr{F}$ *est une famille épimorphique effective universelle* (1.13)*.*

(iii) $\mathscr{F}$ *est couvrante* (4.2.3)*.*

(iv) *Le faisceau image de* $\mathscr{F}$ (*c'est-à-dire le faisceau associé au préfaisceau image de* $\mathscr{F}$ (4.1.2)) *est* F.

L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de 4.3.12. Les autres équivalences résulteront des lemmes suivants.

Lemme 4.4.4. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* monomorphisme *de faisceaux qui soit un* épimorphisme*. Alors* f *est un isomorphisme.*

Le lemme est d'abord clair dans la catégorie des ensembles. Démontrons le ensuite dans la catégorie des préfaisceaux. Considérons le préfaisceau

$$\mathrm{V} :\ \mathrm{S} \longmapsto \mathrm{Y(S)} \coprod^{\mathrm{X(S)}} \mathrm{Y(S)} \quad ;$$

c'est la somme amalgamée de Y et de Y au-dessous de X dans la catégorie des préfaisceaux. [31] Notons i_1 et i_2 les deux morphismes « coordonnées » $\mathrm{Y} \to \mathrm{V}$. Si $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme dans la catégorie des préfaisceaux, alors $i_1 = i_2$. Dans ce cas, pour chaque S, l'application $\mathrm{X(S)} \to \mathrm{Y(S)}$ est surjective ; comme d'autre part elle est injective, c'est une bijection, et donc $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un isomorphisme. 207

Plaçons-nous enfin dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ des faisceaux. D'après 4.4.1 (ii), la somme amalgamée *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$ des faisceaux Y et Y au-dessous de X est le faisceau Z associé au préfaisceau V. Considérons le diagramme de morphismes :

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Y} \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{V} \xrightarrow{\ \tau\ } \mathrm{Z} = a(\mathrm{V}) \quad .$$

On a $i_1 f = i_2 f$, d'où $\tau i_1 f = \tau i_2 f$, et donc $\tau i_1 = \tau i_2$, puisque f est un épimorphisme *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$. D'après le point (iii) du lemme ci-dessous, le préfaisceau V est séparé, donc τ est un monomorphisme (4.3.11 (iv)). Donc $i_1 = i_2$, et on a vu plus haut que ceci

[31] N.D.E. : On a légèrement modifié la suite de la démonstration.

entraîne que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un isomorphisme. Ceci démontre le lemme 4.4.4, lorsqu'on aura vérifié que V est séparé.

(32) Soit $\mathrm{R}_\varnothing$ le préfaisceau qui à tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ associe l'ensemble vide ; c'est un objet initial de $\widehat{\mathscr{C}}$.

Lemme 4.4.5. — (i) *On suppose que* $\mathrm{R}_\varnothing \notin \mathrm{J(S)}$*, pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*. Si* (X_i) *est une famille de préfaisceaux séparés, le préfaisceau* somme directe $\coprod_i \mathrm{X}_i$ *est séparé.* (33)

(ii) *Considérons une relation d'équivalence dans la catégorie des préfaisceaux :*

$$\mathrm{X} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \mathrm{Y}$$

et soit $w : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *le quotient. Si* X *est un* faisceau *et* Y séparé*, alors* Z *est séparé.*

(iii) *Considérons une* somme amalgamée *dans la catégorie des préfaisceaux, où* u *et* u' *sont des* monomorphismes *:*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Y} \arrow[dr] & \\
\mathrm{X} \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathrm{V} \\
 & \mathrm{Y}' \arrow[ur] &
\end{tikzcd} .$$

Si Y *et* Y' *sont* séparés*, et* X *un* faisceau*, alors* V *est séparé.*

(i) Posons $\mathrm{X} = \coprod_i \mathrm{X}_i$. Soient $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ un raffinement de S, et soient x_1, x_2 deux éléments de X(S) tels que $x_1 \circ \tau = x_2 \circ \tau$; il existe des indices i, j tels que $x_1 \in \mathrm{X}_i(\mathrm{S})$ et $x_2 \in \mathrm{X}_j(\mathrm{S})$. Comme $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}_\varnothing$, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$, avec $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Alors, $x_1 \circ \tau \circ \phi = x_2 \circ \tau \circ \phi$, et comme X(T) est la réunion disjointe des $\mathrm{X}_k(\mathrm{T})$, ceci entraîne $i = j$. Alors, comme X_i est séparé et est un sous-objet de X, l'application $\mathrm{X}_i(\mathrm{S}) \to \mathrm{X}_i(\mathrm{R}) \to \mathrm{X}(\mathrm{R})$ est injective, et donc $x_1 = x_2$. Ceci prouve que X est séparé.

Démontrons (iii). Considérons les morphismes $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{V}$ et $j : \mathrm{Y}' \to \mathrm{V}$, et soit K le noyau de :

$$\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}' \overset{p,q}{\rightrightarrows} \mathrm{V} \qquad ,$$

où $p = i \circ \mathrm{pr}_1$ et $q = j \circ \mathrm{pr}_2$.

Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Comme u et u' sont des monomorphismes, on peut identifier X(S) à son image dans Y(S) (resp. $\mathrm{Y}'(\mathrm{S})$) ; notons Z(S) (resp. $\mathrm{Z}'(\mathrm{S})$) le complémentaire. Alors

(32) N.D.E. : On a corrigé le point (i) du lemme 4.4.5, et détaillé la démonstration des trois points.

(33) N.D.E. : En général, la somme directe de deux faisceaux F, G n'est *pas* un faisceau. En effet, soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; on suppose que la somme directe $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \coprod \mathrm{S}_2$ existe dans $\mathscr{C}$ et que le produit fibré $\mathrm{S}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_2$ est un objet initial $\varnothing$ de $\mathscr{C}$ (cf. I, 1.8). Soit R le crible de S de base $\{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2\}$, alors $(\mathrm{F} \coprod \mathrm{G})(\mathrm{R})$ est la réunion disjointe de $\mathrm{F(S)} \coprod \mathrm{G(S)}$ et de $\mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \times \mathrm{G}(\mathrm{S}_j)$ pour $i \neq j$, donc $\mathrm{F} \coprod \mathrm{G}$ n'est pas un faisceau en général. D'autre part, si $\mathscr{C}$ est la catégorie ayant un seul objet S et id_{S} pour seul morphisme, munie de la topologie définie par $\mathrm{J(S)} = \{\mathrm{R}_\varnothing, \mathrm{S}\}$, alors les seuls préfaisceaux séparés sont $\mathrm{R}_\varnothing$ et $\mathrm{X} = \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ (qui est un faisceau), et $\mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$ n'est pas séparé.

V(S) s'identifie à la réunion disjointe de Z(S), Z′(S) et X(S), et l'on voit facilement que les applications $i(\mathrm{S}) : \mathrm{Y(S)} \to \mathrm{V(S)}$ et $j(\mathrm{S}) : \mathrm{Y'(S)} \to \mathrm{V(S)}$ sont injectives, et que l'application

$$(u \times u')(\mathrm{S}) : \ \mathrm{X(S)} \longrightarrow \mathrm{K(S)}$$

est bijective. Par conséquent, i et j sont des *monomorphismes*, et $u \times u' : \mathrm{X} \to \mathrm{K}$ est un *isomorphisme*.

Posons $\mathrm{U} = \mathrm{Y} \coprod \mathrm{Y}'$, et soit $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ un raffinement de S ; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U(S)} \arrow[r, "\mathrm{U}(\tau)"] \arrow[d] & \mathrm{U(R)} \arrow[d] \\ \mathrm{V(S)} \arrow[r, "\mathrm{V}(\tau)"] & \mathrm{V(R)} \end{tikzcd} \quad .$$

Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{V(S)}$ dont les images dans V(R) coïncident. D'après la définition de V, v_1, v_2 se remontent en des éléments y_1, y_2 de U(S) ; notons z_1, z_2 leurs images dans U(R). Alors z_1, z_2 ont même image dans V(R).

Comme $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{V}$ et $j : \mathrm{Y}' \to \mathrm{V}$ sont des monomorphismes, les applications $\mathrm{Y(R)} \to \mathrm{V(R)}$ et $\mathrm{Y'(R)} \to \mathrm{V(R)}$ sont injectives. Donc, comme Y et Y′ sont séparés, si y_1 et y_2 appartiennent tous deux à Y(S) ou à Y′(S), alors $y_1 = y_2$. Sinon, on peut supposer que $y_1 \in \mathrm{Y(S)}$ et $y_2 \in \mathrm{Y'(S)}$, d'où $z_1 \in \mathrm{Y(R)}$ et $z_2 \in \mathrm{Y'(R)}$. Mais alors, comme $i \circ z_1 = j \circ z_2$, le morphisme $z_1 \boxtimes z_2 : \mathrm{R} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ se factorise à travers $\mathrm{K} = \mathrm{X}$. Comme de plus $\mathrm{X(R)} = \mathrm{X(S)}$ (puisque X est un faisceau), il existe $x \in \mathrm{X(S)}$ tel que $u(x) \circ \tau = z_1 = y_1 \circ \tau$ et $u'(x) \circ \tau = z_2 = y_2 \circ \tau$, d'où, puisque Y et Y′ sont séparés, $u(x) = y_1$ et $u'(x) = y_2$, et donc $v_1 = v_2$. Ceci prouve que V est séparé.

Prouvons (ii). Remarquons d'abord que le morphisme de préfaisceaux

$$\mathrm{X} \xrightarrow{u \boxtimes v} \mathrm{K} \quad ,$$

où K désigne le noyau du couple de morphismes $w \circ \mathrm{pr}_i : \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$, est un *isomorphisme*. En effet, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, X(T) est une relation d'équivalence dans Y(T), de sorte que le diagramme

$$\mathrm{X(T)} \xrightarrow{u \boxtimes v} \mathrm{Y(T)} \times \mathrm{Y(T)} \overset{w \circ \mathrm{pr}_1}{\underset{w \circ \mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{Z(T)}$$

est exact dans la catégorie des ensembles.

Soient maintenant $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $g_1, g_2 : \mathrm{S} \to \mathrm{Z}$ deux morphismes qui coïncident sur un raffinement $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ de S. Puisque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, on a $\mathrm{Z(S)} = \mathrm{Y(S)}/\mathrm{X(S)}$, par construction de Z, et donc il existe des morphismes $f_1, f_2 : \mathrm{S} \to \mathrm{Y}$ tels que $wf_i = g_i$. **208**

Alors, $wf_1\tau = wf_2\tau$ donc, d'après ce qui précède, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ tel que $u\phi = f_1\tau$ et $v\phi = f_2\tau$. Comme X est un faisceau, il existe $\psi : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ tel que $\phi = \psi\tau$, et donc on a dans Y(R) les égalités :

$$u\psi\tau = f_1\tau \qquad , \qquad v\psi\tau = f_2\tau.$$

Comme $Y(S) \to Y(R)$ est injectif (Y étant séparé), ceci entraîne $u\psi = f_1$ et $v\psi = f_2$, d'où il résulte que $g_1 = g_2$. Ceci prouve que Z est séparé.

Lemme 4.4.6. — [34] (i) *Soit* $\{F_i \xrightarrow{f_i} F\}$ *une famille de morphismes de préfaisceaux, et soit* $G \subset F$ *le préfaisceau image. Alors, le diagramme suivant dans* $\widehat{\mathscr{C}}$ *est exact :*

$$\coprod_i F_i \times_G \coprod_j F_j \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i F_i \longrightarrow G$$

c.-à-d., pour tout préfaisceau H*, le diagramme d'ensembles suivant est exact :*

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(G, H) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(F_i, H) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(F_i \times_G F_j, H).$$

(ii) *Toute famille* couvrante *de morphismes de faisceaux est* épimorphique effective universelle.

(i) Soit H un préfaisceau. L'application f^* qui à un morphisme $\phi : G \to H$ associe la famille de morphismes $\phi \circ f_i : F_i \to H$ est injective, car pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\phi(S)$ est déterminée par les $(\phi \circ f_i)(S)$, puisque la famille $f_i(S) : F_i(S) \to G(S)$ est surjective. Il est clair que l'image de f^* est contenue dans $\mathrm{Ker}(p, q)$. Réciproquement, soit $\phi_i : F_i \to H$ une famille de morphismes telle que, pour tout i, j, le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_i \times_G F_j \arrow[r] \arrow[d] & F_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ F_i \arrow[r, "\phi_i"] & H \end{tikzcd} .$$

Alors, pour tout S, l'application $\coprod_i F_i(S) \to H(S)$ se factorise *de façon unique* en une application $\phi(S) : G(S) \to H(S)$, et ceci définit un morphisme $\phi : G \to H$ tel que $f^*(\phi) = (\phi_i)$. Ceci prouve l'exactitude de la suite $(*)$, et le point (i).

Prouvons (ii). Comme la notion de famille couvrante est stable par extension de la base, il suffit de montrer que toute famille couvrante est épimorphique effective. Soit donc $\{F_i \to F\}$ une famille couvrante de morphismes de faisceaux, et soit G le préfaisceau image de cette famille. Comme la famille est couvrante, il en est de même du monomorphisme $G \hookrightarrow F$, donc, d'après 4.3.12, on a $a(G) = F$.

D'autre part, comme $G \hookrightarrow F$ est un monomorphisme, les produits fibrés $F_i \times_G F_j$ et $F_i \times_F F_j$ sont les mêmes. Donc, d'après (i), le diagramme d'ensembles suivant est exact, pour tout *préfaisceau* H :

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}(G, H) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(F_i, H) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(F_i \times_F F_j, H).$$

Si de plus H est un *faisceau*, on a

$$\mathrm{Hom}(G, H) = \mathrm{Hom}(a(G), H) = \mathrm{Hom}(F, H),$$

[34] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du lemme et sa démonstration.

et alors $(**)$ montre que $\{F_i \to F\}$ est bien une famille épimorphique effective dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ des *faisceaux*.

