EXPOSÉ $\mathrm{VI_A}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

par P. Gabriel

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau local artinien de corps résiduel k. Un **287**
schéma en groupes G sur Spec A sera appelé simplement un A-*groupe*. Cet A-groupe est dit *localement de type fini* si le schéma sous-jacent est localement de type fini sur A ; il est dit *algébrique* si le schéma sous-jacent est de type fini sur A.

0. Remarques préliminaires

0.1. Considérons d'abord un schéma en groupes G sur un schéma quelconque S. Nous appelons *multiplication* le morphisme structural $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ et *inversion* le morphisme $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ qui est défini par les égalités $c(\mathrm{T})(x) = x^{-1}$ (T étant un schéma sur S et x un élément de G(T)). Si U et V sont des parties de l'ensemble sous-jacent à G, nous notons $\mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$ l'image par le morphisme multiplication de la partie de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ formée des points dont la première projection appartient à U, la deuxième à V. De même, les notations U^{-1} et $c(\mathrm{U})$ sont équivalentes.

Soient pr_1 la projection de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le premier facteur et $\sigma : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$
le morphisme de composantes pr_1 et μ. Pour tout S-schéma T, $\sigma(\mathrm{T})$ est l'applica- **288**
tion $(x, y) \mapsto (x, xy)$; il s'ensuit que σ est un automorphisme. Le composé de cet automorphisme et de la projection pr_2 de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le deuxième facteur est le morphisme multiplication. Lorsque G est *plat* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *plats* ; lorsque G est *lisse* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *lisses*, etc.

0.2. Nous supposons à partir de maintenant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k. Nous désignons par $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ la catégorie des schémas réduits sur k. Pour tout schéma X sur A, le schéma réduit $\mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$ est un objet de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ et le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$ est adjoint à droite à l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$. Il s'ensuit que, pour tout A-groupe G, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$, [(1)] c.-à-d., pour tout k-schéma T *réduit*, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}(\mathrm{T})$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en T. On prendra garde que $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ n'est pas nécessairement un

[(1)] N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent.

k-groupe, car la « multiplication » est seulement un morphisme de $(\mathrm{G}_{\text{réd}} \times_k \mathrm{G}_{\text{réd}})_{\text{réd}}$ vers $\mathrm{G}_{\text{réd}}$. [(2)]

[(3)] Toutefois, *si k est un corps parfait*, l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/k})$ commute aux produits de sorte que les groupes dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ s'identifient aux schémas en groupes sur k dont le schéma sous-jacent est réduit. Dans ce cas, si G est un k-groupe, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de G ; ce sous-groupe n'est *pas invariant* dans G en général.

Par exemple, si k est un corps de caractéristique 3, le groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ opère de façon non triviale dans le groupe diagonalisable $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ (cf. Exp. I, 4.1 et 4.4) ; si G désigne le produit semi-direct de $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ défini par cette opération, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ et n'est pas invariant dans G. [(4)]

Soient k un corps quelconque, $k^{p^{-\infty}}$ sa clôture parfaite, et H un groupe dans la
289 catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$. Alors $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$ est un schéma en groupes sur le corps parfait $k^{p^{-\infty}}$. Comme $\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ et $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\text{réd}}$ ont même espace topologique sous-jacent, on voit que les groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ ont en commun avec les k-groupes certaines propriétés topologiques invariantes par extension du corps de base : par exemple, il résultera de 0.3 et des remarques qu'on vient de faire que tout groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ est séparé.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ chaque fois que nous aurons affaire à une partie localement fermée non vide U d'un A-groupe G telle que $\mathrm{U} \cdot \mathrm{U} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}$: en effet, le sous-schéma réduit de G défini par U est un groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

0.3. *Un* A*-groupe* G *est toujours séparé, car la section unité e* : $\operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{G}$ *est une immersion fermée.* En effet, soient x l'unique point de Spec A et η le morphisme structural $\mathrm{G} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Comme $\eta \circ e = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec} \mathrm{A}}$ alors, pour *tout* ouvert affine $\mathrm{U} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ de G contenant $e(x)$, le morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ possède une section, donc est surjectif. Il en résulte que e est une immersion fermée. [(5)] Or, la diagonale de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ s'identifie au foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})^{\circ}$ à valeurs dans $(\mathbf{Ens})$ qui associe à tout schéma S sur A l'image réciproque de l'élément neutre de G(S) par l'application $\varphi(\mathrm{S}) : (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ de $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \times \mathrm{G}(\mathrm{S})$ dans G(S). On a par conséquent le carré cartésien ci-dessous, de sorte que le morphisme diagonal, qui est déduit d'une immersion fermée par changement de base, est lui-même une immersion fermée :

[(2)] N.D.E. : Pour des exemples de schémas en groupes G sur un corps non parfait k, tels que $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ ne soit pas un k-schéma en groupes, voir 1.3.2 plus bas.

[(3)] N.D.E. : On a légèrement modifié la suite de 0.2, ainsi que 0.3.

[(4)] N.D.E. : Pour avoir un exemple analogue avec G *connexe*, on peut considérer, pour $\operatorname{car}(k) = p > 0$, le produit semi-direct de $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$ et de $\mathbb{G}_{m,\,k}$.

[(5)] N.D.E. : Cet argument vaut pour tout anneau local A de dimension zéro, et montre que si S est un schéma discret, tout S-groupe est séparé, cf. $\mathrm{VI_B}$, 5.2 ; d'autre part (cf. $\mathrm{VI_B}$, 5.6.4), si S contient un point fermé s non isolé, le S-schéma G obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} - \{s\}$ n'est pas séparé sur S, mais est muni d'une structure de S-groupe.

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "\varphi"] & G \\ G \arrow[u, "\text{morphisme diagonal}"] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A. \arrow[u, "\text{section unité}"'] \end{tikzcd}$$

0.4. [6] Soit G un A-schéma. Nous dirons qu'un point g de G est *strictement rationnel* **290**
sur A s'il existe un A-morphisme $s : \operatorname{Spec} A \to G$ qui envoie le seul point de Spec A sur g, i.e. si le morphisme $A \to \mathscr{O}_{G,g}$ admet une rétraction. Remarquons qu'on a alors $\kappa(g) = k$, et donc g est un point fermé de G (si B est l'anneau d'un voisinage ouvert affine de g et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de B correspondant à g, alors $B/\mathfrak{p} \subset k$ est une A-algèbre finie, donc un anneau artinien intègre, donc un corps).

Supposons désormais que G soit un A-groupe, alors un tel $s : \operatorname{Spec} A \to G$ définit un automorphisme r_s du schéma G sur A qu'on appelle translation à droite par s : pour tout morphisme $\pi : S \to \operatorname{Spec} A$, $r_s(\pi)$ est l'automorphisme de G(S) défini par : $x \mapsto x \cdot G(\pi)(s)$, pour tout $x \in G(S)$. De même, on note ℓ_s la translation à gauche par s, c'est-à-dire l'automorphisme de G défini par les égalités $\ell_s(\pi)(x) = G(\pi)(s) \cdot x$, pour tout $x \in G(S)$.

Comme $G \otimes_A k$ et G ont même espace topologique sous-jacent $\underline{G}$, que $G \otimes_A k$ est un k-groupe et que $s \otimes_A k$ dépend seulement de g et non de s, on voit que les automorphismes de $\underline{G}$ induits par r_s et ℓ_s (ou par $r_{s\otimes k}$ et $\ell_{s\otimes k}$) dépendent seulement de g et non de s ; lorsque P est une partie de $\underline{G}$, nous pouvons donc noter $r_g(P)$ ou $P \cdot g$ (resp. $\ell_g(P)$ ou $g \cdot P$) au lieu de $r_s(P)$ (resp. $\ell_s(P)$), ce qui est conforme à 0.1.

Remarque 0.4.1. — Si g est un point strictement rationnel de G et si $A \to A'$ un morphisme d'anneaux locaux artiniens, alors $G' = G \otimes_A A'$ possède un unique point g' au-dessus de g, et g' est strictement rationnel sur A' ; de plus, si l'on note P' l'image inverse de P dans G', alors $P' \cdot g'$ est l'image inverse de $P \cdot g$ (cf. EGA I, 3.4.8).

Proposition 0.5. — [7] *Soient* G *un* A*-groupe et* U, V *deux ouverts denses dans* G*. Alors* $U \cdot V$ (*i.e. l'image de* $U \times_A V$ *par la multiplication*) *est égal à tout l'espace sous-jacent à* G.

En effet, comme G et $G \otimes_A k$ ont même espace sous-jacent, on peut supposer, quitte à remplacer A par k et G par $G \otimes_A k$ que $A = k$. Soit $g \in G$. Posons $K = \kappa(g)$, alors la translation à gauche ℓ_g est un automorphisme de G_K. Comme la projection $G_K \to G$ est ouverte, U_K et V_K sont des ouverts denses de G_K, ainsi que l'image de V_K par λ_g. Il existe donc $v \in V_K$ tel que $u = \ell_g(v)$ appartienne à U_K. Soit L une extension de K contenant $\kappa(v)$, et donc $\kappa(u)$, et soient g_L et v_L les L-points de G_L déduits de g

[6] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en particulier on a ajouté la remarque 0.4.1.

[7] N.D.E. : L'original énonçait ce résultat sous l'hypothèse que G soit localement de type fini sur A. Comme il est utile d'en disposer dans le cas général, et comme la démonstration est essentiellement la même, on a énoncé et démontré le résultat dans le cas général. Ceci sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

et v. Alors $g_{\mathrm{L}} \cdot v_{\mathrm{L}} = u'$ est un point de G_{L} au-dessus de u, et donc $g_{\mathrm{L}} = u' \cdot v_{\mathrm{L}}^{-1}$ est
291 au-dessus de $\mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$, d'où $g \in \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 0.5.1. — [(8)] *Si* G *est un* A*-groupe* irréductible*,* G *est* quasi-compact*.*

En effet, soit U un ouvert affine non vide de G, alors U est dense dans G, donc d'après 0.5 le morphisme $\mu : \mathrm{U} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ est surjectif, donc G est quasi-compact puisque $\mathrm{U} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{U}$ l'est.

Corollaire 0.5.2. — [(9)] *Soient* G *un* A*-schéma en groupes, et* H *un sous-*A*-schéma en groupes de* G*. Alors* H *est* fermé*.*

Démonstration. Soit k' la clôture parfaite du corps résiduel k de A. Comme les espaces topologiques sous-jacents à G et H sont inchangés par le changement de base $\mathrm{A} \to k \to k'$, on peut supposer que $\mathrm{A} = k$ est un corps *parfait.* On peut alors supposer que G et H sont réduits, donc géométriquement réduits.

Soit $\overline{\mathrm{H}}$ l'adhérence de H, alors $\mu^{-1}(\overline{\mathrm{H}})$ est un fermé de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ contenant $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Comme le morphisme $\mathrm{H} \to \operatorname{Spec} k$ (resp. $\overline{\mathrm{H}} \to \operatorname{Spec} k$) est universellement ouvert, et comme H est dense dans $\overline{\mathrm{H}}$, alors $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est dense dans $\mathrm{H} \times \overline{\mathrm{H}}$ et $\mathrm{H} \times \overline{\mathrm{H}}$ est dense dans $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$, donc $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est dense dans $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$. Donc $\mu(\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}) \subset \overline{\mathrm{H}}$ et donc, comme $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$ est réduit, μ induit un morphisme $\mu' : \overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}} \to \overline{\mathrm{H}}$.