Lemme 4.4.7. — *Toute famille de morphismes de faisceaux* $\{F_i \to F\}$ *se factorise en une famille couvrante* $\{F_i \to G\}$ *et un monomorphisme* $G \to F$.

Il suffit en effet de prendre pour G le faisceau image de la famille donnée. 209

Démonstration de la proposition 4.4.3 : on a vu en 4.4.6 que (iii) $\Rightarrow$ (ii), on a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit enfin $\{F_i \to F\}$ une famille épimorphique ; d'après le lemme 4.4.7, elle se factorise en une famille couvrante suivie d'un monomorphisme. Mais ce dernier étant dominé [35] par une famille épimorphique est un épimorphisme, donc un isomorphisme par 4.4.4.

Remarque 4.4.8. — [36] Comme le préfaisceau image de la famille $\mathscr{F}$ est séparé, la construction du faisceau associé montre que les conditions de la proposition 4.4.3 sont aussi équivalentes aux suivantes :

(v) Pour tout $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, tout $f \in F(S)$ est *localement* dans l'image de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire :

(vi) Pour tout $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ et tout $f \in F(S)$, l'ensemble des $S' \to S$ tels que l'image de f dans $F(S')$ soit dans l'image d'un des $F_i(S')$ est un raffinement de S.

(vii) (Si la topologie est définie par une prétopologie R). Pour tout $S \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ et tout $f \in F(S)$, il existe une famille $\{S_j \to S\} \in R(S)$ telle que pour tout j l'image f_j de f dans $F(S_j)$ soit dans l'image de l'un des $F_i(S_j)$.

Remarque 4.4.8.bis. — Si le faisceau F est *représentable*, les conditions précédentes sont aussi équivalentes à :

(viii) L'ensemble des $T \to F$ ($T \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$), tels qu'il existe un i et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r] & F \\ T \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est un raffinement de F.

En effet, si (viii) est satisfaite, le préfaisceau image des F_i est dominé par [37] un raffinement de F, ce qui entraîne que la famille est couvrante. Réciproquement, on applique (vi) à $\mathrm{id}_F \in F(F)$. 210

Cette condition s'exprime en langage imagé de la manière suivante : localement sur F, il existe un i tel que $F_i \to F$ possède une section. En particulier un morphisme

---

[35] N.D.E. : On rappelle (cf. N.D.E. (17)) qu'on dit qu'un morphisme $g : G \to H$ est *dominé* par une famille de morphismes $F_i \to H$, si cette famille se factorise à travers g.

[36] N.D.E. : Pour être en accord avec des références ultérieures, on a corrigé la numérotation de l'original, qui comportait deux n$^{\text{os}}$ 4.4.7.

[37] N.D.E. : on a remplacé « majore » par : « est dominé par », cf. N.D.E. (17).

$G \to F$, où G est un faisceau et F un faisceau *représentable* sera *couvrant* si et seulement si il possède *localement* (sur F) une *section.*

[38] Les lemmes suivants seront utiles dans VI_B, 8.1 et 8.2.

Lemme 4.4.8.1. — *Soient* $Q \subset P$ *des préfaisceaux en groupes sur* $\mathscr{C}$*,* Q *étant* normal *dans* P*. On suppose que* P *est* séparé*, et que* Q *est un* faisceau*. Alors le préfaisceau en groupes* P/Q *est* séparé*. Par conséquent, on a*

$$a(P/Q) = L(P/Q) = \varinjlim_{R \in J(S)} (P/Q)(R).$$

Il suffit de montrer la première assertion, car la seconde en découle, d'après 4.3.11 (iv) et (ii). Soient $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et R un crible de S, et soit $y \in P(S)/Q(S)$ dont l'image dans $(P/Q)(R)$ est l'identité. Il s'agit de montrer que $y = 1$. Or, par hypothèse, le morphisme $P(S) \to P(R)$ (resp. $Q(S) \to Q(R)$) est injectif (resp. un isomorphisme), et dans le diagramme commutatif ci-dessous, la ligne supérieure est exacte :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Q(S) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & P(S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & P(S)/Q(S) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & Q(R) \arrow[r] & P(R) \arrow[r] & (P/Q)(R) & .
\end{tikzcd}$$

Le résultat en découlera, si l'on montre que la ligne du bas est exacte. Soit $f : R \to P$ dont l'image dans $(P/Q)(R)$ est l'identité, et soit $\phi : T \to R$ avec $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Alors $f \circ \phi$ est l'identité de $(P/Q)(T) = P(T)/Q(T)$, i.e. $f \circ \phi \in Q(T)$. Donc, $\phi \mapsto f \circ \phi$ est une application fonctorielle $R(T) \to Q(T)$, donc définit un morphisme de foncteurs $\pi : R \to Q$ tel que $\pi(\mathrm{id}_R) = f$, d'où $f \in Q(R)$. Ceci prouve l'exactitude de la ligne du bas, et le lemme est démontré.

Lemme 4.4.8.2. — *Soient* $H \subset G$ *des préfaisceaux en groupes sur* $\mathscr{C}$*.*

(i) *Si* H *est* normal *dans* G*, alors* L(H) *est* normal *dans* L(G)*.*

(ii) *Si* H *est* central *dans* G*, alors* L(H) *est* central *dans* L(G)*.*

Soit $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; il faut montrer (cf. I 2.3.6) que $L(H)(S)$ est normal (resp. central) dans $L(G)(S)$. Soient $h \in L(H)(S)$ et $g \in L(G)(S)$, il existe un crible R de S et des éléments $h' \in H(R)$, $g' \in G(R)$, tels que $h = z_R(h')$ et $g = z_R(g')$ (notations de 4.3.10). Comme z_R est un morphisme de groupes, on a $ghg^{-1}h^{-1} = z_R(g'h'g'^{-1}h'^{-1})$.

Dans le cas (i), on a $g'h'g'^{-1}h'^{-1} \in H(R)$, d'où $ghg^{-1}h^{-1} \in LH(S)$; dans le cas (ii), $g'h'g'^{-1}h'^{-1} = 1$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = 1$.

[38] N.D.E. : On a ajouté les lemmes 4.4.8.1 et 4.4.8.2.

Proposition 4.4.9. — *Toute relation d'équivalence dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$ *est* effective universelle (3.3.3) *: soit* R *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X *; alors le faisceau associé au préfaisceau séparé*

$$i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}) : \mathrm{S} \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{S})/\mathrm{R}(\mathrm{S})$$

est un quotient effectif universel de X *par* R.

Soit X/R le faisceau quotient de X par R, qui existe par 4.4.1 (ii) : $\mathrm{X}/\mathrm{R} = a(i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}))$. Il nous faut montrer que $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est un épimorphisme effectif universel, et que le morphisme $f : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}/\mathrm{R}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme. La première assertion a déjà été démontrée (4.4.3). Quant à f, il provient par application du foncteur a du morphisme $i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}) \times_{i(\mathrm{X}/\mathrm{R})} i(\mathrm{X})$ ou, comme $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ est séparé (4.4.5 (ii)) de sorte que $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}/\mathrm{R})$ est un monomorphisme, du morphisme canonique $i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}) \times_{i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})} i(\mathrm{X})$.

On est donc ramené à démontrer la même assertion dans la catégorie des préfaisceaux. Mais $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ est le préfaisceau $\mathrm{S} \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{S})/\mathrm{R}(\mathrm{S})$ et on est ramené à démontrer l'assertion analogue dans la catégorie des ensembles, où elle est immédiate.

Proposition 4.4.10. — *Sous les conditions de* 4.4.9*, soit* Y *un sous-faisceau de* X. *Notons* R_Y *la relation d'équivalence induite dans* Y *par* R. *Alors le morphisme canonique* (3.1.6) **211**

$$\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}$$

est un monomorphisme *: il identifie* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ *à un sous-faisceau de* X/R*, qui est le faisceau*-image *du morphisme composé*

$$\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}.$$

Le morphisme de préfaisceaux

$$i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R}_\mathrm{Y}) = i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R})_{i(\mathrm{Y})} \longrightarrow i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$$

est un monomorphisme. Comme le foncteur a est exact à gauche (4.3.16), il transforme monomorphisme en monomorphisme et donc

$$\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}$$

est un monomorphisme. La dernière assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{X}/\mathrm{R} \end{tikzcd} ,$$

et du fait que $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ est *couvrant*.

En vertu de cette proposition, nous identifierons toujours $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ à un sous-faisceau de X/R.

Proposition 4.4.11. — *Soit* R *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X. *Pour tout sous-faisceau* Y *de* X stable *par* R, *notons* Y' *le quotient* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ *considéré comme un sous-faisceau de* $\mathrm{X}' = \mathrm{X}/\mathrm{R}$. *Alors* $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$, *et les applications* $\mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ *et* $\mathrm{Y}' \longmapsto \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$ *réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux* Y *de* X stables *par* R *et l'ensemble des sous-faisceaux* Y' *de* X'.

212 Si Y' est un sous-faisceau de X', alors $\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$ est un sous-faisceau de X stable par R [39]. Si Y' est obtenu par passage au quotient à partir d'un sous-faisceau Y de X, alors Y est un sous-objet de $\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$. Il suffit donc de montrer que si l'on a deux sous-faisceaux Y et Y_1 de X, stables par R, Y_1 contenant Y, et si les quotients $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ et $\mathrm{Y}_1/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}_1}$ sont identiques, alors $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1$. On est évidemment ramené à démontrer la même assertion dans le cas où $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}$. Notant alors P (resp. Q) le *préfaisceau* $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ (resp. $i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R}_{\mathrm{Y}})$), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{P} \\ \mathrm{Y} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathrm{Q} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, hook] & a(\mathrm{P}) \\ \mathrm{Q} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & a(\mathrm{Q}) \arrow[u, equal] \end{tikzcd} \quad ,$$

et comme $\mathrm{Q} \hookrightarrow a(\mathrm{Q})$ est couvrant (4.3.11), le monomorphisme $\mathrm{Q} \hookrightarrow \mathrm{P}$ est couvrant, donc Q est un raffinement de P. Par changement de base, Y est un raffinement de X. Comme X et Y sont des faisceaux, cela entraîne (4.3.12) $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$.

4.4.12. — En particulier, si Y est un sous-faisceau de X, et si $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$, alors la correspondance précédente définit un sous-faisceau $\overline{\mathrm{Y}}$ de X, stable par R, contenant Y et minimum pour ces propriétés, que l'on appelle le *saturé* de Y pour la relation d'équivalence R.

4.5. Le cas d'une topologie moins fine que la topologie canonique. — D'après 4.3.6 et 4.3.8, les conditions suivantes sont équivalentes pour une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathscr{C}$:

213 (i) $\mathcal{T}$ est *moins fine* que la topologie *canonique* de $\mathscr{C}$.

(ii) Tout préfaisceau *représentable* est un *faisceau* pour $\mathcal{T}$.

(iii) Tout crible couvrant pour $\mathcal{T}$ est épimorphique effectif universel.

Si $\mathcal{T}$ est définie par une *prétopologie* $\mathrm{S} \longmapsto \mathrm{R}(\mathrm{S})$, ces conditions équivalent encore à

(iv) Toute famille appartenant à R(S) est épimorphique effective universelle.

[39] N.D.E. : et l'on a $(\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X})/\mathrm{R} = \mathrm{Y}'$.

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, le foncteur canonique $\mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ se factorise par un foncteur $j_{\mathscr{C}} = j : \mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ (on notera aussi $j(\mathrm{S}) = \widetilde{\mathrm{S}}$ (40)).

Proposition 4.5.1. — *Le foncteur* $j : \mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ *est* pleinement fidèle, commute aux limites projectives *quelconques. Il est en particulier* exact à gauche *et conserve donc les structures algébriques définies par limites projectives finies.*

Cela résulte immédiatement de la considération du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & \widehat{\mathscr{C}} \\ & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} ,$$

et de 4.4.1 (i).

Avant d'exhiber d'autres propriétés du foncteur j, il nous faut définir la topologie induite sur une catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Ne supposant plus nécessairement la topologie donnée moins fine que la topologie canonique, cela se fait de la manière suivante : si C est un crible de T dans $\mathscr{C}$ et si on a un morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, alors C définit naturellement un crible de T dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, noté J(T) (car la définition d'un crible de T ne dépend que de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}} = (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$). Si, par exemple, C est défini par la famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{T}\}$, alors son image dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ est définie par la même famille considérée comme famille de morphismes de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Ceci dit, l'application $\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{J}(\mathrm{T})$ définit une topologie sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dite *topologie induite* par la topologie donnée. Avec les définitions de [**AS**], 2.3, c'est la moins fine des topologies sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ pour laquelle le foncteur canonique

$$i_{\mathrm{S}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

est un *comorphisme* (41). On remarquera que les identifications 214

$$(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} = \mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$$

respectent par définition les topologies.

Proposition 4.5.2. — *Soient* S *un faisceau* représentable *sur* $\mathscr{C}$ *et* $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$. *Pour que* $\mathrm{S}' \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{F})$ *soit un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*) *sur* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, *il faut et il suffit que* F *soit un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*) *sur* $\mathscr{C}$.

Pour tout foncteur P, on a (I 1.4.1)

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F}) = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{S})} \mathrm{Hom}_f(\mathrm{P}, \mathrm{F}). \qquad (42)$$

(40) N.D.E. : et on notera aussi $\mathbf{h}_{\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{S}}$, cf. le premier diagramme commutatif de 4.5.4.

(41) N.D.E. : c.-à-d., tel que pour tout objet $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, tout crible couvrant R′ de $i_{\mathrm{S}}(\mathrm{T} \to \mathrm{S}) = \mathrm{T}$, considéré comme crible de $(\mathrm{T} \to \mathrm{S}) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, est couvrant.

(42) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Soient $S' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $\eta : C' \to S'$ un crible couvrant. Comme S est un faisceau, l'application $f \mapsto f \circ \eta$ établit une bijection $\mathrm{Hom}(S', S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C', S)$. Par conséquent, l'application
$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(S', F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(C', F)$$
se décompose en « réunion disjointe » des applications
$$\mathrm{Hom}_f(S', F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{f\circ\eta}(C', F).$$
La proposition en résulte.

Corollaire 4.5.3. — *La topologie induite sur $\mathscr{C}_{/S}$ par une topologie sur $\mathscr{C}$ moins fine que la topologie canonique de $\mathscr{C}$, est moins fine que la topologie canonique de $\mathscr{C}_{/S}$.*

Corollaire 4.5.4. — *Supposons la topologie donnée sur $\mathscr{C}$ moins fine que la topologie canonique. Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, on a une équivalence de catégories*
$$\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{S}} \to \widetilde{\mathscr{C}_{/S}}.$$
215 *Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près (toutes les flèches non désignées sont des équivalences) :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_{/S} \arrow[r, "(j_{\mathscr{C}})_{/S}"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{S}} \arrow[r, "(i_{\mathscr{C}})_{/\widetilde{S}}"] \arrow[d, "\wr"] & \widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{S}} \arrow[r, "(a_{\mathscr{C}})_{/\widehat{S}}"] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{S}} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathscr{C}_{/S} \arrow[r, "j_{\mathscr{C}_{/S}}"] & \widetilde{\mathscr{C}_{/S}} \arrow[r, "i_{\mathscr{C}_{/S}}"] & \widehat{\mathscr{C}_{/S}} \arrow[r, "a_{\mathscr{C}_{/S}}"] & \widetilde{\mathscr{C}_{/S}}
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
\left(\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{S}}\right)_{/\widetilde{T}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \left(\widetilde{\mathscr{C}_{/S}}\right)_{/\widetilde{T}} \arrow[dr] & \\
 & & \widetilde{\left(\mathscr{C}_{/S}\right)_{/T}} \\
\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{T}} \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{C}_{/T}} \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}.$$

La commutativité des deux premiers carrés résulte de la définition de l'équivalence $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{S}} \to \widetilde{\mathscr{C}_{/S}}$. Pour démontrer la commutativité du dernier, il faut voir que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{S}} \arrow[r, "L'"] \arrow[d] & \widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{S}} \arrow[d] \\
\widehat{\mathscr{C}_{/S}} \arrow[r, "L''"] & \widehat{\mathscr{C}_{/S}}
\end{tikzcd},$$

où L' est la restriction du foncteur $L_{\mathscr{C}}$ à $\widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{S}}$ et L'' le foncteur $L_{\mathscr{C}_{/S}}$; ceci se voit aisément en revenant à la définition des foncteurs L (donnée après 4.3.9). Quant au second diagramme, ce n'est autre que la restriction aux catégories de faisceaux du diagramme correspondant sur les catégories de préfaisceaux (Exposé I, n° 1), qui est commutatif.

Scholie 4.5.5. — Les diverses assertions de ce numéro montrent que dans le cas où la topologie donnée est moins fine que la topologie canonique, on peut identifier $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathscr{C}}$, elle-même sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ et que dans **216**
cette identification, on peut se livrer aux abus de langage, habituels en ce qui concerne $\mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$, justifiés par les commutativités précédentes. Remarquons explicitement que le premier diagramme de 4.5.4 montre que l'on pourra se servir sans précaution spéciale du foncteur a.

Nous verrons dans le numéro suivant que l'identification de $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathscr{C}}$ (contrairement à ce qui se passait pour $\widehat{\mathscr{C}}$), commute à la formation de certaines limites inductives et nous dirons alors comment utiliser ce fait.

À partir de maintenant et sauf mention expresse du contraire, nous supposerons la topologie donnée *moins fine que la topologie canonique* et nous ferons systématiquement les identifications exposées ci-dessus.

Proposition 4.5.6. — *Soient* F *et* G *deux faisceaux au-dessus de* S *et* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un* S-*morphisme. Les conditions suivantes sur* f *sont équivalentes :*

(i) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$.

(ii) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}} = \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte de la description des épimorphismes comme morphismes couvrants (4.4.3) et du fait que, par définition de la topologie induite, ceux-ci sont les mêmes dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}}$.

Proposition 4.5.7. — *Soit* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un morphisme de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*).

(ii) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $f_{\mathrm{S}} : \mathrm{F}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ *est* localement *un monomorphisme* **217**
(*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*), *c'est-à-dire :*

(iii) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *l'ensemble des* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{F}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *est un raffinement de* S.

Si la topologie donnée est définie par une prétopologie R, *ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :*

(iv) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *il existe une famille couvrante* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{R}(\mathrm{S})$ *telle que pour tout* i, $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_i} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*).

Si la catégorie $\mathscr{C}$ possède un objet final e, on peut se contenter de prendre $\mathrm{S} = e$ *dans les conditions* (ii), (iii) *et* (iv).

On a évidemment (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Pour démontrer l'équivalence de (i) et (ii) ainsi que le supplément concernant l'objet final, il faut montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i) et que les notions envisagées sont stables par extension de la base. Démontrons d'abord ce dernier point. Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte du fait que tout épimorphisme de faisceaux est universel (4.4.3).

Montrons enfin que (ii) entraîne (i). Supposons d'abord que $f_{\mathrm{S}} : \mathrm{F}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ soit localement un monomorphisme (resp. un isomorphisme). Il existe alors un crible couvrant C de S tel que pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{C}$, f_{T} soit un monomorphisme, (resp. un isomorphisme). Comme une limite projective de monomorphismes (resp. isomorphismes) en est un, $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}, f)$ sera un monomorphisme (resp. un isomorphisme) (cf. 4.1.4). Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{F}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{C},f)"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{G}) \\ \mathrm{F}(\mathrm{S}) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "f(\mathrm{S})"] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

218 montre alors que $f(\mathrm{S})$ est injectif (resp. bijectif). Supposons enfin que $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ soit localement un épimorphisme et soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ son image. Pour chaque $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$, $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est l'image de $f \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S} : \mathrm{F} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S} \to \mathrm{S}$. Pour montrer que f est un épimorphisme, il faut montrer que H est un raffinement de G, c'est-à-dire que $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est un raffinement de S pour chaque S. Mais comme il en est ainsi après tout changement de base $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ d'un raffinement de S (puisque $f \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est localement couvrant), $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est bien un raffinement de S (Axiome (T 2)).

Corollaire 4.5.8. — *Soient* F *et* G *deux faisceaux au-dessus de* S *et* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un* S-*morphisme. Pour que f soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il le soit* localement *sur* S.

Remarque 4.5.9. — La démonstration de la proposition montre que celle-ci reste valable, pour la partie concernant les monomorphismes (resp. les isomorphismes) lorsqu'on suppose seulement que F est un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) et G un préfaisceau quelconque (resp. un préfaisceau séparé).

Revenons provisoirement au cas d'une topologie *quelconque* et posons une définition.

Définition 4.5.10. — Soit $\mathrm{G} \to \mathrm{F}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que G est un *faisceau relatif* au-dessus de F si pour chaque F-foncteur H et chaque raffinement R de H, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{H},\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{R},\mathrm{G}) \tag{+}$$

est bijective.

La proposition 4.5.2 se généralise aussitôt :

Proposition 4.5.11. — *Si* F *est un faisceau,* G *est un faisceau relatif au-dessus de* F *si et seulement si c'est un faisceau.*

Lemme 4.5.12. — *Dans la situation* $\mathrm{X} \to \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *(où* X, T, S *sont trois objets de* $\widehat{\mathscr{C}}$*), si* X *est un faisceau relatif au-dessus de* T*, alors* $\mathrm{U} = \prod_{\mathrm{T/S}} \mathrm{X}$ *est un faisceau relatif au-dessus de* S. 219

En effet, on a pour tout S-foncteur Y

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathrm{X}).$$

Si C est un crible de Y, alors $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{C}$ est un crible de $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$; on conclut aussitôt.

Corollaire 4.5.13. — *Les préfaisceaux* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{T/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*,* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*, etc., sont des faisceaux lorsque les arguments qui y interviennent en sont aussi.*

En effet, tous ces préfaisceaux sont construits à l'aide de produits fibrés et de préfaisceaux $\prod$ (I 1.7 et II 1). Il suffit donc de vérifier le résultat pour un préfaisceau $\prod_{\mathrm{T/S}} \mathrm{X}$; en ce cas, l'assertion résulte de 4.5.11 et 4.5.12.

4.6. Description du quotient d'un faisceau par une relation d'équivalence

Rappelons que nous supposons la topologie $\mathcal{T}$ donnée moins fine que la topologie canonique.

Proposition 4.6.1. — *Soit* $\mathrm{R} \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} \mathrm{X}$ *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *défini comme suit : pour chaque* S *de* $\mathscr{C}$*,*

$$\mathrm{F(S)} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}\mathrm{S}\textit{-faisceaux } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X_S} \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S}\ ^{(43)}, \textit{ dont le quotient par } \mathrm{R_Z} \\ \textit{est } \mathrm{S}, \textit{ c'est-à-dire tels que le diagramme } \mathrm{R_Z} \rightrightarrows \mathrm{Z} \to \mathrm{S} \textit{ soit exact} \end{array} \right\}.$$

Alors pour tout faisceau Y, Hom(Y, F) *s'identifie à l'ensemble :*

$$\{\textit{sous-}\mathrm{Y}\textit{-faisceaux de } \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{Y} \textit{ et dont le quotient est } \mathrm{Y}\}.$$

En particulier le sous-faisceau R *de* X × X *correspond à un élément* p *de* Hom(X, F) *et le diagramme*

$$\mathrm{R} \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} \mathrm{X} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{F}$$

est exact, donc identifie F *au* faisceau-quotient X/R.

Posons en effet Q = X/R. Pour tout faisceau Y et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{Q})$ 220

(43) N.D.E. : R×S désigne la relation d'équivalence dans X×S définie par $\mathrm{R} \times \mathrm{S}_{\mathrm{diagonal}} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{S} \times \mathrm{S}$, et $\mathrm{R_Z}$ est la relation d'équivalence qu'elle induit dans Z (cf. 3.1.6).

correspondant à une section $s : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{Q} \times \mathrm{Y}$, considérons le diagramme

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R} \times \mathrm{Y} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{Q} \times \mathrm{Y} \\ & \mathrm{Z} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathrm{Y} \arrow[u, hook, "s"'] \end{tikzcd}$$

où le carré est cartésien. Il est immédiat par 4.4.11 que Z est un sous-Y-faisceau de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, stable par $\mathrm{R} \times \mathrm{Y}$, dont le quotient est Y, et que, réciproquement, tout Z de ce type provient d'une unique section de $\mathrm{Q} \times \mathrm{Y}$ sur Y. Prenant d'abord Y représentable, on en tire un isomorphisme $\mathrm{Q} \simeq \mathrm{F}$. Prenant ensuite Y quelconque, on en tire la forme annoncée de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{F})$. Considérant enfin le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{Q}$, on voit aussitôt qu'il correspond au sous-X-faisceau R de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.2. — *Soit* G *un sous*-foncteur *quelconque de* F *tel que* $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ *contienne* R. *Alors le morphisme canonique* $p : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ *se factorise par* G. *Comme p est couvrant* (4.4.9 *et* 4.4.3) *il en résulte que* G *est un* raffinement *de* F. *En particulier, tout sous*-faisceau G *de* F *vérifiant la condition précédente est égal à* F (4.3.12).

4.6.3. — Nous allons maintenant nous intéresser au cas où X et R sont représentables. Introduisons d'abord une terminologie. Outre les conditions (a) à (d) introduites en 3.4.1, nous utiliserons d'autres conditions sur une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ que nous énonçons ci-après, en rappelant les conditions (a) à (c) déjà données, pour être complet.

(a) (M) est stable par *extension de la base.*

(b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M).

(c) Tout *isomorphisme* est élément de (M).

($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) Tout élément de (M) est couvrant. [(44)]

221 ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$) Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathscr{C}$. S'il existe un raffinement R de Y tel que pour tout $\mathrm{Y}' \to \mathrm{R}$, $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}'$ soit élément de (M), alors f est élément de (M).

Rappelons que (a) et (b) entraînent

(a′) Le produit cartésien de deux éléments de (M) est élément de (M).

D'autre part (a) et ($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) entraînent par 4.3.9 :

(d′) Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif universel.

4.6.4. — Les conditions précédentes sont vérifiées par la famille des morphismes couvrants, notée ($\mathrm{M}_{\mathcal{T}}$), lorsque $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés. En effet (cf. 4.2.3), (a) résulte de (C 1), (b) de (C 2), (c) de (C 4), ($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) de la définition, ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$) de (C 5). Les

(44) N.D.E. : On rappelle que $\mathcal{T}$ désigne la topologie donnée sur $\mathscr{C}$, moins fine que la topologie canonique.

résultats que nous allons établir pour une famille vérifiant ces conditions s'appliqueront en particulier à la famille ($\mathrm{M}_{\mathcal{T}}$). En particulier, on pourra prendre pour $\mathcal{T}$ la topologie canonique et pour (M) la famille des épimorphismes effectifs universels.

Lemme 4.6.5. — *Soit* (M) *une famille de morphismes vérifiant les propriétés* (a) *à* ($e_{\mathcal{T}}$) *précédentes. Soit* R *une* $\mathscr{C}$*-relation d'équivalence dans* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*,* de type (M). *Soient* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *le faisceau défini par* X, $\widetilde{\mathrm{R}}$ *la* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *définie par* R *et* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *le faisceau-quotient. Pour que* R *soit* (M)*-effective, il faut et il suffit que* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *soit* représentable. *S'il en est ainsi,* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *est représentable par le quotient* X/R.

Supposons d'abord que R soit (M)-effective et notons Y = X/R. Le morphisme canonique $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est élément de (M), donc couvrant par ($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$). Le morphisme correspondant
$$\widetilde{p} : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$$
est donc un épimorphisme effectif universel de $\widetilde{\mathscr{C}}$ (4.4.3), donc identifie $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ au quotient de $\widetilde{\mathrm{X}}$ par la relation d'équivalence R′ définie dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ par $\widetilde{p}$. Comme le foncteur **222**
canonique $\mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ commute aux produits fibrés, R′ n'est autre que $\widetilde{\mathrm{R}}$, car R est la relation d'équivalence définie par p.