Soit alors $g \in \overline{\mathrm{H}}$, posons $\mathrm{K} = \kappa(g)$. Comme la projection $\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{K}} \to \overline{\mathrm{H}}$ est ouverte, alors H_{K} et $\ell_g(\mathrm{H}_{\mathrm{K}})$ sont deux ouverts denses de $\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{K}}$, donc il existe $u, v \in \mathrm{H}_{\mathrm{K}}$ tels que $\ell(g)(v) = u$. On en conclut, comme dans la démonstration de 0.5, que g appartient à $\mathrm{H} \cdot \mathrm{H} = \mathrm{H}$, d'où $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}$.

1. Propriétés locales d'un A-groupe localement de type fini

292

Nous allons voir d'abord que, si G est *localement de type fini et plat* sur A, on peut « rendre strictement rationnel tout point fermé de G » au moyen d'une extension *finie et plate* de la base.

1.1. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons à partir de maintenant que G est un A-groupe *localement de type fini.* Lorsque A est un corps k, nous obtiendrons dans l'exposé $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$ des résultats très précis sur les anneaux locaux de G. [(10)] Nous nous contentons ici de quelques résultats élémentaires :

Proposition 1.1.1. — *Soit x un point d'un* A*-groupe* G localement de type fini et plat *sur* A*. Alors l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ est de* Cohen-Macaulay *et il existe un système $a_1, \ldots, a_n$ de paramètres de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ tel que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}/(a_1, \ldots, a_n)$ soit un* A*-module* fini et plat (*donc* fini et libre)*.*

---

(8) N.D.E. : On a inséré ici ce corollaire, cf. 2.4 et 2.6.2 plus loin.

(9) N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, utilisé implicitement dans VIII, 6.7, voir aussi VI_{B} 6.2.5.

(10) N.D.E. : Par exemple, ils sont toujours *intersection complète*, cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$, 5.5.1. De plus, si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors G est *lisse* (VI_{B}, 1.6.1, voir aussi $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$, 3.3.1).

Nous supposons d'abord A égal à son corps résiduel k ; il suffit de prouver alors que $\mathscr{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et on peut se limiter au cas où x est un point fermé (cf. EGA 0_{IV}, 16.5.13). D'après le lemme 1.1.2 ci-dessous, G contient un point fermé y tel que $\mathscr{O}_{G,y}$ soit de Cohen-Macaulay. D'après SGA 1, I § 9, il revient au même de dire que, pour toute extension finie K du corps de base k et tout point $\overline{y}$ de $\overline{G} = G \otimes_k K$ au-dessus de y, $\mathscr{O}_{\overline{G},\overline{y}}$ est de Cohen-Macaulay. Si l'extension K a été choisie assez grande, i.e. si K contient une extension normale de k contenant les corps résiduels $\kappa(y)$ et $\kappa(x)$, alors $\overline{y}$ est (strictement) rationnel sur K ainsi que tout point $\overline{x}$ de $\overline{G}$ au-dessus 293
de x. [11] Comme l'automorphisme $r_{\overline{x}} \circ (r_{\overline{y}})^{-1}$ applique $\overline{y}$ sur $\overline{x}$, il s'ensuit que $\mathscr{O}_{\overline{G},\overline{x}}$, donc $\mathscr{O}_{G,x}$ (SGA 1, I § 9) sont de Cohen-Macaulay.

Lorsque A est de nouveau supposé quelconque, le raisonnement précédent s'applique à $k \otimes_A G$ de sorte que $k \otimes_A \mathscr{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay. Si $a_1, \dots, a_n$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{G,x}$ dont l'image dans $k \otimes_A \mathscr{O}_{G,x}$ est un système de paramètres, il résulte de SGA 1, IV 5.7 ou de EGA 0_{IV}, 15.1.16, que $a_1, \dots, a_n$ est une suite $\mathscr{O}_{G,x}$-régulière et que $\mathscr{O}_{G,x}/(a_1, \dots, a_n)$ est fini et plat (donc fini et libre) sur A.

Lemme 1.1.2. — *Tout schéma non vide* X, localement de type fini *sur un anneau artinien* A*, contient un point fermé x dont l'anneau local est de* Cohen-Macaulay.

On peut évidemment supposer X affine d'algèbre B et raisonner par récurrence sur $\dim X$ (l'assertion est claire si X est discret, tous les anneaux locaux étant alors artiniens). Comme B est de type fini sur A, si $\dim B > 0$, B contient un élément a non inversible et non diviseur de 0. [12] Le sous-schéma fermé $X' = \operatorname{Spec} B/(a)$ de X est alors de dimension strictement inférieure à $\dim X$ et contient par hypothèse de récurrence un point fermé x tel que $\mathscr{O}_{X',x}$ soit de Cohen-Macaulay. Comme $\mathscr{O}_{X',x} = \mathscr{O}_{X,x}/(a)$ et a est non inversible et non diviseur de 0 dans $\mathscr{O}_{X,x}$, alors $\mathscr{O}_{X,x}$ est de Cohen-Macaulay (voir aussi EGA IV_2, 6.11.3).

Proposition 1.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat *sur* A *et x un point* fermé *de* G*. Il existe alors une* A*-algèbre* A′ locale, 294
finie et libre *sur* A *telle que tout point de* $G \otimes_A A'$ *au-dessus de x soit* strictement rationnel *sur* A′.

[13] En effet, soit k_1 une extension normale de degré fini de k contenant le corps résiduel $\kappa(x)$ de x. D'après le lemme V 4.1.2, il existe une A-algèbre A_1 locale, finie et libre sur A, de corps résiduel k_1. Dans ce cas, (cf. N.D.E. (11)) tous les points $g_1, \dots, g_n$ de $G \otimes_A A_1$ au-dessus de $x \in G$ ont k_1 pour corps résiduel (i.e. $g_1, \dots, g_n$ sont rationnels sur A_1 au sens de l'Exp. V, § 4.e)).

(11) N.D.E. : En effet, l'hypothèse sur K entraîne que, pour toute extension L de K, tout k-morphisme $\kappa(x) \to L$ (resp. $\kappa(y) \to L$) se factorise à travers K ; par conséquent, tous les points de $G \otimes_k K$ au-dessus de x ou y ont K pour corps résiduel, i.e. sont (strictement) rationnels sur K.

(12) N.D.E. : En effet, B est un anneau noethérien de Jacobson (cf. [**BAC**], V § 3.4). Si tout élément non inversible est diviseur de zéro, alors tout idéal premier est un idéal premier associé de B, donc, en particulier, B n'a qu'un nombre *fini* d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$. Comme B est un anneau de Jacobson, l'intersection des $\mathfrak{m}_i$ est le nilradical de B, et il s'ensuit que chaque $\mathfrak{m}_i$ est un idéal premier *minimal* de B, de sorte que $\dim B = 0$.

(13) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Soient donc $B_1, \dots, B_n$ les anneaux locaux de $g_1, \dots, g_n$. D'après 1.1.1, $B_1, \dots, B_n$ possèdent des quotients $B'_1, \dots, B'_n$ qui sont artiniens et finis et libres sur A_1. Posons $A' = B'_1 \otimes_{A_1} \cdots \otimes_{A_1} B'_n$. Alors A' est locale, finie et libre sur A_1 et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'on a des homomorphismes surjectifs

$$B_i \otimes_{A_1} A' \twoheadrightarrow B'_i \otimes_{A_1} A' \twoheadrightarrow A',$$

le second étant induit par l'application de multiplication $B'_i \otimes_{A_1} B'_i \twoheadrightarrow B'_i$. Par conséquent, A' répond à la question.

1.3. Soit e l'*élément neutre* (ou *origine*) de G, c'est-à-dire l'image du seul point de Spec A par la section unité Spec A $\to$ G. Par définition même, e est strictement rationnel sur A.

Proposition 1.3.1. — [14] *Soient* G *un groupe* localement de type fini et plat *sur un anneau artinien* A *et* K (*resp.* $\overline{k}$) *la clôture parfaite* (*resp. une clôture algébrique*) *du corps résiduel* k *de* A.

(1) *Pour tout point fermé* x *de* $\overline{G} = G \otimes_k \overline{k}$, *les anneaux locaux* $\mathscr{O}_{\overline{G},e}$ *et* $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$ *sont isomorphes. En particulier, les espaces tangents* $T_e\overline{G}$ *et* $T_x\overline{G}$ *ont même dimension.*

(2) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $G \otimes_A K$ *est réduit.*

(i bis) $\mathscr{O}_{G,e} \otimes_A K$ *est réduit.*

(ii) G *est lisse sur* A.

(ii bis) G *est lisse sur* A *à l'origine.*

Démonstration. (1) Soit x un point fermé de $\overline{G}$, il y a exactement un $\overline{k}$-morphisme $s : \operatorname{Spec} \overline{k} \to \overline{G}$ dont l'image est x ; la translation à droite r_s induit alors un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{G},e} = \mathscr{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ sur $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$, d'où l'assertion (1).

295 Prouvons l'assertion (2). Au moyen de SGA 1, II.2.1, on se ramène tout de suite au cas où A est un corps ($A = k$). Les implications (i) $\Rightarrow$ (i bis), (ii) $\Rightarrow$ (ii bis), (ii) $\Rightarrow$ (i) et (ii bis) $\Rightarrow$ (i bis) sont évidentes, de sorte qu'il suffit de prouver que (i bis) entraîne (ii).

Or, il résulte de (i bis) que $\mathscr{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ est réduit. Donc, d'après (1), $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$ est réduit, pour tout point fermé x de $\overline{G}$, de sorte que $\overline{G}$ est réduit. Donc, comme $\overline{G}$ est localement de type fini sur $\overline{k}$, il existe au moins un point fermé y tel que $\mathscr{O}_{\overline{G},y}$ soit régulier. Comme, d'après (1), les anneaux locaux des points fermés de $\overline{G}$ sont tous isomorphes à $\mathscr{O}_{\overline{G},e}$, on voit que tous ces anneaux locaux sont réguliers, de sorte que $\overline{G}$ est lisse sur $\overline{k}$, donc G lisse sur k.

[15] On peut maintenant donner les exemples ci-dessous, signalés par M. Raynaud, de schémas en groupes G sur un corps non parfait k, tels que $G_{\text{réd}}$ ne soit pas un k-schéma en groupes.

[14] N.D.E. : On a ajouté le point (1), utile dans les exemples 1.3.2 qui suivent.
[15] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit et les exemples 1.3.2.

Exemples 1.3.2. — Soient k un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, $t \in k - k^p$, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, et $\alpha \in \overline{k}$ tel que $\alpha^p = t$.

(1) Considérons le groupe additif $\mathbb{G}_{a,\,k} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]$ et soit G le sous-schéma en groupes, fini sur k, défini par le polynôme additif $\mathrm{X}^{p^2} - t\mathrm{X}^p$. Alors

$$\mathrm{G}_{\text{réd}} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]/\mathrm{X}(\mathrm{X}^{p(p-1)} - t)$$

est étale à l'origine. Si c'était un k-schéma en groupes, il serait lisse (d'après 1.3.1), or $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas géométriquement réduit, donc ce n'est pas un k-schéma en groupes.