Réciproquement, supposons $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ représentable par un objet Y de $\mathscr{C}$. Soit $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme déduit du morphisme canonique $\widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$; c'est un morphisme couvrant par 4.4.3. Il est clair comme tout à l'heure que R est la relation d'équivalence définie par p. Il ne reste plus qu'à montrer que $p \in$ (M). Or le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p_2"'] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ & \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$
montre que p devient p_2, qui est un élément de (M), après changement de base par le morphisme couvrant p. On conclut par ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$).

Corollaire 4.6.5.1. — [45] *Soit* (M) *vérifiant les propriétés* (a) *à* ($e_{\mathcal{T}}$) *précédentes et soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes, tel que* $f \in$ (M). *On suppose* $\mathrm{Ker}(f)$ *représentable* (ce qui est le cas si $\mathscr{C}$ possède un objet final e). *Alors la relation d'équivalence dans* G *définie par* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$ *est* (M)*-effective et* G′ *représente le faisceau quotient* $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{H}}$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

Ceci résulte de 4.6.5 et 3.4.7.1.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce numéro.

Théorème 4.6.6. — *Soit* (M) *une famille de morphismes vérifiant les axiomes* (a) *à* ($e_{\mathcal{T}}$) *de* 4.6.3. *Soit* R *une* $\mathscr{C}$*-relation d'équivalence* de type (M) (cf. 3.4.3) *dans l'objet* X *de* $\mathscr{C}$. *Considérons le foncteur* $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *défini comme suit :*

$$\mathrm{F(S)} = \{\textit{sous-}\mathrm{S}\textit{-faisceaux } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X_S} \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S} \textit{ dont le quotient par } \mathrm{R_Z} \textit{ est } \mathrm{S}\}.$$

[45] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

Soit F_0 *le sous-foncteur de* F *défini comme suit :* $\mathrm{F}_0(\mathrm{S})$ *est formé des* $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}(\mathrm{S})$ représentables*, c'est-à-dire :*

$$\mathrm{F}_0(\mathrm{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}\textit{-objets } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X}_\mathrm{S} \textit{ stables par } \mathrm{R}\times\mathrm{S}, \textit{ tels que} \\ \mathrm{R}_\mathrm{Z} \textit{ soit } (\mathrm{M})\textit{-effective et ait pour quotient } \mathrm{S} \ \ (\textit{c.-à-d.,} \\ \textit{tels que } \mathrm{Z}\to\mathrm{S} \textit{ appartienne à } (\mathrm{M}) \textit{ et } \mathrm{R}_\mathrm{Z} \simeq \mathrm{Z}\times_\mathrm{S}\mathrm{Z}\,) \end{array} \right\}.$$

Alors :

(i) *Le morphisme* $p \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{F}) = \mathrm{F}(\mathrm{X})$ *défini par le sous-objet* R *de* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ *identifie* F *au* faisceau-quotient *de* X *par* R*.*

223 (ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) F *est représentable.*
b) F_0 *est représentable.*
c) R *est* (M)*-effective.*

Sous ces conditions, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 = \mathrm{X}/\mathrm{R}$.

(iii) *Soit* (N) *une famille de morphismes stable par changement de base, telle que pour toute famille couvrante* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *et toute famille* $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i\}$ *de morphismes de* (N)*, toute donnée de descente sur les* T_i *relative à* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *soit* effective*. Supposons* X *quarrable* (*cf.* 1.6.0) *et le morphisme* $\mathrm{R}\to\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ *élément de* (N)*. Alors* $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$.

Démonstration. (i) a déjà été démontré (4.6.1).

(ii) On a vu l'équivalence de a) et de c) ainsi que l'égalité $\mathrm{F} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$. Il reste à prouver que b) ou c) implique $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$. Remarquons d'abord, comme il est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé, que F_0 est bien un sous-*foncteur* de F ; en effet pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}_0(\mathrm{S})$, le morphisme $\mathrm{Z}\to\mathrm{S}$ est quarrable, donc $\mathrm{Z}\times_\mathrm{S}\mathrm{S}'$ élément de $\mathrm{F}_0(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$. Comme $\mathrm{R}\in\mathrm{F}(\mathrm{X})$ appartient à $\mathrm{F}_0(\mathrm{X})$, 4.6.2 montre que b) implique $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$.

Supposons maintenant c) vérifié et soit Q un objet de $\mathscr{C}$ représentant X/R. Alors, le morphisme $\mathrm{X}\to\mathrm{Q}$ est élément de (M) et, pour tout $\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{Z}\in\mathrm{F}(\mathrm{S})$, le diagramme $(*)$ de 4.6.1 montre que $\mathrm{Z} = \mathrm{S}\times_{(\mathrm{Q}\times\mathrm{S})}\mathrm{X}\times\mathrm{S}$ est représentable, et $\mathrm{Z}\to\mathrm{S}$ appartient à (M), donc $\mathrm{Z}\in\mathrm{F}_0(\mathrm{S})$.

(iii) Soit $f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{F})$ correspondant à $\mathrm{Z}\in\mathrm{F}(\mathrm{S})$. On doit montrer que f se factorise par F_0, c'est-à-dire que Z est représentable. C'est d'abord clair si f se factorise par X en vertu de :

Lemme 4.6.7. — *Soit* $x_0 \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$*. L'image de* x_0 *dans* $\mathrm{F}(\mathrm{S})$ *correspond au sous-faisceau* Z *de* X_S *défini par les deux carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_\mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{X}_\mathrm{S}}\times x_0"] & \mathrm{X}_\mathrm{S}\times_\mathrm{S}\mathrm{X}_\mathrm{S} \arrow[r] & \mathrm{X}\times\mathrm{X} \\ \mathrm{Z} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{R}_\mathrm{S} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{R} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad .$$

224

Ce lemme résulte aussitôt de la description du morphisme $X \to F$.

Revenons à la démonstration du théorème. Si f se factorise par X, alors Z est représentable et, comme $R \to X \times X$ est élément de (N), il en est de même de $Z \to X_S$.

En général, f ne se factorise pas nécessairement par X ; mais, comme $X \to F$ est couvrant (4.4.3), il existe par 4.4.8 (vii) une famille couvrante $\{S_i \to S\}$ et pour chaque i un morphisme $S_i \to X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & F \\ S_i \arrow[u] \arrow[r] & S \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} .$$

D'après ce qui précède, le morphisme $f_i : S_i \to F$ défini par le diagramme précédent appartient à $\mathrm{Hom}(S_i, F_0)$ et correspond au sous-faisceau $Z \times_S S_i$ de X_{S_i}. Le morphisme $Z \times_S S_i \to X_{S_i}$ est élément de (N) et la famille $X_{S_i} \to X_S$ couvrante. Il n'y a donc plus qu'à établir :

Proposition 4.6.8. — *Soient* $\{S_i \to S\}$ *une famille couvrante et* Z *un* faisceau audessus de S*. Supposons que pour chaque* i*, le* S_i*-foncteur* $Z \times_S S_i$ *soit représentable par un objet* T_i*. Alors la famille des* T_i *est munie d'une donnée de descente canonique relative à* $S_i \to S$*. Pour que* Z *soit représentable, il faut et il suffit que cette donnée soit effective ; s'il en est ainsi l'objet « descendu » représente* Z*.*

Remarquons d'abord que d'après 4.4.3, $S_i \to S$ est une famille épimorphique effective universelle dans $\widetilde{\mathscr{C}}$, donc une famille de *descente* dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ (2.3). Si Z est représentable par l'objet T, alors $T \times_S S_i$ (considéré comme faisceau) est isomorphe à $Z \times_S S_i$, donc la donnée de descente sur les T_i est effective et l'objet descendu (unique) est **225**
isomorphe à Z. Réciproquement, supposons que la donnée de descente canonique sur les T_i soit effective et soit T l'objet descendu. Comme la famille $\{S_i \to S\}$ est une famille de descente dans $\widetilde{\mathscr{C}}$, il existe un S-morphisme $T \to Z$ qui par extension de la base à chaque S_i redonne le morphisme canonique $T_i \to Z \times_S S_i$. Ce morphisme est localement un isomorphisme ; comme T et Z sont des faisceaux, il résulte de 4.5.8 que c'est un isomorphisme.

Corollaire 4.6.9. — *Soit* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X*. Pour tout* faisceau F*, l'application*

$$\mathrm{Hom}(X/R, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, F)$$

identifie le premier ensemble à la partie du second formée des morphismes compatibles avec R*.*

Corollaire 4.6.10. — *Soit* $\mathcal{T}'$ *une topologie moins fine que* $\mathcal{T}$*, pour laquelle les morphismes de* (M) *soient couvrants. Sous les conditions de* 4.6.6 (iii)*,* X/R *est aussi le faisceau-quotient de* X *par* R *dans toute topologie intermédiaire entre* $\mathcal{T}'$ *et la topologie canonique.*

Remarque 4.6.11. — Si dans l'énoncé de 4.6.6 (iii), on suppose de plus que, dans les hypothèses du texte, si on note T l'objet descendu, le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est élément de (N), alors les morphismes d'inclusion $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathrm{X_S}$ sont aussi éléments de (N), comme il résulte aussitôt de la construction de Z par descente.

Remarque 4.6.12. — Les implications c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) et c) $\Rightarrow$ $[\mathrm{F}_0 = \mathrm{F} = \mathrm{X}/\mathrm{R}]$ ont été
226 établies sans recourir à la partie « il suffit » du lemme 4.6.5, qui est le seul endroit où l'on utilise la condition $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$. Elles restent donc valables si (M) vérifie seulement les conditions (a) à $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}})$. Un exemple de telle famille (M) est celle des *morphismes quarrables couvrants* (comparer avec 4.6.4). Dans le cas de la topologie canonique, ceux-ci ne sont autres que les épimorphismes effectifs universels. On a donc :

Corollaire 4.6.13. — *Soit* R *une relation d'équivalence* effective universelle *dans* X. *Alors l'objet* X/R *de* $\mathscr{C}$ *est le* faisceau-quotient *de* X *par* R *pour la topologie canonique. Il représente le foncteur suivant :* (X/R)(S) *est l'ensemble des sous-*$\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$*-objets* Z *de* $\mathrm{X_S}$ *stables par* $\mathrm{R} \times \mathrm{S}$ *et tels que la relation d'équivalence induite soit effective universelle et ait comme quotient* S.

De même, pour une topologie quelconque :

Corollaire 4.6.14. — *Soit* (M) *la famille des morphismes* quarrables couvrants. *Si* R *est une relation d'équivalence* (M)-effective *dans* X, *alors l'objet* X/R *de* $\mathscr{C}$ *est le* faisceau-quotient *de* X *par* R *et représente le foncteur* F_0 *de* 4.6.6.

Scholie 4.6.15. — Nous pouvons maintenant apporter les précisions suivantes à 4.5.5. Alors que dans les questions faisant intervenir exclusivement des limites projectives (produits fibrés, structures algébriques, etc.), on peut, d'après les résultats de l'Exposé I et 4.5.5, identifier indifféremment $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathscr{C}}$ ou de $\widehat{\mathscr{C}}$, il n'en est pas de même dans celles qui mêlent limites projectives et inductives. *Dans toutes les questions faisant intervenir à la fois des limites projectives et des limites inductives, en particulier des passages au quotient* (exemple : structure de groupe sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant), *nous considèrerons la catégorie donnée comme plongée dans la catégorie des faisceaux* ; ainsi si R est une $\mathscr{C}$-relation d'équivalence dans l'objet X de $\mathscr{C}$, X/R désignera le *faisceau-quotient* de X par R (désigné antérieurement par $j(\mathrm{X})/j(\mathrm{R})$), donc dans le cas où ce faisceau sera représentable, l'objet qu'il représente. Les résultats précédents montrent que dans les cas
227 les plus importants, un quotient dans $\mathscr{C}$ sera aussi un quotient dans la catégorie des faisceaux ; de toutes façons, nous nous *interdisons* l'emploi de la notation X/R pour un quotient dans $\mathscr{C}$ qui ne coïnciderait pas avec le quotient dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ (par exemple qui ne serait pas universel), modifiant ainsi les définitions du n° 3.

Pour étudier un problème du type ci-dessus, on se place donc d'abord dans la catégorie des faisceaux, où tous les résultats habituels sont valables (cf. n°4.4), puis on particularise les résultat obtenus à la catégorie de départ, en utilisant les résultats du présent numéro et, lorsqu'on en possède, des critères d'effectivité de descente. Nous verrons des exemples de cette méthode dans les numéros suivants.

4.7. Utilisation de critères d'effectivité : théorème d'isomorphie. — Dans ce numéro, nous donnons un exemple d'utilisation de critères d'effectivité. Les données de départ sont une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathscr{C}$ (toujours moins fine que la topologie canonique), une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant les axiomes (a) à $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$ de 4.6.3 et une famille (N) de morphismes de $\mathscr{C}$ susceptible de vérifier les axiomes suivants :

(a) (N) est stable par extension de la base.

$(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ « les morphismes de (N) se descendent par la topologie donnée » ; c'est-à-dire : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, toute famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ et toute famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i\}$ de morphismes de (N), toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ est effective, et si on note T l'objet descendu, le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est élément de (N).

Comme tout élément de (M) est couvrant (condition 4.6.3 $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}})$), $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ entraîne l'axiome suivant : [46]

$(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$ Si $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est élément de (N) et $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_1$ élément de (M), toute donnée de descente sur Y relative à $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_1$ est effective ; si on note Y_1 l'objet descendu, $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{X}_1$ est élément de (N).