(2) Considérons $\mathbb{G}^4_{a,\,k} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ et soit G le sous-schéma en groupes défini par l'idéal I engendré par les polynômes additifs $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - t\mathrm{Y}^p$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{U}^p - t\mathrm{V}^p$. Alors, G est de dimension 2 et est irréductible, car $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}} \cong \operatorname{Spec} \overline{k}[\mathrm{Y}, \mathrm{V}]$ l'est.

Soient $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ et $\mathfrak{m}$ son idéal d'augmentation. Notons x, y, u, v les images de $d\mathrm{X}, d\mathrm{Y}, d\mathrm{U}, d\mathrm{V}$ dans $\Omega^1_{\mathrm{A}/k} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m})$, considérées comme des formes linéaires sur l'espace tangent $k^4 = \mathrm{T}_0\, \mathbb{G}^4_{a,\,k}$. Montrons que le sous-espace $\mathrm{E} = \mathrm{T}_0\, \mathrm{G}_{\text{réd}}$ égale k^4. Sinon, il existerait une forme linéaire $f = ax + by + a'u + b'v$, avec $a, b, a', b' \in k$ non tous nuls, s'annulant sur E. Rappelons que la formation de $\Omega^1_{\mathrm{A}/k}$ (et donc celle des espaces tangents) commute au changement de base (cf. EGA IV_4, 16.4.5) et identifions f à son image dans $(\overline{k}^4)^*$. Comme $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}} \subset (\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}}$, alors f s'annule sur le sous-espace $\mathrm{T}_0(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}}$ de $\overline{k}^4$, qui est défini par les équations $g_1 = x - \alpha y$ et $g_2 = u - \alpha v$, et donc $f = \lambda g_1 + \mu g_2$, avec $\lambda, \mu \in \overline{k}$. Or $\lambda g_1 + \mu g_2$ n'appartient à k^4 que si $\lambda = \mu = 0$! Cette contradiction montre que $\mathrm{E} = k^4$, et donc $\mathrm{T}_0(\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}} = \overline{k}^4$.

D'autre part, $\mathrm{R} = \mathrm{XV} - \mathrm{YU}$ appartient à $\sqrt{\mathrm{I}}$ car $\mathrm{R}^p = (\mathrm{X}^p - t\mathrm{Y}^p)\mathrm{V}^p - \mathrm{Y}^p(\mathrm{U}^p - t\mathrm{V}^p)$. Par conséquent, l'espace tangent F au point $(\alpha, 1, \alpha, 1)$ de $(\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}}$ est contenu dans l'hyperplan H de $\overline{k}^4$ d'équation $\alpha\, d\mathrm{V} + d\mathrm{X} - d\mathrm{U} - \alpha\, d\mathrm{Y} = 0$, donc est de dimension $\leqslant 3$. [16] Donc, d'après le point (1) de 1.3.1, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas un k-schéma en groupes.

2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini

296

2.1. Considérons d'abord un A-groupe quelconque G et soit G′ la composante connexe de l'origine e de G. Cette composante connexe est évidemment fermée de sorte que nous pouvons l'identifier au sous-schéma fermé *réduit* de G qui a G′ pour espace sous-jacent. [17]

Proposition 2.1.1. — *Pour toute extension* K *du corps résiduel* k *de* A*,* $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ *a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine dans le* K*-groupe* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ (*i.e.* G′ *est* géométriquement connexe).

Soit en effet $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$. Comme l'image de $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ dans G est connexe et contient l'élément neutre de G, cette image est contenue dans G′ de sorte que $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ est contenu dans l'image réciproque

[16] N.D.E. : En fait on voit sans peine que $\sqrt{\mathrm{I}}$ est engendré par P, Q, R en tout point $\neq 0$, donc F = H.

[17] N.D.E. : On verra plus loin (2.2) que G′ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

$G' \otimes_A K$ de G' dans $G \otimes_A K$. La proposition résulte donc de la connexité de $G' \otimes_A K$ qui est prouvée dans le lemme 2.1.2 :

Lemme 2.1.2. — *Soient* X *et* Y *deux schémas connexes sur un corps k. Si* X *contient un point rationnel,* $X \times_k Y$ *est connexe.*

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de ce résultat de EGA IV_2 (4.5.8 et 4.5.14).

Supposons d'abord Y non vide, connexe et affine d'algèbre B. Dans ce cas, $X \times_k Y$ est le spectre de la $\mathscr{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B} = \mathscr{O}_X \otimes_k B$. Nous voulons montrer que toute partie U de $X \times_k Y$ qui est ouverte, fermée et non vide, coïncide avec
297 $X \times_k Y$. Or, U est affine sur X et a pour $\mathscr{O}_X$-algèbre affine un facteur direct de $\mathscr{B}$. Il résulte donc du lemme 2.1.3 ci-dessous que l'image de U dans X est ouverte et fermée, i.e. coïncide avec X tout entier. Cette image contient en particulier un point rationnel x de X, de sorte que U rencontre l'image réciproque de x dans $X \times_k Y$. Comme cette dernière est isomorphe à Y, donc est connexe, U contient cette image réciproque. Le même résultat serait valable pour le complémentaire de U dans $X \times_k Y$, si U était distincte de $X \times_k Y$, ce qui serait absurde.

Si Y est maintenant un k-schéma quelconque, ce qui précède montre que les fibres de la projection canonique $X \times_k Y \to Y$ sont connexes. Si x est un point rationnel de X, ces fibres rencontrent toutes le sous-schéma $\{x\} \times_k Y$ qui est lui-même connexe, d'où la proposition.

Lemme 2.1.3. — *Soient* X *un schéma et* $\mathscr{A}$ *une* $\mathscr{O}_X$*-algèbre* quasi-cohérente *qui est un facteur direct d'un* $\mathscr{O}_X$*-module libre. L'image de* $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ *dans* X *est alors ouverte et fermée.*

Soit V cette image. Il est clair que V est contenue dans le support de $\mathscr{A}$. Réciproquement, si x appartient au support de $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}_x$ est non nul et est un $\mathscr{O}_{X,x}$-module libre puisque, d'après Kaplansky, [18] tout module projectif sur un anneau local est libre. Par conséquent la fibre de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ en x, qui est affine d'algèbre $\mathscr{A}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \kappa(x)$, n'est pas vide. On voit donc que l'image de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ coïncide avec le support de $\mathscr{A}$.

Si s est la section unité de $\mathscr{A}$, l'égalité $s_x = 0$ entraîne que s, donc $\mathscr{A}$, sont nuls
298 dans un voisinage du point x. Donc le support de $\mathscr{A}$ est fermé. [19] D'autre part, *« le support d'un module projectif est ouvert »*. En effet, soient $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent localement projectif, $\mathscr{P}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}, \mathscr{O}_X)$ le $\mathscr{O}_X$-module dual, et x un point de X tel que $\mathscr{P}_x \neq 0$. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert affine de x suffisamment petit, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est facteur direct d'un $\mathscr{O}_X$-module libre. Alors, le morphisme naturel

$$\mathscr{P}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow \mathscr{P}_x^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{P}_x, \mathscr{O}_{X,x})$$

est un isomorphisme. D'après Kaplansky, à nouveau, $\mathscr{P}_x$ est libre (et $\neq 0$) sur $\mathscr{O}_{X,x}$, donc il existe $p \in \mathscr{P}_x$ et $\phi \in (\mathscr{P}_x)^*$ tels que $\phi(p) = 1$, et comme $\mathscr{P}_x^* = \mathscr{P}^* \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X,x}$,

(18) N.D.E. : cf. I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Maths. **68** (1958), 372–377 ; voir aussi [**BAC**], § II.3, Ex. 3.

(19) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

il existe un voisinage ouvert U de x tels que p et ϕ proviennent de sections $\widetilde{p} \in \mathscr{P}(\mathrm{U})$ et $\widetilde{\phi} \in \mathscr{P}^*(\mathrm{U})$, alors l'égalité $\widetilde{\phi}(\widetilde{p}) = 1$ montre que $\widetilde{p}_y \neq 0$ pour tout $y \in \mathrm{U}$.

2.2. Les notations étant toujours celles de 2.1, il est clair que G' est un k-schéma réduit. Le lemme 2.1.2 montre que $\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}'$ est connexe, de sorte que $(\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}}$ est le sous-schéma réduit de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ qui a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine. En particulier, le morphisme multiplication $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme $\mu' : (\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}} \to \mathrm{G}'$ qui fait de G' un groupe dans $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

2.2.bis. — [20] On rappelle (cf. Exp. V) que, si P est un schéma, on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'espace topologique sous-jacent à P. Alors, on définit un sous-A-foncteur G^0 de G en posant, pour tout A-schéma S,

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subset \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soit $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'inversion ; comme $c(\underline{\mathrm{G}'}) = \underline{\mathrm{G}'}$, on a $c \circ u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ pour tout $u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$. D'autre part, si $u, v \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$, alors $u \boxtimes v$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans le sous-espace de $\underline{\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}}$ formé des points dont les deux projections appartiennent à $\underline{\mathrm{G}'}$; ce sous-espace s'identifie à l'espace sous-jacent à $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}'$, qui est connexe d'après le lemme 2.1.2. Par conséquent, $\mu \circ (u \boxtimes v)$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans $\underline{\mathrm{G}'}$. Ceci montre que G^0 est un sous-A-foncteur *en groupes* de G.

Si la composante connexe de e est un *ouvert* de $\underline{\mathrm{G}}$, alors le sous-foncteur G^0 est *représentable* par le sous-schéma induit par G sur cet ouvert, qui est donc un *sous-schéma en groupes* de G ; on le notera également G^0. Dans ce cas, avec les notations de 2.1, on a $\mathrm{G}' = (\mathrm{G}^0)_{\text{réd}}$ et les espaces topologiques $\underline{\mathrm{G}'}$ et $\underline{\mathrm{G}^0}$ coïncident. [21]

2.3. Conformément à nos conventions de 1.1, nous supposons de nouveau à partir de maintenant que G est *localement de type fini* sur A. Alors G est localement noethérien, donc *localement connexe* [22], donc : *toute composante connexe de* G *est ouverte.*

Nous noterons alors G^0 le sous-schéma induit par G sur la composante connexe $\underline{\mathrm{G}'}$ de l'élément neutre. D'après 2.2.bis, G^0 est un *sous-schéma en groupes* de G que nous appellerons *la composante neutre de* G ; pour tout A-schéma S on a donc : 299

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subset \underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soient G^α une composante connexe quelconque de G et $\nu^\alpha : \mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ le morphisme défini par les égalités

$$\nu^\alpha(\mathrm{S})(g, \gamma) = g\gamma g^{-1},$$

pour tout $\mathrm{S} \in (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$, $g \in \mathrm{G}^\alpha(\mathrm{S})$, $\gamma \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$.

---

[20] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, afin de faire le lien avec $\mathrm{VI_B}$, § 3.

[21] N.D.E. : Dans cet exposé, la notation G^0 est réservée au cas où la composante connexe de e est ouverte ; dans $\mathrm{VI_B}$, § 3, cette composante connexe sera notée $\underline{\mathrm{G}^0}$ dans tous les cas. C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec ce qui précède lorsque la composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-schéma en groupes *ouvert* G^0 de G.

[22] N.D.E. : En effet, dans un espace noethérien, les composantes connexes sont en nombre fini, donc chacune est *ouverte* ; voir aussi EGA I, 6.1.9.