Signalons tout de suite un exemple de cette situation, qui sera traité plus tard : $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, $\mathcal{T}$ la topologie fidèlement plate quasi-compacte ; (M) la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, (N) la famille des immersions fermées, ou celle des immersions quasi-compactes. [47]

Rappelons le résultat principal de 4.6.6 (compte tenu de 4.6.11) :

Proposition 4.7.1. — *Si* X *est un objet quarrable de* $\mathscr{C}$, R *une relation d'équivalence* **228**
de type (M) *dans* X, *telle que* $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *soit élément de* (N), (N) *vérifiant* (a) *et* $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$, *alors le faisceau-quotient* X/R *est défini par*

$$(\mathrm{X}/\mathrm{R})(\mathrm{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}\mathrm{S}\textit{-objets } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X}_{\mathrm{S}}, \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S}, \textit{ tels que } \mathrm{Z} \to \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \\ \textit{appartienne à } (\mathrm{N}), \textit{ que } \mathrm{Z} \to \mathrm{S} \textit{ soit couvrant } (\textit{ou élément de } (\mathrm{M})) \\ \textit{et que } \mathrm{R}_{\mathrm{Z}} \simeq \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z} \end{array} \right\}.$$

De plus, on a :

Proposition 4.7.2. — *Soient* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X. *Soit* (N) *une famille de morphismes vérifiant* (a) *et* $(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$.

Pour tout sous-objet Y *de* X, *stable par* R *et tel que* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *appartienne à* (N), *la* **229**
relation d'équivalence induite dans Y *par* R *est* (M)*-effective et le quotient* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y}'$ *est un sous-objet de* $\mathrm{X}' = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *tel que* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ *appartienne à* (N).

L'application $\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Y}'$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-objets* Y *de* X, *stables par* R, *tels que* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *appartienne à* (N), *et l'ensemble des sous-objets* Y' *de* X' *tels que* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ *appartienne à* (N). *L'application réciproque est* $\mathrm{Y}' \mapsto \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$.

---

[46] N.D.E. : On a placé ici l'axiome $(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$ (qui figurait avant la proposition 4.7.2).

[47] N.D.E. : cf. § 6.4, voir aussi VI_{A}, 5.3.1.

Démonstration. Comme R est (M)-effective, le morphisme $X \to X'$ appartient à (M). Soit Y' un sous-objet de X' tel que le morphisme canonique $Y' \to X'$ appartienne à (N). Alors, le sous-objet $Y = Y' \times_{X'} X$ de X est stable par R, et le morphisme $Y \to X$ (resp. $Y \to Y'$) appartient à (N) (resp. à (M)) puisque (N) et (M) sont stables par changement de base. Notons R_Y la relation d'équivalence induite dans Y par R. D'après 4.4.11, le faisceau quotient Y/R_Y est représenté par Y' et donc, d'après 4.6.5, R_Y est (M)-effective.

Réciproquement, montrons que tout sous-objet Y de X, stable par R, tel que le morphisme structural $Y \to X$ appartienne à (N), s'obtient de cette façon. En effet, si Y est stable par R, ses deux images dans $R = X \times_{X'} X$ sont identiques et Y est muni d'une donnée de descente relative à $X \to X'$; le résultat cherché en découle, puisque la famille (N) vérifie l'axiome (f_M).

Corollaire 4.7.3. — *Soient* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X *; on suppose de plus que* $R \to X \times X$ *appartient à* (N)*, où* (N) *vérifie* (a) *et* $(f_{\mathcal{T}})$*. Alors, pour tout* Y *comme dans* 4.7.2*,* $R_Y \to Y \times Y$ *appartient aussi à* (N) *et donc, d'après* 4.7.1*, on a :*

$$(Y/R_Y)(S) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}S\textit{-objets } Z \textit{ de } Y_S\textit{, stables par } R_Y \times S\textit{, tels que } Z \to Y_S \\ \textit{appartienne à } (N) \ (\textit{alors } Z \to X_S \textit{ y appartient aussi}),\textit{ que} \\ Z \to S \textit{ soit couvrant et que } R_Z \cong Z \times_S Z \end{array} \right\}.$$

5. Passage au quotient et structures algébriques

5.1. Fibrés principaux homogènes

Définition 5.1.0. — [48] On rappelle (III 0.1) qu'un objet X à groupe d'opérateurs (à droite) H est dit *formellement principal homogène* [49] sous H si le morphisme canonique (de foncteurs)

$$X \times H \longrightarrow X \times X$$

défini par $(x, h) \mapsto (x, xh)$ est un *isomorphisme*. Il revient au même de dire (cf. *loc. cit.*) que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, X(S) est formellement principal homogène sous H(S), c'est-à-dire vide ou principal homogène sous H(S). En particulier, si on fait opérer H
230 sur lui-même par translations (à droite), H devient formellement principal homogène sous lui-même.

Définition 5.1.1. — L'objet X à groupe d'opérateurs H est dit *trivial* s'il est isomorphe (comme objet à groupe d'opérateurs H) à H sur lequel H opère par translations.

Proposition 5.1.2. — *Soit* X *formellement principal homogène sous* H*. On a un isomorphisme*

$$\Gamma(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{H\text{-obj.}}(H, X)$$

[48] N.D.E. : On a introduit la numérotation 5.1.0, pour y faire référence ultérieurement.

[49] N.D.E. : On dit aussi « pseudo-torseur », cf. EGA IV_4, 16.5.15. D'autre part, la notion plus générale d'objet *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène), est définie dans l'ajout 6.7.1 à la fin de cet Exposé.

d'ensembles principaux homogènes sous $\Gamma(\mathrm{H})$.

À toute section x de X on associe le morphisme de H dans X défini ensemblistement par $h \mapsto xh$. L'assertion énoncée est immédiate, par réduction au cas ensembliste.

Corollaire 5.1.3. — *On a un isomorphisme d'objets à opérateurs* H

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{H-obj.}}(\mathrm{H}, \mathrm{X}).$$

Corollaire 5.1.4. — *Pour qu'un objet à groupe d'opérateurs soit* trivial*, il faut et il suffit qu'il soit formellement principal homogène et qu'il possède une* section*.*

Définition 5.1.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une *topologie*. On dit que le S-objet X à S-groupe d'opérateurs H est *fibré principal homogène* sous H s'il est *localement trivial*, c'est-à-dire si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées : [50]

(i) L'ensemble des $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ tels que (le foncteur) $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ soit trivial sous $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ est un *raffinement* de S.

(ii) Il existe une famille couvrante (pour une prétopologie définissant la topologie **231**
donnée) $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ telle que pour chaque i, le S_i-foncteur $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ à S_i-foncteur-groupe d'opérateurs $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ soit *trivial* (= possède une section sur S_i).

Proposition 5.1.6. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une topologie $\mathcal{T}$. Soit* (M) *une famille de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant les axiomes* (a) *à* ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$) *de* 4.6.3*. Soient* H *un* S*-groupe tel que le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *soit élément de* (M) *et* P *un* S*-objet à* S*-groupe d'opérateurs* H*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est fibré principal homogène sous* H (définition 5.1.5)*.*

(ii) P *est formellement principal homogène sous* H *et le morphisme structural* $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ *est élément de* (M)*.*

(iii) *Il existe un morphisme* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *élément de* (M) *tel que par extension de la base de* S *à* S', P *devienne trivial, c'est-à-dire que* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *soit trivial sous* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*.*

(iv) H *opère librement sur* P*, de manière* (M)*-effective et le quotient* P/H *est isomorphe à* S*.*

Remarquons d'abord que (ii) et (iv) sont équivalents, compte tenu du fait que, dans l'un et l'autre cas, $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est élément de (M), donc quarrable, ce qui assure la représentabilité des produits fibrés $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$. Il est clair que (ii) entraîne (iii), car on peut prendre P lui-même comme S', l'hypothèse que P est formellement principal homogène entraînant que $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est trivial sous $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ (5.1.4), car il a une section (la section diagonale). Il est clair que (iii) entraîne (i), car $\{\mathrm{S}' \to \mathrm{S}\}$ est une famille couvrante, par l'axiome ($d_{\mathcal{T}}$). Il reste donc à montrer que (i) entraîne (ii). Le morphisme de *faisceaux* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est localement un isomorphisme, donc un isomorphisme (4.5.8) ; P est donc formellement principal homogène. Le morphisme structural $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est localement isomorphe au morphisme structural $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ qui est **232**
élément de (M). Il est donc lui-même élément de (M) par ($e_{\mathcal{T}}$).

---

[50] N.D.E. : Dans ce cas, on dit aussi que X est un H-*torseur*.

L'équivalence entre (i) et (iv) se généralise :

Proposition 5.1.7. — *Sous les mêmes hypothèses sur* $\mathscr{C}$ *et* (M), *soient* H *un* S*-groupe et* X *un* S*-objet sur lequel* H *opère (à droite). Supposons le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *élément de* (M). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *opère librement sur* X *et de manière* (M)*-effective.*

(ii) *Il existe un* S*-morphisme* $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *compatible avec la relation d'équivalence définie dans* X *par l'action de* H *et tel que l'opération de* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ *sur* X *au-dessus de* Y *qu'on en déduit fasse de* X *un fibré principal homogène sous* H_{Y} au-dessus de Y.

Sous ces conditions p *identifie* Y *au quotient* X/H.

Si $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme compatible avec l'action de H, alors l'opération de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit définit dans X la même relation d'équivalence que l'action de H, en vertu de la formule

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Y}} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}.$$

La proposition résulte de cette remarque et de l'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (i) précédente.

Corollaire 5.1.7.1. — [51] *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie possédant un objet final, stable par produits fibrés, et munie d'une topologie* $\mathcal{T}$ *moins fine que la topologie canonique. Soient* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes, et* $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(f)$. *On suppose* f couvrant *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

Alors H *représente le faisceau quotient* G/K, *et* f *est un* K_{H}*-torseur.* (N. B. On dira aussi que : « G *est un* K*-torseur au-dessus de* H ».)

En effet, comme f est couvrant, c'est un épimorphisme effectif universel (4.4.3), donc d'après 3.3.3.1, H est le quotient de G par la relation d'équivalence $\mathscr{R}(f) = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{G}$. D'autre part, le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{G}$, $(g, k) \mapsto (g, gk)$ est un isomorphisme d'objets à groupe d'opérateurs $\mathrm{K}_{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{K}_{\mathrm{H}}$ (son inverse étant donné par $(g, g') \mapsto (g, g^{-1}g')$). Donc, d'une part, $\mathscr{R}(f)$ est la relation d'équivalence définie par K ; d'autre part, comme le morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est couvrant, f est un K_{H}-torseur, d'après 5.1.6 (ii) (ou directement d'après la définition 5.1.5 (ii)).

Nous pouvons maintenant préciser le théorème 4.6.6 dans le cas du passage au quotient par un groupe d'opérateurs :

Proposition 5.1.8. — *Dans les hypothèses de* 5.1.7, *notons* F_0 *le foncteur au-dessus de* S *défini comme suit : pour chaque* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{F}_0(\mathrm{S}')$ *est l'ensemble des sous-*S'*-foncteurs* représentables Z *de* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *stables sous* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *et fibrés principaux homogènes sous ce* S'*-groupe pour l'action induite* (3.2.2).

233 (i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'opération de* H *dans* X *est* (M)*-effective et libre* [52].

b) F_0 *est représentable.*

---

[51] N.D.E. : On a ajouté en corollaire ce cas particulier, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans les exposés suivants.
[52] N.D.E. : On a ajouté « et libre ».

Sous ces conditions, on a $F_0 = X/H$.

(ii) *Soit* (N) *une famille de morphismes, stable par changement de base, telle que pour toute famille couvrante* $\{S'_i \to S'\}$ *et toute famille* $\{T_i \to S'_i\}$ *de morphismes de* (N), *toute donnée de descente sur les* T_i *relativement à* $\{S'_i \to S'\}$ *soit effective. Supposons le morphisme* $X \times_S H \to X \times_S X$ *élément de* (N) *et* X *quarrable. Alors l'élément* p *de* $\mathrm{Hom}(X, F_0)$ *correspondant au sous-objet* $X \times_S H$ *de* $X \times_S X$ *identifie* F_0 *au* faisceau-quotient X/H.

5.2. Structures de groupes et passage au quotient. — Nous nous intéressons dans ce numéro aux structures algébriques que l'on peut mettre sur le quotient G/H d'un groupe par un sous-groupe. Nous nous placerons d'abord dans la catégorie des faisceaux sur $\mathscr{C}$ pour une topologie quelconque. En prenant la topologie canonique et en utilisant 4.5.12, nous obtiendrons des résultats pour le passage au quotient effectif universel dans $\mathscr{C}$.

Proposition 5.2.1. — *Soit* $u : H \to G$ *un monomorphisme de faisceaux en groupes. Il existe sur le* faisceau-*quotient* G/H *une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs* G *telle que le morphisme canonique*

$$p : G \longrightarrow G/H$$

soit un morphisme d'objets à groupe d'opérateurs G. *Cette structure est fonctorielle par rapport au couple* (G, H) *: si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "f"] \\ H' \arrow[r] & G' \end{tikzcd},$$

le morphisme $\overline{f} : G/H \to G'/H'$ (3.2.3) *est compatible avec le morphisme* f *sur les* 234
groupes d'opérateurs.

En effet, le faisceau G/H est le faisceau associé au préfaisceau

$$i(G)/i(H) : S \longmapsto G(S)/H(S);$$

comme le foncteur a est exact à gauche, il transforme objets à groupes d'opérateurs en objets à groupe d'opérateurs. Comme le préfaisceau $i(G)/i(H)$ est muni d'une structure d'objet à groupes d'opérateurs $i(G)$, alors $G/H = a(i(G)/i(H))$ est muni d'une structure d'objet à opérateurs $a(i(G)) = G$. Cette structure jouit évidemment de toutes les propriétés énoncées.