Si e est l'origine de G, la restriction de ν^α à $\mathrm{G}^\alpha \times_\mathrm{A} \{e\}$ est le morphisme nul ; comme $\mathrm{G}^\alpha \times_\mathrm{A} \mathrm{G}^0$ est connexe d'après 2.1.2, on voit que ν^α se factorise à travers G^0. Donc, pour tout A-schéma S, $\mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est un sous-groupe invariant de G(S). On a donc obtenu la proposition suivante : [23]

Proposition 2.3.1. — *Soit* G *un* A*-groupe localement de type fini. Alors la composante neutre* G^0 *est un sous-schéma en groupes* ouvert et invariant *dans* G.

Proposition 2.4. — *Soit* G *un* A*-groupe localement de type fini.*

(i) G^0 *est irréductible et* $\mathrm{G}^0 \otimes_\mathrm{A} k$ *est* géométriquement irréductible *sur* k.

(ii) G^0 *est* quasi-compact, *donc* de type fini *sur* A.

[24] *Démonstration.* (i) Comme G^0 et $\mathrm{G}^0 \otimes_\mathrm{A} k$ ont même espace topologique sous-jacent, il suffit de montrer la seconde assertion. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. D'après 2.2, $(\mathrm{G} \otimes_\mathrm{A} \overline{k})_{\mathrm{réd}}$ est un $\overline{k}$-groupe localement de type fini et réduit, donc lisse sur $\overline{k}$ (1.3.1). A fortiori les anneaux locaux de $(\mathrm{G} \otimes_\mathrm{A} \overline{k})_{\mathrm{réd}}$ sont intègres, donc, [25] puisque $\mathrm{G} \otimes_\mathrm{A} \overline{k}$ est localement noethérien, les composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_\mathrm{A} \overline{k}$ sont irréductibles (cf. EGA I, 6.1.10). En particulier, la composante connexe $\mathrm{G}^0 \otimes_\mathrm{A} \overline{k}$ (cf. 2.1.1) est irréductible.

(ii) Montrons maintenant que G^0 est de type fini sur A. Comme G^0 est localement de type fini sur A, il suffit de prouver que G^0 est quasi-compact. Comme G^0 est irréductible, ceci découle de 0.5.1.

300 ***Corollaire 2.4.1***. — *Toute composante connexe de* G *est* irréductible, [26] de type fini *sur* A, [27] *et de même dimension que* G^0.

On peut supposer en effet A égal à son corps résiduel k. Soit alors C une composante connexe de G, x un point fermé de C, $\kappa(x)$ le corps résiduel de x et k' une extension normale de k contenant $\kappa(x)$ et de degré fini sur k. La projection canonique π : $\mathrm{C} \otimes_k k' \to \mathrm{C}$ est ouverte et fermée ; [28] par conséquent, si C' est une composante connexe de $\mathrm{C} \otimes_k k'$, la projection $\mathrm{C}' \to \mathrm{C}$ est surjective, donc C' contient un point $y \in \pi^{-1}(x)$, et un tel point est rationnel sur k' (cf. la démonstration de 1.2), de sorte que C' est l'image par la translation r_y de $\mathrm{G}^0 \otimes_k k'$. Or $\mathrm{G}^0 \otimes_k k'$ est de type fini sur k', d'après 2.4, et $\pi^{-1}(x)$ est fini (de cardinal $\leqslant [k' : k]$), donc $\mathrm{C} \otimes_k k'$ est de type fini sur k', et donc C est de type fini sur k.

[23] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 2.3.1, pour mettre en évidence cet énoncé. Notons de plus que G^0 est même un sous-groupe *caractéristique* de G, cf. 2.6.5 (ii).

[24] N.D.E. : Dans l'énoncé, on a remplacé « G^0 est géométriquement irréductible » par « $\mathrm{G}^0 \otimes_\mathrm{A} k$ est *géométriquement irréductible* sur k », et l'on a détaillé la démonstration.

[25] N.D.E. : On a détaillé l'original, en ajoutant la référence à EGA I, 6.1.10.

[26] N.D.E. : On prendra garde qu'une composante connexe non neutre n'est pas *géométriquement connexe* en général. Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, le groupe $\boldsymbol{\mu}_{3,\mathbb{R}}$, représenté par $\mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^3 - 1)$, a deux composantes connexes : $\{e\} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ et $\mathrm{C} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$, et $\mathrm{C} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ a deux composantes.

[27] N.D.E. : On a ajouté l'assertion qui suit, cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.5.

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

D'autre part, comme $G^0 \otimes_k k'$ est irréductible, d'après 2.4, il en est de même de C', [29] et donc aussi de C, puisque la projection $C' \to C$ est surjective,

Enfin, on a vu plus haut que $C \otimes_k k'$ est réunion disjointe d'un nombre fini de translatés de $G^0 \otimes_k k'$. Comme la dimension est invariante par extension du corps de base (cf. EGA IV_2, 4.1.4), il en résulte que C est de même dimension que G^0. (De plus, d'après EGA IV_2, 5.2.1, on a $\dim_g G = \dim G^0$ pour tout point $g \in G$.)

2.5. On a ajouté ce paragraphe. Les résultats qui suivent apparaissent dans l'Exp. VI_B, mais auraient pu (ou dû) figurer dans VI_A, et il est utile d'en disposer dès à présent, afin de préciser le théorème 3.2 plus bas.

Lemme 2.5.1. — *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local artinien, et* $k = A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel.*

(i) *Si* X *est un* A*-schéma tel que* $X \otimes_A k$ *soit localement de type fini* (*resp. de type fini*) *sur* k*, alors il en est de même de* X *sur* A.

(ii) *Soit* $u : X \to Y$ *un morphisme de* A*-schémas. Si* $u \otimes_A k$ *est une immersion* (*resp. une immersion fermée*)*, il en est de même de* u.

Démonstration. (i) Supposons $X \otimes_A k$ localement de type fini sur k. Soit $U = \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine de X. Par hypothèse, il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de B dont les images engendrent $B/\mathfrak{m}B$ comme k-algèbre, et il résulte du « lemme de Nakayama nilpotent » que les x_i engendrent B comme A-algèbre. Ceci prouve que X est localement de type fini sur A. Si de plus $X \otimes_A k$ est quasi-compact, il est en de même de X (qui a même espace topologique sous-jacent), et donc X est de type fini sur A. Ceci prouve (i).

Prouvons (ii). Supposons que $u \otimes_A k$ soit une immersion (resp. une immersion fermée). Alors u est un homéomorphisme de X sur une partie localement fermée (resp. fermée) de Y et, pour tout $x \in X$, le morphisme d'anneaux $\phi_x : \mathscr{O}_{Y,u(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est tel que $\phi_x \otimes_A k$ soit surjectif. D'après le lemme de Nakayama nilpotent, il en résulte que ϕ_x est surjectif, donc u est une immersion (resp. une immersion fermée).

Proposition 2.5.2. — *Soit* A *un anneau local artinien de corps résiduel* k *et soit* u : $G \to H$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-schémas en groupes* localement de type fini.

(a) *L'ensemble* $u(G)$ *est un fermé de* H*, dont les composantes connexes sont irréductibles et toutes de même dimension.*

(b) *On a* $\dim G = \dim u(G) + \dim \operatorname{Ker}(u)$.

(c) *Si* u *est un monomorphisme, c'est une immersion fermée.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $A = k$. De plus, comme les propriétés envisagées sont stables par descente (fpqc), et comme la dimension est invariante par extension du corps de base, on peut supposer k algébriquement clos.

Prouvons (a). Notons C le sous-schéma réduit de H dont l'espace topologique sous-jacent est $\overline{u(G)}$. Comme $u(G)$ est stable par le morphisme d'inversion de H, il en est

[29] N.D.E. : On a simplifié l'original ici.

de même de C. D'autre part, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{C}$ est quasi-compact et dominant donc, d'après EGA IV_2, 2.3.7, il en est de même de $u \times_k \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ et de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \times_k u$, donc de leur composée $u \times_k u : \mathrm{G} \times_k \mathrm{G} \to \mathrm{C} \times_k \mathrm{C}$. Par conséquent, la multiplication de H envoie $\mathrm{C} \times_k \mathrm{C}$ dans C, et donc C est un sous-schéma en groupes de H.

Donc, remplaçant H par C, on se ramène au cas où u est dominant. Alors $\mathrm{G}(k)$ est dense dans H, donc rencontre toute composante connexe de H, donc opère transitivement dans l'ensemble de ces composantes connexes. Il suffit donc de montrer que $u(\mathrm{G})$ contient H^0. Remplaçant G par $u^{-1}(\mathrm{H}^0)$, on peut donc supposer que $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0$; dans ce cas, d'après 2.4, H est irréductible et de type fini sur k, donc noethérien. D'autre part, u est localement de type fini (cf. EGA I, 6.6.6) et quasi-compact, donc de type fini. Par conséquent, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.5), $u(\mathrm{G})$ est une partie constructible (et dense) de $\mathrm{H} = \overline{u(\mathrm{G})}$, donc contient un ouvert dense U de H (cf. EGA 0_{III}, 9.2.2). Alors, d'après 0.5, on a $\mathrm{H} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{U} \subset u(\mathrm{G})$, d'où $u(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$. Compte tenu de 2.4.1, ceci prouve l'assertion (a).

Prouvons (b). Rappelons tout d'abord que le foncteur $\mathrm{Ker}(u)$ (cf. I, 2.3.6.1) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Comme u est de type fini, $\mathrm{Ker}(u)$ est de type fini sur k. D'autre part, remplaçant H par le sous-schéma fermé réduit $\overline{u(\mathrm{G})}$, on peut supposer u surjectif. Notons u^0 la restriction de u à G^0. Comme G et $\mathrm{Ker}(u)$ sont équidimensionnels, et comme $\mathrm{Ker}(u)^0 \subset \mathrm{Ker}(u^0)$, on se ramène au cas où G et donc aussi H, sont irréductibles.

Alors, d'après EGA IV_3, 9.2.6.2 et 10.6.1 (ii), l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est surjectif, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, donc contient un point fermé x de G, puisque G est un schéma de Jacobson (cf. EGA IV_3, 10.4.8). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u)$ sur $u^{-1}(u(x))$, d'où :

$$\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}.$$

Prouvons (c), en suivant [**DG70**], I, § 3.4. (Une autre démonstration est donnée dans l'Exp. VI_{B}, 1.4.2.) On suppose que u est un monomorphisme. Si C est une composante connexe de G, il existe un point fermé $x \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{C} = r_x(\mathrm{G}^0)$, et si l'on note u_{C} (resp. u^0) la restriction de u à C (resp. à G^0), on a $u_{\mathrm{C}} = r_{u(x)} \circ u^0 \circ r_x^{-1}$, donc il suffit de montrer que u^0 est une immersion fermée. On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$, de sorte que G est irréductible et de type fini sur k.

Soit ξ le point générique de G, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est un anneau local artinien, notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. D'autre part, soient $h = u(\xi)$, $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{H},h}$, et $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}/\mathfrak{n}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$. Comme u est un monomorphisme, il en est de même du morphisme $u_h : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(h))$ déduit par changement de base, donc le morphisme de multiplication $\mathrm{A} \otimes_{\kappa(h)} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ est un isomorphisme (cf. EGA I, 5.3.8), d'où $\mathrm{A} = \kappa(h)$. D'après le lemme de Nakayama (puisque $\mathfrak{n}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est contenu dans $\mathfrak{m}$, donc nilpotent), il en résulte que le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},h} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est surjectif.