Corollaire 5.2.2. — *Soit* $u : H \to G$ *un monomorphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes. Supposons que l'opération de* H *sur* G *soit* effective universelle. *Il existe sur l'*objet-*quotient* $G/H \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs* G *telle que* $p : G \to G/H$ *soit un morphisme d'objets à opérateurs. Cette structure est fonctorielle en le couple* (H, G) (H *opérant de manière effective universelle dans* G), *au sens précédent.*

Proposition 5.2.3. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de faisceaux en groupes identifiant* H *à un sous-faisceau en groupes* invariant *de* G*. Il existe sur le* faisceau-*quotient* G/H *une structure unique de faisceau en groupes telle que le morphisme canonique* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ *soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle en le couple* (H, G) (H *invariant*)*.*

La démonstration est semblable à celle de 5.2.1.

Corollaire 5.2.4. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes identifiant* H *à un sous-groupe* invariant *de* G*. Supposons que l'action de* H *sur* G *soit* effective universelle*. Il existe sur l'*objet-*quotient* $\mathrm{G/H} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *une structure de groupe unique telle que le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ *soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle par rapport au couple* (H, G) (H *invariant,* H *opérant de manière effective universelle*)*.*

235 On peut caractériser la structure de groupe de G/H de manière plus parlante :

Proposition 5.2.5. — *Sous les conditions de* 5.2.4*, soient* K *un* $\mathscr{C}$*-groupe et* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ *un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est un morphisme de groupes compatible avec la relation d'équivalence définie par* H*.*

(ii) f *est un morphisme de groupes induisant le morphisme trivial* $\mathrm{H} \to \mathrm{K}$*.*

(iii) f *se factorise en un morphisme de groupes* $\mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$*.*

En particulier, on a un isomorphisme, fonctoriel en le groupe K

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\text{-gr.}}(\mathrm{G/H}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}) \mid f \circ u = e\}.$$

L'équivalence de (i) et (ii) se démontre ensemblistement. On a évidemment (iii) $\Rightarrow$ (ii). L'équivalence de (iii) et de (ii) résulte de la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{G/H}, \mathrm{K}) \simeq \mathrm{Hom}(i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H}), \mathrm{K})$$

et de la définition de la structure de groupe de G/H.

Remarque 5.2.6. — Dans la situation précédente, si le noyau de f est exactement H, le morphisme $\mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$ qui factorise f est un *monomorphisme.* Cela résulte aussitôt de 3.3.4.

Dans le cas de faisceaux en groupes, on peut préciser 4.4.11 par la

Proposition 5.2.7. — *Soient* G *un faisceau en groupes,* H *un sous-faisceau en groupes*
236 *invariant. Pour tout sous-faisceau en groupes* K *de* G *contenant* H*, soit* K′ *le groupe quotient* K/H *considéré comme un sous-groupe de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G/H}$*.*

On a $\mathrm{K} = \mathrm{K}' \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$*, et les applications* $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{K/H}$ *et* $\mathrm{K}' \mapsto \mathrm{K}' \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$ *réalisent une* bijection *entre l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de* G *contenant* H *et l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de* G′*. Dans cette correspondance, les sous-faisceaux en groupes* invariants *de* G *et de* G′ *se correspondent.*

La première partie résulte facilement de 4.4.11 et de 3.2.4. Il reste à voir que K est invariant dans G si et seulement si K′ est invariant dans G′. Si K est invariant dans G, alors le préfaisceau $i(\mathrm{K})/i(\mathrm{H})$ est invariant dans $i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H})$. Il en est de même des faisceaux associés, en vertu de l'argument habituel. Si réciproquement K′ est invariant dans G′, alors le produit fibré $\mathrm{K} \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$ est invariant dans G, comme on le voit immédiatement.

Si maintenant L est un sous-faisceau en groupes quelconque de G, soit $\overline{\mathrm{L}}$ le saturé de L pour la relation d'équivalence définie par H, on notera aussi $\overline{\mathrm{L}} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$.

Proposition 5.2.8. — *Sous les conditions précédentes,* $\mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$ *est un sous-faisceau en groupes de* G *contenant* H *et l'image de* L *dans* G/H *s'identifie à*

$$(\mathrm{L} \cdot \mathrm{H})/\mathrm{H} \simeq \mathrm{L}/(\mathrm{H} \cap \mathrm{L}).$$

En effet, notons L′ le faisceau image de L dans G/H. C'est un sous-faisceau en groupes de G/H correspondant à $\mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$ dans la correspondance de la proposition précédente. Comme le morphisme $\mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ est couvrant, donc un épimorphisme effectif universel de faisceaux, il résulte de 4.4.9 que L′ s'identifie au quotient de L par le noyau de $\mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ qui n'est évidemment autre que $\mathrm{H} \cap \mathrm{L}$.

Considérons enfin la situation suivante : on a un faisceau en groupes G, un sous-faisceau en groupes K et un sous-faisceau en groupes H de K, invariant dans K. **237**
Définissons d'abord une opération (à droite) du faisceau en groupes $\mathrm{H}\backslash\mathrm{K}$ (= K/H) sur G/H. Le groupe K opère par translations à droite sur G. Comme H est invariant dans K, cette opération est compatible avec la relation d'équivalence définie par l'action de H et définit donc une opération de K sur G/H, c'est-à-dire un morphisme du groupe K° opposé à K dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$. Comme ce dernier est un faisceau (4.5.13) et que ce morphisme est trivial sur H, il se factorise par K/H et définit l'opération cherchée. Comme les opérations de G sur lui-même à droite et à gauche commutent, les opérations de G et de K/H sur G/H *commutent*.

Proposition 5.2.9. — *Sous les conditions précédentes,* K/H *opère librement* (à droite) *dans* G/H *et on a un isomorphisme canonique de faisceaux à groupe d'opérateurs* G

$$(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{K}/\mathrm{H}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}.$$

Lorsque K *est invariant dans* G*, auquel cas* K/H *est invariant dans* G/H (5.2.7)*, cet isomorphisme respecte les structures de groupe des deux membres.*

On a un isomorphisme de préfaisceaux

$$\big(i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H})\big)\big/\big(i(\mathrm{K})/i(\mathrm{H})\big) \xleftarrow{\ \sim\ } i(\mathrm{G})/i(\mathrm{K}),$$

qui respecte les structures d'objets à groupe d'opérateurs $i(\mathrm{G})$. Le résultat annoncé s'obtient en appliquant le foncteur a à cette relation.

Corollaire 5.2.10. — *Soient* G *un $\mathscr{C}$-groupe,* K *un sous-$\mathscr{C}$-groupe de* G*,* H *un sous-$\mathscr{C}$-groupe* invariant *de* K*. Soit* (M) *une famille de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant les axiomes* (a) *à* ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$)*. Supposons l'opération de* H *sur* G (*resp.* K) *à droite* (M)*-effective. Alors* K/H *opère de manière naturelle librement à droite sur* G/H *; cette opération commute à celle de* G*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

238 (i) *L'opération de* K *sur* G *est* (M)-*effective.*

(ii) *L'opération de* K/H *sur* G/H *est* (M)-*effective.*

Sous ces conditions, on a un isomorphisme d'objets [53] *à groupe d'opérateurs* G *:*

$$(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{K}/\mathrm{H}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}.$$

5.3. Utilisation de critères d'effectivité : théorème de Noether. — [54] Soient $\mathscr{C}, \mathcal{T}$ et (M) comme d'habitude. *Soit* (N) *une famille de morphismes vérifiant les axiomes* (a) *et* ($\mathrm{f_M}$) *de* 4.7. Mettant ensemble 5.2.7 et 4.7.2, on obtient :

Proposition 5.3.1. — *Soit* G *un* $\mathscr{C}$*-groupe. Soit* H *un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* G*, invariant et opérant de manière* (M)*-effective dans* G.

Pour tout sous-$\mathscr{C}$*-groupe* K *de* G *contenant* H *et tel que le morphisme* $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *appartienne à* (N), H *opère dans* K *de manière* (M)*-effective et le quotient* $\mathrm{K}/\mathrm{H} = \mathrm{K}'$ *est un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* $\mathrm{G}/\mathrm{H} = \mathrm{G}'$ *tel que le morphisme* $\mathrm{K}' \to \mathrm{G}'$ *appartienne à* (N).

L'application $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{K}'$ *est une* bijection *entre l'ensemble des sous-*$\mathscr{C}$*-groupes* K *de* G*, contenant* H *et tels que* $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *appartienne à* (N) *et l'ensemble des sous-*$\mathscr{C}$*-groupes* K' *de* G' *tels que* $\mathrm{K}' \to \mathrm{G}'$ *appartienne à* (N). *L'application réciproque est* $\mathrm{K}' \mapsto \mathrm{K} \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$. *Dans cette correspondance, les sous-groupes invariants de* G *et de* G' *se correspondent.*

Corollaire 5.3.2. — *Si* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *est élément de* (N)*, alors* $\mathscr{C}$ *possède un objet final* e *et la section unité* $e \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est élément de* (N). [55]

6. Topologies dans la catégorie des schémas

239 **6.1. La topologie de Zariski.** — C'est la topologie engendrée par la prétopologie suivante : une famille de morphismes $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ est couvrante si chaque morphisme est une immersion ouverte et si la réunion des images des S_i est S tout entier. On la note (Zar).

Définition 6.1.1. — Un faisceau pour la topologie de Zariski est aussi appelé *foncteur de nature locale* : c'est un foncteur contravariant de (**Sch**) dans (**Ens**) tel que pour tout schéma S et tout recouvrement de S par des ouverts S_i, on ait un diagramme exact :

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \to \prod_i \mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{F}(\mathrm{S}_i \cap \mathrm{S}_j).$$

En particulier, un foncteur de nature locale *transforme sommes directes en produits.* Comme tout foncteur représentable est un faisceau, cette topologie est moins fine que la topologie canonique.

---

[53] N.D.E. : de $\mathscr{C}$

[54] N.D.E. : En fait, les isomorphismes établis dans 5.2.8 à 5.2.10 mériteraient d'être appelés « théorèmes d'isomorphisme de Noether ».

[55] N.D.E. : Ceci résulte de la proposition appliquée à K = H.

Au point de vue terminologie, chaque fois que nous dirons « local », « localement », sans précisions, ce sera par référence à la topologie de Zariski, donc au sens habituel.

6.2. Un procédé de construction de topologies

Proposition 6.2.1. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathscr{C}'$ une sous-catégorie pleine,* P *un ensemble de familles de morphismes de $\mathscr{C}$ de même but, stable par changement de base et par composition* (*i.e. vérifiant les axiomes* (P 1) *et* (P 2) *de* 4.2.5), P' *un ensemble de familles de morphismes de $\mathscr{C}'$ contenant les familles réduites à un isomorphisme identique. On munit $\mathscr{C}$ de la topologie engendrée par* P *et* P' (*cf.* 4.2.5.0) *et l'on suppose vérifiées les trois conditions ci-dessous :*

(a) *Si* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ (*donc* $\mathrm{S}_i, \mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$) *et si* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *est un morphisme de* $\mathscr{C}'$*, alors les produits fibrés* $\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ (*dans* $\mathscr{C}$) *existent et la famille* $\{\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{T}\}$ **240**
appartient à P' (*donc* $\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$). (Remarque : cette condition entraîne que P' est stable par changement de base dans $\mathscr{C}'$, mais ne lui est pas équivalente, car elle suppose de plus que le foncteur d'inclusion de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ commute à certains produits fibrés).

(b) *Pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*, il existe* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}$ *avec* $\mathrm{S}_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *pour chaque* i.

(c) *Dans la situation suivante :*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{S}_{ijk} \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\ \mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P}')"'] & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l, "(\mathrm{P})"'] \\ \mathrm{S} & \end{tikzcd} \quad ,$$

où S, S_i, S_{ij}, $\mathrm{S}_{ijk} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *;* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ *;* $\{\mathrm{S}_{ij} \to \mathrm{S}_i\} \in \mathrm{P}$ *pour chaque* i *;* $\{\mathrm{S}_{ijk} \to \mathrm{S}_{ij}\} \in \mathrm{P}'$ *pour chaque* ij*, il existe une famille* $\{\mathrm{T}_n \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ *et pour chaque* n *un multi-indice* (ijk) *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}_{ijk} \arrow[dr] & & \mathrm{T}_n \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} \quad .$$

Alors, pour qu'un crible R *de* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *soit* couvrant*, il faut et il suffit qu'il existe une famille composée*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[d] & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l, dashed] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}_i \arrow[l, "(\mathrm{P})"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_{ij} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$, $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}, \{\mathrm{S}_{ij} \to \mathrm{S}_i\} \in \mathrm{P}'$ *pour chaque* i, *et que les morphismes* $\mathrm{S}_{ij} \to \mathrm{S}$ *obtenus se factorisent par* R (*en d'autres termes que le crible engendré par cette famille composée soit contenu dans* R).

241 *Démonstration.* Les familles éléments de P et de P′ étant couvrantes, une famille composée de telles familles le sera aussi (C 2), donc un crible de la forme indiquée sera couvrant, car contenant un crible couvrant.

Réciproquement, il suffit de voir que les cribles de cette forme forment bien une topologie, i.e. il suffit de vérifier les axiomes (T 1) à (T 4) de 4.2.1.

Axiome (T 4). Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Il existe d'après (b) une famille $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}$ avec $\mathrm{S}_i \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}'$. Les familles $\{\mathrm{S}_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{S}_i}} \mathrm{S}_i\}$ sont éléments de P′ par hypothèse. Le crible S de S est donc de la forme voulue :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_i \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}", "(\mathrm{P}')"'] & \mathrm{S} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{S}}"] \\
\mathrm{S}_i \arrow[r, "(\mathrm{P})"] & \mathrm{S}
\end{tikzcd} .$$

Axiome (T 3). Évident.

Axiome (T 2). Soit R un crible de S de la forme voulue et soit C un crible [56] de S tel que, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ se factorisant par R, le crible $\mathrm{C} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T soit de la forme voulue. Alors, comme $\mathrm{S}_{ij} \to \mathrm{S}$ se factorise par R, le crible $\mathrm{C}_{ij} = \mathrm{C} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{ij}$ de S_{ij} :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{S}_{ij} \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \arrow[ddl] & \mathrm{C}_{ij} \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \\
& \mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P})"] & \\
\mathrm{R} \arrow[r, hook] & \mathrm{S} & \mathrm{C} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

est de la forme voulue ; donc, pour chaque ij, on a un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_{ijkl} \arrow[d, "(\mathrm{P}')"'] \arrow[ddr] & \\
\mathrm{S}_{ijk} \arrow[d, "(\mathrm{P})"'] & \\
\mathrm{S}_{ij} & \mathrm{C}_{ij} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} .$$

(56) N.D.E. : On a corrigé l'original ici.