Soient alors V un ouvert affine de H contenant h, U un ouvert affine $\neq \varnothing$ de G contenu dans $u^{-1}(\mathrm{V})$, $\phi : \mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ le morphisme de k-algèbres induit par u, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ correspondant à η, et $\mathfrak{q} = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Comme G est de type fini sur k, $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ est engendré comme k-algèbre par un nombre fini d'éléments

$a_1, \dots, a_n$. D'après ce qui précède, il existe des éléments $b_1, \dots, b_n$ et s dans $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$ tels que $s \notin \mathfrak{q}$ et qu'on ait dans $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_{\mathfrak{p}}$ les égalités $a_i/1 = \phi(b_i)/\phi(s)$. Il existe donc des éléments $t_1, \dots, t_n$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) - \mathfrak{p}$ tels qu'on ait $t_i(a_i\phi(s) - \phi(b_i)) = 0$. Alors, posant $t = t_1 \dots t_n \phi(s) \in \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) - \mathfrak{p}$, les égalités $a_i/1 = \phi(b_i)/\phi(s)$ ont déjà lieu dans $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_t$ et, comme $t \in \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = k[a_1, \dots, a_n]$, il existe $b \in \mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$ tel que $t/1 = \phi(b)/\phi(s)^r$, pour un certain $r \in \mathbb{N}$. Par conséquent, ϕ induit une surjection de $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})_{sb}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_t$, et donc u est une immersion locale au point ξ.

L'ouvert W de G formé des points en lesquels u est une immersion locale est donc non vide. Comme G est un schéma de Jacobson, alors W contient un point fermé y et, pour montrer que $\mathrm{W} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que tout point fermé de G appartient à W. Or tout point fermé x est l'image de y par la translation $r_x \circ r_y^{-1}$, donc appartient à W, d'où $\mathrm{W} = \mathrm{G}$. Ceci prouve que u est une immersion locale.

Comme G est irréductible, il en résulte que u est une immersion. En effet, pour tout $x \in \mathrm{G}$, soient U_x et V_x des ouverts de G et H tels que $x \in \mathrm{U}_x$ et que u induise une immersion fermée de U_x dans V_x. Comme U_x est dense dans G, $u(\mathrm{U}_x)$ l'est dans $u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{V}_x$, et comme $u(\mathrm{U}_x)$ est fermé dans V_x, on a donc $u(\mathrm{U}_x) = \mathrm{V}_x$. Comme de plus u est injectif, on a $\mathrm{U}_x = u^{-1}(\mathrm{V}_x)$, et il en résulte que u induit une immersion fermée de G dans le sous-schéma ouvert de H recouvert par les V_x. Donc $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion. Mais on a déjà vu que $u(\mathrm{G})$ est un fermé de H, donc u est une immersion fermée.

Lemme 2.5.3. — [30] *Soient* A *un anneau local artinien,* k *son corps résiduel,* G *un* A-*groupe* plat*,* X *un* A-*schéma muni d'une action à gauche* $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *de* G *et d'une section* $s_0 : \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{X}$. (*Ceci est le cas, par exemple, si* G' *est un second* A-*groupe et si l'on s'est donné un morphisme de* A-*groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$.)

Soit ϕ *le morphisme* $\mu \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times s_0)$ *de* $\mathrm{G} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{A}$ *vers* X. *Si* ϕ *est plat en un point* g *de* G, *alors* ϕ *est plat.*

Démonstration. Comme G est plat sur A alors, d'après le critère de platitude par fibres (EGA IV_3, 11.3.10.2), il suffit de montrer que $\phi \otimes_{\mathrm{A}} k$ est plat, donc on peut supposer que $\mathrm{A} = k$. Dans ce cas, la donnée de s_0 équivaut à celle d'un k-point $x_0 \in \mathrm{X}(k)$, et ϕ est le morphisme $h \mapsto hx_0$.

Soit alors $h \in \mathrm{G}$, montrons que ϕ est plat au point h. Soit K une extension de k contenant une copie de $\kappa(g)$ et de $\kappa(h)$; on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{K}}"] \arrow[d] & \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \arrow[d] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont fidèlement plates. Donc, d'après V 7.4 (i), ϕ_{K} est plat en tout point $g' \in \mathrm{G}_{\mathrm{K}}$ au-dessus de g, et pour montrer que ϕ est plat en h, il suffit de montrer que ϕ_{K} est plat en un point h' au-dessus de h. On est donc ramené

[30] N.D.E. : On ne fait pas d'hypothèses de finitude dans cet énoncé ; ceci sera utile plus loin (cf. 6.2 et VI_{B}, § 12).

au cas où g et h sont rationnels. Soient alors $u = hg^{-1}$ et ℓ_u (resp. μ_u) la translation à gauche de G (resp. de X) définie par u ; comme $\phi \circ \ell_u = \mu_u \circ \phi$, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{G},h} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \\ \mathscr{O}_{\mathrm{X},hx_0} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & \mathscr{O}_{\mathrm{X},gx_0} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes. Comme le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},gx_0} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ est plat, le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},hx_0} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},h}$ l'est aussi.

Proposition 2.5.4. — *Soient* A *un anneau local artinien,* k *son corps résiduel,* G *un* A-*groupe* localement de type fini*,* $\mathrm{X} \neq \varnothing$ *un* A-*schéma* localement de type fini *muni d'une action à gauche de* G*. On suppose que le morphisme* $\phi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X}$ *défini ensemblistement par* $(g, x) \mapsto (gx, x)$*, est surjectif. Alors :*

(i) *Les composantes connexes de* X *sont de type fini, irréductibles et toutes de même dimension.*

(ii) *Plus précisément, soient* $\overline{k}$ *une clôture algébrique de* k *et* x *un point fermé de* $\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ *; son stabilisateur* F *est un sous-schéma en groupes fermé de* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$*, et la dimension des composantes irréductibles de* X *est* $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}$*.*

Tenant compte du lemme 2.5.1, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Supposons d'abord k *algébriquement clos*. Alors $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ est un k-groupe localement de type fini et donc, remplaçant G par $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ et X par $\mathrm{X}_{\mathrm{réd}}$, on peut supposer G et X réduits.

Comme $\mathrm{G} \times_k \mathrm{X}$ est localement de type fini sur k, alors ϕ est localement de type fini (cf. EGA I, 6.6.6 (v)), donc localement de présentation finie puisque $\mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$ est localement noethérien. Soit x un point rationnel de X, alors le morphisme $\phi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$, déduit de ϕ par changement de base, est surjectif et localement de présentation finie. Si η est un point maximal de X, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\eta}$ est un corps (puisque X est réduit), donc ϕ_x est plat en tout point de G au-dessus de η. Donc, d'après le lemme 2.5.3, ϕ_x est plat. Par conséquent, $\phi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc ouvert (cf. EGA IV_2, 2.4.6). Comme G^0 est ouvert dans G, irréductible et quasi-compact (d'après 2.4), alors chaque orbite $\mathrm{G}^0 x = \phi_x(\mathrm{G}^0)$, pour x parcourant les points rationnels de X, est un ouvert de X, irréductible et quasi-compact, donc de type fini sur k (puisque X est localement de type fini sur k).

Comme tout ouvert non vide de X contient un point rationnel, il en résulte que X est recouvert par ces ouverts. De plus, deux tels ouverts sont soit disjoints, soit égaux. En effet, si $\phi_x(\mathrm{G}^0) \cap \phi_y(\mathrm{G}^0)$ est non vide, il contient un point rationnel z et il existe donc deux points rationnels $g, h \in \mathrm{G}^0$ tels que $gx = z = hy$, d'où $x = g^{-1}z$ et $y = h^{-1}z$ et donc $\phi_x(\mathrm{G}^0) = \phi_z(\mathrm{G}^0) = \phi_y(\mathrm{G}^0)$. Il en résulte que les orbites $\phi_x(\mathrm{G}^0)$ sont aussi fermées, et sont donc à la fois les composantes connexes et les composantes irréductibles de X.

Enfin, soient x, y deux points rationnels de X. Comme ϕ_x est surjectif, il existe un point rationnel $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$ et, comme G^0 est un sous-groupe invariant de

G, alors l'orbite G^0y est l'image de G^0 par la translation ℓ_g de X, de sorte que G^0y et G^0x ont même dimension.

De plus, d'après I, 2.3.3.1, le stabilisateur de x est représenté par le sous-schéma fermé F de G défini par le carré cartésien ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d, "\phi_x"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{X} \end{tikzcd} .$$

Alors F est un k-groupe localement de type fini, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}^0$ est un k-groupe de type fini contenant F^0, et d'après 2.4.1, F et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}^0$ sont équidimensionels, de même dimension que F^0. Soit $\mathrm{C} = \phi_x(\mathrm{G}^0)$ la composante irréductible de X contenant x. En procédant comme dans la démonstration du point (b) de 2.5.2, on obtient que $\dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{G}^0 - \dim \mathrm{F}^0 = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}$.

Dans le cas général (i.e. pour k un corps arbitraire), soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soient C une composante connexe de X et C′ une composante connexe de $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$, alors C′ est une composante connexe de $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \otimes_k \overline{k}$. Le morphisme $\pi : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est ouvert (cf. EGA IV_2, 2.4.10), et comme il est entier, il est aussi fermé ; par conséquent $\pi(\mathrm{C}') = \mathrm{C}$. Comme C′ est irréductible et quasi-compacte, alors C est irréductible et quasi-compacte, donc de type fini sur k (puisque X est localement de type fini sur k).

Enfin, comme la dimension est invariante par extension du corps de base (cf. EGA IV_2, 4.1.4), $\dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{C}'$, et comme toutes les composantes irréductibles de X′ ont la même dimension, il en est de même pour celles de X.

2.6. Compléments. — On a ajouté ce paragraphe, tiré de [**Per75**] II, §§ 1–2, avec des compléments dus à O. Gabber. [31] Ceci montre que les résultats précédents sont valables pour tout schéma en groupes G sur un corps k. (Ceci sera utilisé dans les sections 5, 6 et 7 de l'Exp. $\mathrm{VI_B}$.)

On fixe un corps k. Commençons par le lemme suivant (*loc. cit.*, II 2.1.1), qui n'apparaît pas explicitement dans EGA IV_2, § 4.4 (bien qu'on puisse sans doute le lire entre les lignes au début de *loc. cit.*, § 4.4.1).

Lemme 2.6.0. — *Soient* X *un k-schéma irréductible,* K *une extension de k,* X′ *une composante irréductible de* $\mathrm{X_K}$*. La projection* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est surjective.*

En effet, soient B une base de transcendance de K sur k et $\mathrm{L} = k(\mathrm{B}) \subset \mathrm{K}$. D'après EGA IV_2, 4.3.2 et 4.4.1, $\mathrm{X_L}$ est irréductible et X′ domine $\mathrm{X_L}$. Le morphisme $\mathrm{X}' \to \mathrm{X_L}$ est donc entier et dominant, donc surjectif. Comme $\mathrm{X_L} \to \mathrm{X}$ est surjectif (*loc. cit.*, 4.4.1), $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ l'est aussi.

Pour la suite de 2.6, on fixe un k-schéma en groupes G et une opération $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ de G sur un k-schéma X vérifiant la condition suivante :

$(\star)$ le morphisme $\Phi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X},\ (g, x) \mapsto (gx, x)$ est surjectif

[31] N.D.E. : Ces résultats nous ont été communiqués par O. Gabber, en particulier 2.6.6 qui joue un rôle important dans la section 5 de $\mathrm{VI_B}$.