On a donc prouvé qu'il existe une famille composée

$$\mathrm{S}_{ijkl} \xrightarrow{(\mathrm{P}')} \mathrm{S}_{ijk} \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathrm{S}_{ij} \xrightarrow{(\mathrm{P}')} \mathrm{S}_i \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathrm{S}$$

appartenant à $\mathrm{P} \circ \mathrm{P}' \circ \mathrm{P} \circ \mathrm{P}'$, se factorisant par C et où tous les objets autres que S sont dans $\mathscr{C}'$. Appliquant la condition (c) à chaque famille $\{\mathrm{S}_{ijkl} \to \mathrm{S}_i\}$, on en déduit **242** qu'il existe pour chaque i une famille $\{\mathrm{T}_{in} \to \mathrm{S}_i\} \in \mathrm{P}'$, telle que $\mathrm{T}_{in} \to \mathrm{S}$ se factorise par l'un des S_{ijkl}, donc par C :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{in} \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"'] & \mathrm{S}_{ijkl} \arrow[dd] \\
\mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P})"'] & \\
\mathrm{S} & \mathrm{C} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} .$$

Le crible C de S est donc de la forme voulue, ce qui achève la vérification.

Axiome (T 1). Soit R un crible de S de la forme donnée et soit $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un morphisme de $\mathscr{C}$. Montrons que le crible $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est de la forme voulue.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{S}_{ij} \arrow[dl] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] & & \mathrm{U}_{ikj} \arrow[ll] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
 & \mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P})"] & \mathrm{T}_i \arrow[l] \arrow[d, "(\mathrm{P})"] & \mathrm{U}_{ik} \arrow[l, "(\mathrm{P})"'] \arrow[dl, "(\mathrm{P})"] \\
\mathrm{R} \arrow[r, hook] & \mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l] &
\end{tikzcd} .$$

Soit $\mathrm{T}_i = \mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$. La famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{T}\}$ appartient à P (par (P 1)). Appliquant (b), on construit des $\{\mathrm{U}_{ik} \to \mathrm{T}_i\} \in \mathrm{P}$, avec les $\mathrm{U}_{ik} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$. Par hypothèse (condition (P 2) sur P), on a $\{\mathrm{U}_{ik} \to \mathrm{T}\} \in \mathrm{P}$. D'après (a), $\mathrm{U}_{ik} \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_{ij} = \mathrm{U}_{ikj}$ est objet de $\mathscr{C}'$ et pour chaque ik, $\{\mathrm{U}_{ikj} \to \mathrm{U}_{ik}\} \in \mathrm{P}'$. Alors, le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[d] & & \mathrm{U}_{ikj} \arrow[ll] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
\mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l] & \mathrm{U}_{ik} \arrow[l, "(\mathrm{P})"']
\end{tikzcd}$$

montre que les morphismes $\mathrm{U}_{ijk} \to \mathrm{T}$ se factorisent par le crible $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{R}$ de T, qui est donc de la forme voulue, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 6.2.2. — *Si* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *et si* R *est un crible de* S, R *est couvrant si et seulement si il existe une famille* $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$, *se factorisant par* R.

243 En effet, un tel crible est couvrant. D'autre part il suffit d'appliquer (c) en prenant la famille $\{S_i \to S\}$ réduite à l'isomorphisme identique de S pour déduire de la proposition qu'un crible couvrant est de la forme indiquée.

Corollaire 6.2.3. — *Pour qu'un préfaisceau* F *sur* $\mathscr{C}$ *soit séparé* (*resp. un faisceau*), *il faut et il suffit que le morphisme*

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i)$$

soit injectif (*resp. que le diagramme*

$$F(S) \longrightarrow \prod_i F(S_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(S_i \underset{S}{\times} S_j)$$

soit exact) *dans les deux cas suivants :*

(i) $\{S_i \to S\} \in P$,

(ii) $S, S_i \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}'$; $\{S_i \to S\} \in P'$.

En effet, les conditions sont nécessaires, car les familles en question sont couvrantes. Si C est le crible de S image d'une famille de morphismes $\{S_{ij} \xrightarrow{(P')} S_i \xrightarrow{(P)} S\}$, un diagram-chasing facile montre que les conditions du corollaire entraînent que $\operatorname{Hom}(S, F) \xrightarrow{g} \operatorname{Hom}(C, F)$ est injectif (resp. bijectif). Mais tout raffinement R de S contient un crible C du type ci-dessus et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(S,F) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \operatorname{Hom}(R,F) \arrow[dl, "h"] \\
& \operatorname{Hom}(C,F) &
\end{tikzcd}.$$

On sait que g est injectif, donc aussi f. Donc F est séparé. Mais R est un raffinement
244 de C, donc h est aussi injectif. Si g est bijectif, alors f l'est aussi, donc F est un faisceau.

Remarque 6.2.4. — Le corollaire précédent ne résulte *pas* de 4.3.5, car P′ n'est *pas* stable par extension de la base.

Remarque 6.2.5. — La condition (c) est vérifiée en particulier dans le cas où

(i) P′ est stable par composition.

(ii) Si $\{S_j \to S\}$ est une famille de morphismes de $\mathscr{C}'$, élément de P, il en existe une sous-famille élément de P′.

6.3. Application à la catégorie des schémas. — On prend pour $\mathscr{C}$ la catégorie des schémas, pour $\mathscr{C}'$ la sous-catégorie pleine formée des schémas affines, pour P l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes. On considèrera plusieurs ensembles P′ :

P'_1 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats*.

P'_2 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats de présentation finie et quasi-finis.* [57]

P'_3 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales*

P'_4 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales et finis.*

Pour chacun de ces ensembles P'_i, sauf P'_4, les conditions de la proposition 6.2.1 sont vérifiées ((c) grâce à 6.2.5, car un schéma affine étant quasi-compact, toute famille de morphismes de $\mathscr{C}'$, élément de P, contient une sous-famille *finie* qui soit également dans P, donc dans P'_i pour $i = 1, 2, 3$). La topologie $\mathcal{T}_i$ engendrée par P et P'_i est notée **245**
et appelée de la manière suivante : [57]

$\mathcal{T}_1$	=	(fpqc)	=	topologie fidèlement plate quasi-compacte.
$\mathcal{T}_2$	=	(fppf)	=	topologie fidèlement plate (localement) de présentation finie.
$\mathcal{T}_3$	=	(ét)	=	topologie étale.
$\mathcal{T}_4$	=	(étf)	=	topologie étale finie.

Comme $P'_1 \supset P'_2 \supset P'_3 \supset P'_4$, on a

$$(\mathrm{fpqc}) \geqslant (\mathrm{fppf}) \geqslant (\text{ét}) \geqslant (\text{étf}) \geqslant (\mathrm{Zar}).$$

Proposition 6.3.1. — (i) *Pour que le crible* R *de* S *soit couvrant pour* $\mathcal{T}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, *il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement* (S_p) *de* S *par des ouverts affines et pour chaque p une famille* $\{S_{pq} \to S_p\}$ *élément de* P'_i, *les* S_{pq} *étant affines, tels que chaque morphisme* $\{S_{pq} \to S\}$ *se factorise par* R. [58]

(ii) *Pour qu'un préfaisceau* F *sur* (**Sch**) *soit un faisceau pour* (fpqc) (*resp.* (fppf), (ét), (étf)), *il faut et il suffit que*

a) F *soit un faisceau pour* (Zar), *i.e. un foncteur de nature locale.*

b) *Pour tout morphisme fidèlement plat* (*resp. fidèlement plat de présentation finie et quasi-fini, resp. étale surjectif, resp. étale fini surjectif*) T $\to$ S, *où* T *et* S *sont affines, on ait un diagramme exact :*

$$F(S) \longrightarrow F(T) \rightrightarrows F(T \times_S T).$$

(iii) *Les topologies* $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, *sont moins fines que la topologie canonique.*

(iv) *Toute famille surjective formée de morphismes plats et ouverts* (*resp. plats et localement de présentation finie, resp. étales, resp. étales et finis*) *est couvrante pour* (fpqc) (*resp.* (fppf), *resp.* (ét), *resp.* (étf)). **246**

[57] N.D.E. : Soit P''_2 l'ensemble des familles finies surjectives, composées de morphismes de $\mathscr{C}'$ *plats de présentation finie*. D'après la proposition 6.3.1 qui suit, la topologie $\mathcal{T}_2$ engendrée par P et P'_2 coïncide avec la topologie engendrée par P et P''_2. Ceci découle des résultats de EGA IV_4, § 17.16 sur les quasi-sections, voir la preuve de 6.3.1. Citons ici le cas particulier suivant de EGA IV_4, 17.16.2 : soient S *affine* et $f : X \to S$ un morphisme plat surjectif localement de présentation finie, alors il existe un morphisme $S' \to S$ fidèlement plat, de présentation finie, quasi-fini, avec S' affine, et un S-morphisme $S' \to X$.

[58] N.D.E. : Par hypothèse, chaque famille $\{S_{pq} \to S\} \in P'_i$ est *finie*, donc $S'_p = \coprod_q S_{pq}$ est affine et la famille peut donc être remplacée par le morphisme $S'_p \to S_p$, qui appartient encore à P'_i.

(v) *Toute famille surjective, finie et formée de morphismes plats et quasi-compacts est couvrante pour* (fpqc). *En particulier, tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact est couvrant pour* (fpqc).

Démonstration. (i) résulte de 6.2.1, (ii) de 6.2.3, compte tenu du fait qu'un faisceau pour la topologie de Zariski transforme sommes directes en produits. Tout foncteur représentable étant un faisceau pour (Zar) et vérifiant la condition (b) de (ii) par SGA 1, VIII 5.3, $\mathcal{T}_1$ est moins fine que la topologie canonique, ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Soit $\{S_i \to S\}$ une famille de morphismes comme dans l'énoncé. Considérant un recouvrement de S par des ouverts affines, on se ramène immédiatement au cas où S est affine. [59]

Traitons d'abord le cas où les morphismes $S_i \to S$ sont plats et ouverts (resp. étales). Soit S_{ij} un recouvrement de S_i par des ouverts affines. Comme les morphismes en cause sont ouverts, les images T_{ij} des S_{ij} forment un recouvrement ouvert de S. Comme S est affine, donc quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts T_{ij}, pour (i, j) parcourant un ensemble fini F. Alors $S' = \coprod_F S_{ij}$ est affine, et le morphisme $S' \to S$ appartient à P'_1, resp. à P'_3, donc est couvrant. Comme il se factorise par la famille donnée, celle-ci est couvrante.

Dans le cas (étf), chaque S_i est fini sur S donc est affine ; dans l'argument précédent, on peut alors prendre le recouvrement $\{S_i\}$ de S_i, et l'on obtient que $S' \to S$ appartient à P'_4.

Considérons maintenant le cas où les morphismes $f_i : S_i \to S$ sont plats et *localement* de présentation finie. Pour tout $s \in S$, il existe, d'après (la démonstration de) EGA IV_4, 17.16.2, un sous-schéma affine $X(s)$ d'un certain S_i, tel que $s \in f_i(X(s))$ et que le morphisme $g_i : X(s) \to S$, restriction de f_i, soit plat, de présentation finie, et quasi-fini. Alors, $g_i(X(s))$ est un voisinage ouvert $U(s)$ de s (EGA IV_2, 2.4.6), et, S étant affine, il est recouvert par un nombre fini de tels ouverts $U(s_j)$, $j = 1, \dots, n$. Par conséquent, $X' = \coprod_j X(s_j)$ est affine, et le morphisme $X' \to S$ est surjectif, plat, de présentation fini et quasi-fini, donc appartient à P'_2. [60] Ceci achève la démonstration de (iv).

Prouvons (v). Soit $\{S_i \to S\}$ une famille *finie* fidèlement plate et quasi-compacte.
247 Soit T_j un recouvrement de S par des ouverts affines. Les $S_{ij} = T_j \times_S S_i$ sont quasi-compacts et possèdent donc des recouvrements ouverts affines *finis* T_{ijk}. Chaque morphisme $T_{ijk} \to T_j$ est plat, et la famille $\{T_{ijk} \to T_j\}$ est *finie* et surjective, donc couvrante pour $\mathcal{T}_1$. La famille $\{T_{ijk} \to S\}$ l'est donc aussi, par composition. Elle se factorise par la famille donnée qui l'est donc aussi :

---

[59] N.D.E. : On a simplifié la suite, en tirant profit du fait qu'on suppose désormais S affine.

[60] N.D.E. : Ceci montre que, si l'on note P''_2 l'ensemble des familles finies surjectives de morphismes de $\mathscr{C}'$ plats de présentation finie, la topologie engendrée par P et P''_2 égale $\mathcal{T}_2$. D'autre part, avec les notations du début de la démonstration de (iv), si l'on prend un recouvrement de S_i par des ouverts affines, *de présentation finie* sur S, on obtient que $S' \to S$ appartient à P''_2.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_i & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{T}_{ijk} \arrow[l] \arrow[dl] \\
\mathrm{S} \arrow[from=1-1] & \mathrm{T}_j \arrow[l] &
\end{tikzcd} .$$

Corollaire 6.3.2. — *Soit* (M_i) *la famille de morphismes suivante :*

(M_1) : *morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.*

(M_2) : *morphismes fidèlement plats localement de présentation finie.*

(M_3) : *morphismes étales surjectifs.*

(M_4) : *morphismes étales finis et surjectifs.* [61]

La famille (M_i) *vérifie les axiomes* (a), (b), (c), $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}_i})$ *et* $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_i})$ *de* 4.6.3.