(c'est le cas en particulier pour G opérant sur lui même par translations à gauche). On dira alors, pour abréger : « Soit X un G-schéma vérifiant $(\star)$ ». Enfin, on note k' la clôture parfaite de k.

Proposition 2.6.1. — *Soit* X *un* G*-schéma vérifiant* $(\star)$.

(i) X *est* géométriquement ponctuellement irréductible *sur k, i.e. pour toute extension* K *de k, chaque $x \in \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ appartient à une unique composante irréductible de* X_{K}.

(ii) *Chaque anneau local de* $(\mathrm{X}_{k'})_{\text{réd}}$ *est* normal.

(iii) *Soient η un point maximal de* $(\mathrm{X}_{k'})_{\text{réd}}$, $\mathrm{C} = \overline{\{\eta\}}$*, et* L *la clôture algébrique de k dans $\kappa(\eta)$. Alors* C *est un* L*-schéma, et est* géométriquement irréductible sur L (*i.e.* $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{K}$ *est irréductible, pour toute extension* K *de* L).

(iv) *En particulier, si x est un point rationnel de* X*, alors la composante irréductible de* X *contenant x est géométriquement irréductible sur k.*

Démonstration. (i) Comme l'hypothèse $(\star)$ est préservée par tout changement de base $k \to \mathrm{K}$, il suffit de montrer que chaque $x \in \mathrm{X}$ appartient à une unique composante irréductible de X. Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ est un homéomorphisme universel, on peut de plus supposer que k est parfait. On peut alors supposer G et X réduits. Soient η un point maximal de X et z un point arbitraire de $\mathrm{Z} = \overline{\{\eta\}}$. Comme X est réduit, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\eta}$ égale $\kappa(\eta)$, et puisque k est parfait alors, pour toute extension K de k, $\kappa(\eta) \otimes_k \mathrm{K}$ est normal (cf. EGA IV_2, 6.14.2), donc tout point de X_{K} au-dessus de η est normal.

Comme Φ est surjectif, il existe un point γ de $\mathrm{G} \times \mathrm{X}$ tel que $\Phi(\gamma)$ ait pour projections z et η. Soit $\mathrm{K} = \kappa(\gamma)$; il existe alors des points rationnels g et η' de G_{K} et X_{K}, tels que η' soit au-dessus de η et $z' = g\eta'$ au-dessus de z. D'après ce qui précède, η' est un point normal de X_{K} donc il en est de même de z'. Puisque $\pi : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$ est plat, il en résulte que $z = \pi(z')$ est un point normal de X (cf. EGA IV_2, 2.1.13). Ceci prouve (ii) et (i).

La première assertion de (iii) découle alors de (ii). Puis, comme L est algébriquement clos dans $\kappa(\eta)$, C est géométriquement irréductible sur L, d'après EGA IV_2, 4.5.9.

Enfin, si X possède un point rationnel x, il résulte de (iii) que $\mathrm{L} = k$, et donc X est géométriquement irréductible sur k. Ceci peut aussi se voir directement comme suit (cf. [**Per75**], II 2.1) : soit C la composante irréductible de X contenant x et soit K une extension de k, X_{K} possède un unique point e_{K} au-dessus de e et, d'après (i), e_{K} appartient à une unique composante irréductible C' de X_{K} ; d'autre part, d'après 2.6.0, toute composante irréductible de C_{K} contient e_{K}, donc égale C'.

Notation. — Notons provisoirement C^0 le sous-schéma fermé réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'unique composante irréductible de G contenant l'élément neutre e.

Corollaire 2.6.2. — C^0 *est* géométriquement irréductible sur k *et est ensemblistement stable par la loi de groupe, i.e.* $(\mathrm{C}^0_{k'})_{\text{réd}}$ *est un sous-groupe de* $(\mathrm{G}_{k'})_{\text{réd}}$. *Par conséquent,* C^0 *est* quasi-compact.

En effet, d'après 2.6.1, C^0 est géométriquement irréductible sur k, donc $C^0 \times C^0$ est irréductible, donc $\nu(C^0 \times C^0) \subset C^0$, où ν désigne le morphisme $(g,h) \mapsto gh^{-1}$. Comme $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ est un homéomorphisme universel, on a la même conclusion pour $C^0_{k'}$ puis pour $H = (C^0_{k'})_{\text{réd}}$ et donc, puisque $H \times_{k'} H$ est réduit, ν induit un morphisme $H \times_{k'} H \to H$, i.e. H est un sous-groupe de $(G_{k'})_{\text{réd}}$. Par conséquent, d'après 0.5.1, H (et donc aussi C^0) est quasi-compact.

Rappel 2.6.3. — Soit Y un schéma. Rappelons (EGA 0_{III}, 9.1.1) qu'une partie E de Y est dite rétrocompacte si l'inclusion $E \hookrightarrow Y$ est quasi-compacte, et que, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (v) et 1.10.1, si U est un ouvert rétrocompact de Y, alors l'adhérence $\overline{U}$ de U est la réunion des adhérences $\overline{\{y\}}$ des points $y \in U$, et bien sûr il suffit de prendre y parcourant les points *maximaux* de U, i.e. les points maximaux de Y contenus dans U.

Par conséquent, si Y est *quasi-séparé* et si η est un point maximal de Y, alors l'intersection des voisinages fermés de η égale $\overline{\{\eta\}}$: en effet, si $y \in Y - \overline{\{\eta\}}$, alors y est contenu dans un ouvert affine V ne contenant pas η ; puisque Y est quasi-séparé, V est rétrocompact, donc $\overline{V}$ est la réunion des $\overline{\{\xi\}}$, pour ξ parcourant les points maximaux de Y appartenant à V, et donc $\eta \notin \overline{V}$, i.e. $Y - V$ est un voisinage fermé de η ne contenant pas y.

Proposition 2.6.4. — *Soit* X *un* G*-schéma vérifiant* $(\star)$ *et soit* U *un ouvert de* X.

(i) C^0U *est un ouvert de* X*, égal à la réunion des composantes irréductibles de* X *dont le point générique appartient à* U.

(i′) *Par conséquent, si* X *est irréductible, il est quasi-compact.*

(ii) *Si de plus* U *est rétrocompact dans* X*, alors* C^0U *égale* $\overline{U}$*, donc est une partie ouverte et fermée de* X.

Démonstration. (i) D'abord, C^0U est un ouvert, puisque c'est la réunion, pour $g \in C^0$, des projections des ouverts $g \cdot U_{\kappa(g)} \subset X_{\kappa(g)}$ et que chaque projection $X_{\kappa(g)} \to X$ est ouverte.

Pour démontrer la seconde assertion de (i), on peut remplacer k par k' (puisque $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ est un homéomorphisme universel), donc supposer k *parfait.* On peut alors supposer G et X réduits, donc géométriquement réduits.

Soit η un point maximal de X contenu dans U et soit Z son adhérence. Considérons le morphisme $\mu' : C^0 \times Z \to X$. Comme C^0 est géométriquement irréductible, $C^0 \times Z$ est irréductible, notons γ son point générique. Puisque μ' envoie le point $\varepsilon(\eta)$ (où ε désigne la section unité de C^0) sur η, alors γ est envoyé sur une générisation de η, donc sur η. Donc μ' envoie l'espace sous-jacent à $C^0 \times Z$ dans Z et donc, puisque $C^0 \times Z$ est réduit, μ' se factorise par Z.

Soit maintenant $z \in Z$. Posons $K = \kappa(z)$, Alors le morphisme $\mu_z : G_K \to X_K$, $h \mapsto h \cdot z$ est surjectif; soit α un point maximal de X_K, l'anneau local $\mathscr{O}_{X_K,\alpha}$ est un corps, puisque X_K est réduit, donc μ_z est plat en tout point de G_K au-dessus de α, donc μ_z est *plat*, d'après le lemme 2.5.3.

D'autre part, μ_z envoie le point générique ω de C^0_K sur un point $t \in Z_K$. Soit β un point maximal de Z_K tel que $t \in \overline{\{\beta\}}$; comme μ_z est plat, il existe une générisation ξ de

ω telle que $\mu_z(\xi) = \beta$, et comme ω est un point maximal de $\mathrm{G_K}$, on a nécessairement $\xi = \omega$, et donc $\mu_z(\omega)$ égale β, qui est au-dessus de η (puisque $\mathrm{Z_K} \to \mathrm{Z}$ est plat).

Posons $\mathrm{L} = \kappa(\omega)$ et soient ω_{L} et z_{L} les L-points déduits de ω et z, alors $\omega_{\mathrm{L}} \cdot z_{\mathrm{L}} = \beta'$ est un point de $\mathrm{Z_L}$ au-dessus de β, et donc $z_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}}^{-1} \cdot \beta' \in \mathrm{C}^0_{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{U_L}$, d'où $z \in \mathrm{C}^0 \cdot \mathrm{U}$. Ceci prouve (i).

Comme C^0 est quasi-compact, d'après 2.6.2, le point (i′) en découle : si X est irréductible et si U est un ouvert affine non vide, alors X égale $\mathrm{C}^0\mathrm{U}$, i.e. est l'image du morphisme $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{U} \to \mathrm{X}$, donc est quasi-compact. Enfin, si U est rétrocompact dans X alors (cf. 2.6.3) $\overline{\mathrm{U}}$ est la réunion des $\overline{\{\eta\}}$, pour η parcourant les points maximaux de X contenus dans U, donc égale $\mathrm{C}^0\mathrm{U}$. Ceci prouve (ii).

On obtient alors le résultat suivant ([**Per75**] II Th. 2.4, voir aussi [**Per76**], Prop. 4.1.1) :

Théorème 2.6.5. — *Soient k un corps,* G *un k-schéma en groupes.*

(i) *Il existe un unique sous-schéma en groupes* G^0 *de* G*, appelé* composante neutre *de* G*, tel que :*

(a) *L'espace sous-jacent à* G^0 *est la composante irréductible de l'élément neutre.*

(b) $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ *est une immersion fermée* plate*, i.e.* $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}^0,g}$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}^0$.

(ii) *De plus,* G^0 *est quasi-compact, géométriquement irréductible, et est un sous-groupe caractéristique de* G.

(iii) *Si* G *est connexe, alors* $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$.

Démonstration. (i) Rappelons d'abord que G est séparé (0.3), donc a fortiori quasi-séparé. Soit U un ouvert affine de G contenant le point générique ω de C^0. D'après 2.6.3 et 2.6.4, $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{C}^0\mathrm{U}$ est à la fois ouvert et fermé, et $\mathrm{C}^0 = \overline{\{\omega\}}$ est ensemblistement l'intersection de ces parties ouvertes et fermées.

Pour U parcourant les ouverts affines contenant ω, on obtient un système projectif de G-schémas $\overline{\mathrm{U}}$, dont les morphismes de transition sont affines (puisque ce sont des immersions fermées). On peut donc en former la limite projective G^0 (cf. EGA IV_3, 8.2.2), i.e. pour tout ouvert affine V de G, $\mathrm{G}^0 \cap \mathrm{V}$ est le spectre de l'algèbre

$$\varinjlim_{\mathrm{U}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{U}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) / \sum_{\overline{\mathrm{U}}} \mathrm{I}_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{V}),$$

où $\mathrm{I}_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{V})$ désigne le noyau de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{U}})$. Il en résulte que G^0 a pour espace sous-jacent C^0, et que $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ est une immersion fermée. De plus, pour tout $g \in \mathrm{G}^0$, $\mathscr{O}_{\mathrm{G}^0,g}$ est la limite inductive, pour V parcourant les ouverts affines de G contenant g, des k-algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}^0) = \varinjlim_{\mathrm{U}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{U}})$ et cette double limite inductive s'identifie à

$$\varinjlim_{\mathrm{U}} \varinjlim_{\substack{\mathrm{V} \\ g \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{U}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) = \mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$$

i.e. on a $\mathscr{O}_{\mathrm{G}^0,g} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ (voir aussi EGA IV_2, 5.13.3 (ii)). Donc $i : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ est une immersion fermée plate. Réciproquement, cette condition entraîne que $i^*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{G}^0}$, et donc G^0 est uniquement déterminé par les conditions (a) et (b). Ceci prouve (i).

Les deux premières assertions de (ii) découlent de 2.6.2. Enfin, soient S un k-schéma et ϕ un automorphisme du S-groupe G_{S}. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, ϕ_s envoie $\mathrm{G}^0_{\kappa(s)}$ dans lui-même, donc $\phi(\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}) \subset \mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}$. De plus, l'immersion fermée $i_{\mathrm{S}} : \mathrm{G}^0_{\mathrm{S}} \hookrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ déduite de i par changement de base est plate, donc on a $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}},\phi(z)} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}},\phi(z)}$ pour tout $z \in \mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}$, et donc $\phi \circ i_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers $\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}$. Ceci prouve que G^0 est un sous-groupe caractéristique de G, d'où (ii). Enfin, (iii) est un cas particulier du point (i) de la proposition suivante. (32)

Proposition 2.6.6. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe opérant sur un k-schéma* X *de façon que le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ *soit surjectif. On suppose* X quasi-séparé. *Alors :*

(i) *Toute composante connexe* C *de* X *est* irréductible.

(ii) *Soient η le point générique de* C *et* L *la clôture algébrique de k dans $\kappa(\eta)$. Alors* C *est un* L*-schéma,* géométriquement irréductible sur L*, et le morphisme*

$$\mathrm{G}^0_{\mathrm{L}} \times_{\mathrm{L}} \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C} \times_{\mathrm{L}} \mathrm{C}$$

est surjectif.

(iii) *En particulier, si* C *contient un point rationnel x, alors* C *est géométriquement irréductible sur k et le morphisme* $\phi : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{C}$, $g \mapsto gx$ *est* surjectif.

Démonstration. (i) Soient C une composante connexe de X, Y une composante irréductible de X contenue dans C, η le point générique de Y, et U un ouvert affine de X contenant η. Comme X est quasi-séparé, U est rétrocompact dans X donc, d'après 2.6.4, $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{G}^0\mathrm{U}$ est une partie ouverte et fermée de X qui rencontre C, donc contient C. Or, d'après 2.6.3, l'intersection des $\overline{\mathrm{U}}$, pour U parcourant un système fondamental de voisinages ouverts affines de η, est égale à $\overline{\{\eta\}}$. Il en résulte que $\mathrm{C} = \overline{\{\eta\}}$. Ceci prouve (i).

La première assertion de (ii) (et aussi de (iii)) découle de 2.6.1. Commençons par montrer la seconde assertion de (iii). Notons ω (resp. η) le point générique de G^0 (resp. C). Soient $z \in \mathrm{C}$ et $\mathrm{K} = \kappa(z)$. Comme G^0 (resp. C) est géométriquement irréductible sur k, $\mathrm{G}^0_{\mathrm{K}}$ (resp. C_{K}) est irréductible, notons ξ (resp. β) son point générique. On a vu dans la démonstration de 2.6.4 que le morphisme $\mu_z : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{C}_{\mathrm{K}}$, $h \mapsto h \cdot z$ envoie ξ sur β, et de même on a $\phi(\omega) = \eta$.

Soit $\mathrm{L} = \kappa(\xi)$ et soient $\xi_{\mathrm{L}}, z_{\mathrm{L}}$ les L-points déduits de ξ et z, alors $\xi_{\mathrm{L}} \cdot z_{\mathrm{L}} = \beta'$ est un point de C_{L} au-dessus de $\beta \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}$, donc aussi au-dessus de $\eta \in \mathrm{C}$. Considérons le

(32) N.D.E. : Cette proposition (ainsi que les résultats précédents) nous a été communiquée par O. Gabber, elle sera utilisée pour corriger la démonstration du théorème 5.3 de VI_{B}.

carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} G^0_L \arrow[r, "\phi_L"] \arrow[d, "\pi_{G^0}"'] & C_L \arrow[d, "\pi_C"] \\ G^0 \arrow[r, "\phi"] & C \end{tikzcd} \quad ,$$

comme $\phi_L(\pi_{G^0}^{-1}(\omega)) = \pi_C^{-1}(\eta)$ (cf. EGA I, 3.4.8), il existe $g \in G^0_L$ tel que $\phi_L(g) = \beta'$. On a donc $z_L = \xi_L^{-1} \cdot \phi_L(g) = \phi_L(\xi_L^{-1} g)$, d'où $\phi(\pi_{G^0}(\xi_L^{-1} g)) = \pi_C(z_L) = z$. Ceci prouve que ϕ est surjectif.

Maintenant, prouvons la deuxième assertion de (ii). Il suffit de montrer que, pour tout $z \in C$, le morphisme $\mu_z : G^0_L \otimes_L \kappa(z) \to C \otimes_L \kappa(z)$ est surjectif, mais cela résulte de (iii), puisque z est un point rationnel de $C \otimes_L \kappa(z)$.

Remarque 2.6.7. — Sous les hypothèses de 2.6.6, si $C(k) = \varnothing$, le morphisme $G^0 \times_k C \to C \times_k C$ n'est pas nécessairement surjectif. Par exemple, pour $k = \mathbb{R}$ et $G = \{\pm 1\}_{\mathbb{R}}$, le G-torseur $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est connexe, mais le morphisme $G^0 \times_{\mathbb{R}} X \to X \times_{\mathbb{R}} X$ n'est pas surjectif. (Mais l'on a $L = \mathbb{C}$ et le morphisme $G^0 \times_{\mathbb{R}} X \to X \times_{\mathbb{C}} X$ est un isomorphisme.)

3. Construction de quotients $F\backslash G$ (pour G, F de type fini)

301 **3.1.** Soient A un anneau local artinien et $u : F \to G$ un homomorphisme de A-groupes. Si $\mu : F \times_A F \to F$ et $\nu : G \times_A G \to G$ désignent les morphismes de multiplication et λ le morphisme composé

$$F \times_A G \xrightarrow{u \times G} G \times_A G \xrightarrow{\nu} G \quad ,$$

on rappelle que le quotient à gauche $F\backslash G$ de G par F est le conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/A})$-groupoïde G_* décrit ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} F \times_A F \times_A G \arrow[r, shift left=2, "F\times\lambda"] \arrow[r, "\mu\times G" description] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"'] & F \times_A G \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & G \end{tikzcd}$$

(pr_2 et $\mathrm{pr}_{2,3}$ sont les projections de $F \times_A G$ et $F \times_A (F \times_A G)$ sur les deuxièmes facteurs). Nous dirons que G_* est le groupoïde de base G défini par u (cf. Exp. V, § 2.a ; comme dans l'exposé V, nous ne suivons pas dans cet exposé la convention de IV, 4.6.15).

Comme l'unique A-morphisme $F \to \operatorname{Spec} A$ est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.9), pr_2 est un morphisme ouvert ; il en va donc de même pour λ qui est composé de pr_2 et de l'automorphisme σ de $F \times_A G$ qui est défini par les formules suivantes : $\sigma(S)(x, y) = (x, u(S)(x) \cdot y)$ où S est un A-schéma variable, x et y appartenant à $F(S)$ et $G(S)$. On voit de la même façon que pr_2 et λ sont plats lorsque F est plat sur A.

Remarquons aussi pour terminer ces préliminaires que tout A-morphisme s :
302 $\operatorname{Spec} A \to G$ définit un automorphisme du groupoïde G_* qui induit sur G, $F \times_A G$

et $F \times_A F \times_A G$, les automorphismes r_s, $\mathrm{id}_F \times_A r_s$ et $\mathrm{id}_F \times_A \mathrm{id}_F \times_A r_s$, respectivement. Nous noterons encore r_s cet automorphisme de G_* et nous dirons que r_s est la translation à droite définie par s (confer 0.4).

3.2 Théorème. — *Soient* F *et* G *des groupes* plats et localement de type fini *sur un anneau local artinien* A. *Soit* $u : F \to G$ *un homomorphisme de* A*-groupes* quasi-compact *et de noyau* fini sur A. *Alors :* [33]

(i) *Le quotient à gauche* $F\backslash G$ *de* G *par* F *existe dans* $(\mathbf{Sch}_{/A})$ *et la suite*

$$F \times_A G \overset{\lambda}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{p} F\backslash G$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) *Le morphisme canonique* $p : G \to F\backslash G$ *est* surjectif et ouvert, *et* $F\backslash G$ *est une somme directe de schémas* de type fini *sur* A.

(ii′) *Plus précisément,* $X = F\backslash G$ *est muni d'une action à droite de* G, *telle que* $p(e)\cdot g = p(g)$, *pour tout* $g \in G$ *; par conséquent, les composantes connexes de* X *sont* de type fini *sur* A, irréductibles *et toutes de dimension* $\dim G - \dim F$.

(iii) *Le morphisme canonique* $F \times_A G \to G \times_{(F\backslash G)} G$ *est* surjectif.

(iv) *Si* u *est un* monomorphisme [34], *alors :*

(a) $F \times_A G \xrightarrow{(\lambda,\mathrm{pr}_2)} G \times_{(F\backslash G)} G$ *est un* isomorphisme *et* $G \to F\backslash G$ *est* fidèlement plat et localement de présentation finie.

(a′) $F\backslash G$ *représente le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{F\backslash G}$ *et* $G \to F\backslash G$ *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf).

(b) $F\backslash G$ *est* plat *sur* A, *et est* lisse *sur* A si G l'est.

(c) $u : F \to G$ *est une immersion fermée et* $F\backslash G$ *est* séparé.

(d) *Si, de plus,* F *est un sous-groupe* invariant *de* G, *il existe sur* $F\backslash G$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que* $p : G \to F\backslash G$ *soit un morphisme de* A*-groupes.*

Dans la démonstration de ce théorème, A' désignera une A-algèbre locale, finie et libre sur A. Si R est une relation faisant intervenir A', nous dirons que « $R(A')$ est vraie quand A' est assez grande » s'il existe une algèbre A_1 locale, finie et libre sur A telle que la relation $R(A')$ soit vérifiée pour chaque algèbre A' locale, finie et libre sur **303**
A_1.

Nous allons d'abord prouver le théorème lorsque F *et* G *sont de type fini sur* A.

3.2.1. — Supposons un instant que tout point de G possède un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par G_* sur W possède une quasi-section (cf. V § 6). Alors, d'après V 6.1, on a les assertions (i), (ii), (iii) et (iv)(a), et $F\backslash G$ est de type fini sur k. De plus, sous l'hypothèse de (iv), comme $G \to F\backslash G$ est fidèlement plat et

[33] N.D.E. : On a ajouté (ii′) et détaillé le point (iv), en tenant compte des ajouts faits en 2.5.2, 2.5.4 et dans l'Exp. V, 6.1.