En effet, pour (a), (b), (c), c'est classique (EGA et SGA 1, passim.). [62] D'après 6.3.1, (iv) et (v), (M_i) vérifie $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}_i})$. Il reste à voir que (M_i) vérifie $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_i})$; pour cela, il suffit de voir que (M_i) vérifie $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_1})$, qui entraîne les autres. Cela résulte de SGA 1, VIII (n$^{\text{os}}$ 4 et 5).

Corollaire 6.3.3. — *Si* X *est un schéma et* R *une relation d'équivalence dans* X *de type* (M_i)*,* R *est* (M_i)*-effective si et seulement si le faisceau quotient de* X *par* R *pour* $\mathcal{T}_i$ *est représentable et en ce cas il est représenté par le quotient* X/R*.*

En effet, c'est 4.6.5.

6.4. Conditions d'effectivité. — Nous cherchons maintenant des familles (N) de morphismes vérifiant l'axiome $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ de 4.7. Remarquons d'abord que $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}_1})$ entraîne $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}_i})$, ce qui fait que nous pouvons nous restreindre au cas de la topologie (fpqc). 248

Lemme 6.4.1. — *Les familles de morphismes suivantes vérifient l'axiome* $(f_{\mathcal{T}_1})$ *de* 4.7*, c'est-à-dire « se descendent par* (fpqc) *» :*

(N) : *immersions ouvertes.*

(N′) : *immersions fermées.*

(N″) : *immersions quasi-compactes.*

(61) N.D.E. : On a corrigé l'original en ajoutant pour (M_3) et (M_4) l'hypothèse de surjectivité, qui est automatiquement satisfaite dans les autres cas.

(62) N.D.E. : cf. EGA I, 6.6.4 pour « quasi-compacts », EGA II, 6.1.5 pour « finis », EGA IV$_1$, 1.6.2 pour « localement de présentation finie », EGA IV$_2$, 2.2.13 pour « fidèlement plats », et EGA IV$_4$, 17.3.3 pour « étales ».

En vertu de 6.3.1 (ii), il suffit de vérifier que les familles données se descendent par la topologie de Zariski et par *un* morphisme fidèlement plat quasi-compact. La première assertion est claire, vérifions la seconde. Pour (N), c'est SGA 1, VIII 4.4, pour (N′), c'est *loc. cit.*, 1.9. Pour (N″) on raisonne comme dans *loc. cit.*, 5.5, à l'aide des deux résultats antérieurs.

Corollaire 6.4.2. — *Le même résultat est valable pour les immersions ouvertes quasi-compactes.*

Ces résultats permettent d'appliquer à la situation présente les résultats généraux de 4.7.1, 4.7.2, 5.1.8, 5.3.1, etc. Énonçons-en un comme exemple, le premier.

Corollaire 6.4.3. — (= 4.7.1 + 4.6.10). *Soient* X *un schéma et* R *une relation d'équivalence dans* X. *On suppose que* $R \to X$ *est fidèlement plat et quasi-compact et que* $R \to X \times X$ *est une immersion fermée* (*resp. ouverte, resp. quasi-compacte, resp. ouverte quasi-compacte*). *Alors le faisceau-quotient* X/R *est le même pour la*
249 *topologie* (fpqc) *et pour la topologie canonique, et pour chaque schéma* S, *on a*

$$(\mathrm{X}/\mathrm{R})(\mathrm{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-schémas fermés (resp. ouverts, resp. rétrocompacts,}\ ^{(63)} \\ \textit{resp. ouverts rétrocompacts)}\ \mathrm{Z}\ \textit{de}\ \mathrm{X_S},\ \textit{stables par}\ \mathrm{R}\times\mathrm{S},\ \textit{tels que} \\ \mathrm{Z}\to\mathrm{S}\ \textit{soit fidèlement plat quasi-compact et que le diagramme} \\ \mathrm{R_Z} \rightrightarrows \mathrm{Z} \to \mathrm{S}\ \textit{soit exact} \end{array} \right\}.$$

6.5. Fibrés principaux homogènes. — Signalons simplement la terminologie :

topologie	fibrés	principaux	homogènes	
(fpqc)	”	”	”	(tout court)
(ét)	”	”	”	quasi-isotriviaux
(étf)	”	”	”	localement isotriviaux
(Zar)	”	”	”	localement triviaux.

6.6. Autres topologies. — On utilise parfois d'autres topologies sur la catégorie des schémas. Signalons-en une : la topologie *étale finie globale* (étfg) engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les familles surjectives formées de morphismes étales et finis. Elle *n'est pas* plus fine que la topologie de Zariski. Les fibrés principaux homogènes correspondants sont appelés « isotriviaux ».

(63) N.D.E. : Rappelons qu'un sous-schéma Z d'un schéma T est dit *rétrocompact* si l'immersion $Z \hookrightarrow T$ est quasi-compacte, cf. EGA 0_{III}, 9.1.1.

(64) N.D.E. : On rappelle (cf. 4.4.2) que la topologie chaotique est la topologie la moins fine, définie par $J(S) = \{S\}$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\text{canonique}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{fpqc}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{fppf}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{ét}) \arrow[d, dash] & \\
 & (\text{étf}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\text{Zar}) \arrow[dr, dash] & & (\text{étfg}) \arrow[dl, dash] \\
 & (\text{chaotique}) &
\end{tikzcd}
\quad . \qquad {}^{(64)}
$$

6.7. Espaces homogènes. — [65] Soient G un S-schéma en groupes, X un S-schéma à groupe d'opérateurs (à gauche) G, et

$$\Phi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

le morphisme de S-schémas défini ensemblistement par $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Rappelons (cf. 5.1.0 et III.0.1) qu'on dit que X est un espace *formellement principal homogène* sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) est vide ou principal homogène sous G(T),

(ii) Φ est un isomorphisme de S-foncteurs,

(iii) Φ est un isomorphisme de S-schémas.

(L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est claire, et l'on a (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) puisque $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$.)

La définition d'espace *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène) s'obtient en demandant que Φ soit un *épimorphisme* dans la catégorie des *faisceaux pour une topologie* $\mathcal{T}$ appropriée. En effet, la condition que Φ soit un épimorphisme de S-foncteurs équivaut à ce que, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) soit vide ou bien *homogène* (pas nécessairement principal homogène) sous G(T), mais cette condition est trop restrictive, comme le montre l'exemple simple suivant. Soient $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$, $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et $\mathrm{X} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ sur lequel G agit via $t \cdot x = t^2 x$. Alors le

[65] N.D.E. : On a ajouté les numéros qui suivent.

morphisme Φ est étale, fini, et surjectif, donc un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (étf) (*a fortiori*, un épimorphisme de S-schémas) ; par contre, les points 1 et -1 de $X(\mathbb{R})$ ne sont pas conjugués par un élément de $G(\mathbb{R})$, de sorte que le morphisme $G(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R}) \to X(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R})$ n'est pas surjectif [66]. On est donc conduit à poser la définition suivante :

Définition 6.7.1. — Soient G un S-groupe, X un S-schéma à groupe d'opérateurs G, et $\mathcal{T}$ une topologie sur $(\mathbf{Sch}_{/S})$, moins fine que la topologie canonique. On dit que X est un espace *formellement homogène* sous G (relativement à la topologie $\mathcal{T}$) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) le morphisme $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$ est un épimorphisme dans la catégorie des *faisceaux* pour la topologie $\mathcal{T}$,

(ii) pour tout $T \to S$, et $x, y \in X(T)$, il existe un morphisme $T' \to T$ *couvrant* pour la topologie $\mathcal{T}$, et $g \in G(T')$, tels que $y_{T'} = g \cdot x_{T'}$.

Remarque 6.7.2. — La condition (i) implique, en particulier, que Φ est un épimorphisme effectif universel dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$ (cf. 4.4.3). Ceci entraîne, comme on le voit facilement, que Φ est surjectif (cf. 1.3, N.D.E. (3)).

Proposition et définition 6.7.3. — [67] *Soient* G *un* S-*groupe,* X *un* S-*schéma à groupe d'opérateurs* G, *et* $\mathcal{T}$ *une topologie sur* $(\mathbf{Sch}_{/S})$, *moins fine que la topologie canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *vérifie les deux hypothèses ci-dessous :*

(1) *le morphisme* $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$ *est couvrant, i.e.* X *est un* G-*espace formellement homogène,*

(2) *le morphisme* $X \to S$ *est également couvrant, c.-à-d., localement pour la topologie* $\mathcal{T}$, *il possède une section* (*cf.* RefIV.4.4.8bis.bis).

(ii) « Localement sur S pour la topologie $\mathcal{T}$ », X *est isomorphe, comme schéma à groupe d'opérateurs* G, *au faisceau quotient* (*pour* $\mathcal{T}$) *de* G *par un sous-schéma en groupes* H, *c.-à-d., il existe une famille couvrante* $\{S_i \to S\}$ *telle que chaque* $X \times_S S_i$ *représente le faisceau quotient de* $G \times_S S_i$ *par un certain sous-schéma en groupes* H_i.

Sous ces conditions, on dit que X est un G-*espace homogène* (relativement à la topologie $\mathcal{T}$).

Démonstration. Supposons (ii) vérifiée. Posons $G_i = G \times_S S_i$ et $X_i = X \times_S S_i$. Alors, X_i possède une section sur S_i, à savoir la composée de la section unité $\varepsilon_i : S_i \to G_i$ et de la projection $\pi_i : G_i \to X_i = G_i/H_i$. Donc $X \to S$ est couvrant.

---

[66] N.D.E. : Évidemment, cette difficulté provient du fait que si $\mathscr{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ contenant $\mathscr{C}$, par exemple, la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathcal{T}}$ des faisceaux sur $\mathscr{C}$ pour une topologie $\mathcal{T}$ moins fine que la topologie canonique, et si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathscr{C}$, alors les implications :

$$f \text{ épimorphisme de } \widehat{\mathscr{C}} \Rightarrow f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}' \Rightarrow f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}$$

sont en général strictes.

[67] N.D.E. : cf. [**Ray70**], Déf. VI.1.1.

D'autre part, π_i est couvrant, donc $\pi_i \times \pi_i$ l'est aussi (cf. 4.2.3 (C 1) et (C 2)), et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \arrow[r, "\Phi_i"] & \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \\ \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \arrow[u, "\mathrm{id} \times \pi_i"] \arrow[r, "\Psi_i", "\sim"'] & \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \arrow[u, "\pi_i \times \pi_i"'] \end{tikzcd}$$

où Φ_i est déduit de Φ par le changement de base $\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}$ et Ψ_i est l'isomorphisme défini ensemblistement par $(g, g') \mapsto (gg', g)$. Alors $(\pi_i \times \pi_i) \circ \Psi_i$ est couvrant, donc Φ_i l'est aussi (4.2.3 (C 3)). Ceci montre que Φ est « localement couvrant », donc est couvrant (4.2.3 (C 5)). Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, supposons (i) vérifiée, et supposons de plus que le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ possède une section σ. D'après EGA I, 5.3.13, σ est une immersion. Définissons $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{S}$ par le diagramme ci-dessous, dont les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

où π, $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma$ désignent les morphisme définis ensemblistement, pour $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$, par :

$$\pi(g) = g \cdot \sigma_{\mathrm{T}}, \qquad (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma)(g) = (g, \sigma_{\mathrm{T}}), \qquad (\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma)(x) = (x, \sigma_{\mathrm{T}}).$$

Alors, π est couvrant, et H est un sous-schéma en groupes de G, représentant le stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\sigma)$ de σ (cf. I, 2.3.3), c.-à-d., pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, on a :

$$\mathrm{H}(\mathrm{T}) = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid g \cdot \sigma_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}}\}.$$

Notons G/H le *préfaisceau* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{G}(\mathrm{T})/\mathrm{H}(\mathrm{T})$, et $a(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ le faisceau associé, pour la topologie $\mathcal{T}$. D'après ce qui précède, on obtient un diagramme commutatif de morphismes de préfaisceaux à groupe d'opérateurs G :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathrm{X} \\ \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[ur, "\overline{\pi}"'] & \end{tikzcd},$$

où $\overline{\pi}$ est un *monomorphisme*. Comme π est couvrant, $\overline{\pi}$ l'est aussi et donc, d'après 4.3.12, $\overline{\pi}$ induit un isomorphisme $a(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}$. On a donc démontré que : *si* X *est un* G-*espace homogène tel que* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *admette une section* σ, *alors* X *représente le faisceau quotient* G/H, *où* $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{S}$ *est le stabilisateur de* σ.

Dans le cas général, il existe par hypothèse une famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ telle que chaque morphisme $\mathrm{X}_i = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i \to \mathrm{S}_i$ possède une section σ_i. Posons $\mathrm{G}_i = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$; alors le morphisme $\Phi_i : \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i$ déduit de Φ par le changement de base

$S_i \to S$ est encore couvrant. Donc, d'après ce qui précède, $X_i \cong G_i/H_i$, où H_i est le stabilisateur dans G_i de σ_i. Ceci achève la preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Bibliographie

250

[AS] *Analysis Situs*, par J. Giraud, Sém. Bourbaki, Exp. **256**, Mai 1963.

[D] *Méthode de la descente*, par J. Giraud, Mém. Soc. Math. France, t. **2** (1964), p. iii-viii + 1-150.

[MA] *Grothendieck Topologies*, par M. Artin, notes multigraphiées, Harvard, 1962.

[SGA 1] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960-61, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Maths. **224** (1971), édition recomposée et annotée, Documents Math. **3**, Soc. Math. France, 2003.

[SGA 4] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. I, II, III, Lecture Notes in Maths. **269, 270** (1972), **305** (1973).

[TDTE I] *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique* I. *Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*, par A. Grothendieck, Sém. Bourbaki, Exp. **190**, Déc. 1959.

[Ray70] (68) M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Math. **119**, Springer-Verlag, 1970

(68) N.D.E. : On a ajouté cette référence.