[34] N.D.E. : dans ce cas, l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, cf. la sous-section 3.3.

localement de présentation finie, l'assertion (b) découle de EGA IV, 2.2.14 et 17.7.7. D'autre part, l'assertion (iv)(a′) découle de (iv)(a), d'après l'Exp. IV, 3.4.3.1, 5.2.2 et 5.1.6. Enfin, on démontrera (iv)(c) en 3.2.5 et (ii′) et (iv)(d) dans la section 5.

Montrons maintenant l'assertion suivante :

(†) *toute partie finie de* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est alors contenue dans un ouvert affine.*[35]

Si U est une quasi-section du groupoïde induit par G_* sur un ouvert saturé W de G, alors $\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est une quasi-section du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}'})$-groupoïde induit par $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ sur $\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$. De plus, si U_* est le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$-groupoïde induit par G_* sur U, alors $\mathrm{U}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ s'identifie au $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}'})$-groupoïde induit par $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ sur $\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$.[36]

Il résulte alors des démonstrations de l'exposé V que la construction du quotient $\mathrm{X} = \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ commute à l'extension $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ de la base du type considéré ici.[37]

Soient donc $x_1, \dots, x_n$ des points de $\mathrm{X} = \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ que nous pouvons supposer fermés[38] et $g_1, \dots, g_n$ des points fermés de G se projetant sur $x_1, \dots, x_n$. Soit V un ouvert affine partout dense de X,[39] et soit U l'image réciproque de V dans G. D'après 1.2, il existe une A-algèbre locale A′, finie et libre sur A, telle que les points $g'_1, \dots, g'_p$ de $\mathrm{G}' = \mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ au-dessus de $g_1, \dots, g_n$ soient strictement rationnels sur A′.[40] Comme les morphismes $\mathrm{G}'\to\mathrm{G}$ et $\mathrm{G}\to\mathrm{X}$ sont ouverts, $\mathrm{U}' = \mathrm{U}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est dense dans G′, donc l'ouvert $\bigcap_{i=1}^{p}(\mathrm{U}')^{-1}\cdot g'_i$ est non vide, donc contient un point fermé x. Donc, d'après 1.2 (et 0.4.1), on peut supposer, quitte à agrandir A′, que x est strictement rationnel sur A′. Alors, comme $x\in(\mathrm{U}')^{-1}\cdot g'_i$, on a $g'_i\in\mathrm{U}'\cdot x$.

Notons V′ l'image inverse de V dans $\mathrm{X}' = \mathrm{X}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$; c'est un ouvert affine de X′, et c'est aussi l'image de U′ par la projection $\mathrm{G}'\to\mathrm{X}'$. Comme la translation à droite r_x est un automorphisme du groupoïde $\mathrm{G}_*\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$, elle induit un automorphisme, encore
304 noté r_x, du quotient X′. Par conséquent, l'image $\mathrm{V}'\cdot x = r_x(\mathrm{V}')$ de $\mathrm{U}'\cdot x$ dans X′ est un ouvert affine de X′ contenant les images $x'_1, \dots, x'_p$ de $g'_1, \dots, g'_p$.

---

[35] N.D.E. : Signalons ici que si $\mathrm{A} = k$ est un *corps*, alors tout ouvert quasi-compact de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est *quasi-projectif* (un résultat dû à Chow pour les groupes algébriques lisses), cf. [**Ray70**], VI 2.6. Par contre, sur l'anneau local artinien $\mathrm{A} = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, il existe des A-schémas abéliens G qui ne sont pas projectifs (*loc. cit.*, XII 4.2).

[36] N.D.E. : Ce qui précède est valable pour *tout* changement de base $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$.

[37] N.D.E. : Ceci est détaillé en 4.6 plus loin : il s'agit de voir que la formation de l'image directe par les morphismes p, λ et pr_2 commute aux changements de base *plats* $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$. Comme F et G sont *de type fini* sur A artinien, les morphismes f en question sont tous quasi-compacts et quasi-séparés, et l'égalité $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}' = f'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$ (avec des notations évidentes) découle de EGA IV_1, 1.7.21.

[38] N.D.E. : En effet, soient $y_1, \dots, y_n$ des points arbitraires de X ; comme X est de type fini sur A, chaque y_i a dans son adhérence un point fermé x_i, et tout ouvert contenant x_i contient y_i.

[39] N.D.E. : Un tel ouvert existe, puisque X est de type fini sur k : X a un nombre fini de composantes irréductibles $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_p$, et il suffit de prendre pour chaque i un ouvert affine non vide contenu dans $\mathrm{C}_i - \bigcup_{j\neq i}\mathrm{C}_j$. (Ici, on sait de plus, d'après (ii′), que les C_i sont disjointes …)

[40] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Considérons alors la relation d'équivalence sur $X' = X \otimes_A A'$ définie par la projection $X \otimes_A A' \to X$:

$$X \otimes_A A' \otimes_A A' \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X \otimes_A A' \longrightarrow X \quad ,$$

où d_0 et d_1 sont induits par les deux injections canoniques de A′ dans $A' \otimes_A A'$. Comme A′ est une A-algèbre finie et libre, disons de rang n, alors d_0 et d_1 sont finis et localement libres de rang n ; par conséquent, on peut appliquer le raisonnement de l'Exp. V, 5.b (tiré de la démonstration de SGA 1, VIII.7.6). On obtient ainsi que $x'_1, \ldots, x'_p$ sont contenus dans un ouvert affine *saturé* W′ contenu dans l'ouvert affine $V' \cdot x$. L'image de W′ dans X contient alors $x_1, \ldots, x_n$ et est un ouvert affine de X, d'après V, 4.1 (ii).

3.2.2. — Pour toute algèbre A′ locale, finie et libre sur A, désignons maintenant par U(A′) l'ensemble des points de $G \otimes_A A'$ ayant un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur W possède une quasi-section. Il est bien clair que U(A′) est saturé pour les opérations de G(Spec A′) sur $G \otimes_A A'$. Nous allons voir que, lorsque A′ est assez grande, U(A′) est égal à $G \otimes_A A'$.

D'après le théorème V 8.1, U(A) n'est pas vide, donc contient un point fermé y. La preuve se fait alors par récurrence sur dim(G − U(A)). Soient $g_1, \ldots, g_n$ des points fermés appartenant aux diverses composantes irréductibles de G − U(A). D'après 1.2, il existe A′ locale, finie et libre sur A, telle que les points $g'_1, \ldots, g'_p$ (resp. $x = x_1, \ldots, x_r$) de $G' = G \otimes_A A'$ se projetant sur $g_1, \ldots, g_n$ (resp. sur y) soient strictement rationnels sur A′. Alors, U(A′) contient $(U(A) \otimes_A A') \cdot x^{-1} g'_i$ pour tout i ; donc U(A′) contient 305
$g'_1, \ldots, g'_p$ et l'on a

$$\dim(G' - U(A')) < \dim(G - U(A)).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors l'existence d'une algèbre A″ locale, finie et libre sur A′, telle qu'on ait $U(A'') = G' \otimes_{A'} A'' = G \otimes_A A''$.

3.2.3. — Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de F\G quand F et G sont de type fini sur A. Soit A′ assez grande sur A pour que U(A′) coïncide avec $G \otimes_A A'$ (confer 3.2.2). Nous poserons $A'' = A' \otimes_A A'$ et, pour tout A-schéma X, nous désignerons par X′ et X″ les produits fibrés $X \otimes_A A'$ et $X \otimes_A A''$. D'après 3.2.1 et 3.2.2, les quotients F′\G′ et F″\G″ existent et on a le diagramme commutatif suivant, où les deux premières lignes et colonnes sont *exactes* :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
\mathrm{F}'' \times_{\mathrm{A}''} \mathrm{G}'' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}''_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda''"'] \arrow[d, shift right, "w_1"'] \arrow[d, shift left, "w_2"] & \mathrm{G}'' \arrow[r, "p''"] \arrow[d, shift right, "v_1"'] \arrow[d, shift left, "v_2"] & \mathrm{F}'' \setminus \mathrm{G}'' \arrow[d, shift right, "u_1"'] \arrow[d, shift left, "u_2"] \\
\mathrm{F}' \times_{\mathrm{A}'} \mathrm{G}' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}'_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda'"'] \arrow[d, "h"] & \mathrm{G}' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{F}' \setminus \mathrm{G}' \\
\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & \mathrm{G} &
\end{tikzcd} .$$

Dans ce diagramme, pr'_2 et λ' (resp. pr''_2 et λ'') sont obtenus à partir de pr_2 et λ par des changements de base évidents ; les morphismes g et h sont induits par l'injection canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$. On y désigne par p' et p'' les morphismes canoniques ; les morphismes v_1, v_2 et w_1, w_2 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans A''. Enfin, comme la construction du quotient $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ commute aux deux
306 changements de base $f_1, f_2 : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \rightrightarrows \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'$, on a, en notant $\pi' : \mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'$ le morphisme structural, des isomorphismes canoniques, pour $i = 1, 2$:

$$\tau_i : \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\sim} (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \underset{\pi', f_i}{\times} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \quad ,$$

et le morphisme u_i est composé de τ_i et de la projection $(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_i} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \to \mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$.

Or, lorsqu'on a un diagramme du type $(*)$, les deux premières lignes et colonnes étant exactes, on vérifie facilement que $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_2, \lambda)$ existe si et seulement si il en va de même pour $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$, et ces deux conoyaux s'identifient. L'existence de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ résultera donc de celle de $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$.

Or il résulte de la compatibilité de la formation de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ avec les extensions de la base considérées ici (cf. N.D.E. (37) dans 3.2.1, et 4.6 plus loin) que le morphisme composé

$$(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_1} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}'' \xrightarrow{\ \tau_1^{-1}\ } \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\ \tau_2\ } (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \times_{\pi', f_2} \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}''$$

est une donnée de descente sur $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ relativement à $f : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$. D'après 3.2.1 (†) et SGA 1, VIII 7.6, cette donnée de descente est effective, c'est-à-dire que $\mathrm{Coker}(u_1, u_2)$ existe (on pourrait d'ailleurs utiliser directement le théorème 4.1 de l'Exp. V).

3.2.4. — Pour terminer la preuve des assertions (i), (ii), (iii) et (iv)(a) de 3.2 dans le cas où F et G sont de type fini sur A, il reste à étudier le quotient $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$. D'après V 6.1, les assertions (ii), (iii) et (iv)(a) « deviennent vraies » après le changement de base $f : \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}' \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$; d'après EGA IV_2, 2.6.1, 2.6.2 et 2.7.1, ces assertions étaient donc vraies avant le changement de base. Enfin, pour prouver la deuxième assertion de (i), i.e. que $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est le conoyau de (pr_2, λ) dans la catégorie de tous les espaces annelés, il n'y a qu'à se reporter à V § 6.c).

3.2.5. — [41] Montrons maintenant l'assertion (iv)(c) de 3.2, en reprenant la démonstration de $\mathrm{VI_B}$, 9.2.1. Notons $\mathrm{X} = \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ et d le morphisme $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ de composantes λ et pr_2.

Comme u est une immersion fermée, d'après 2.5.2, et comme $d = \sigma \circ (u \times \mathrm{id_G})$, où σ est l'automorphisme de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ défini par $\sigma(x, y) = (xy, y)$, alors d est une immersion fermée. Dautre part, d'après (iv)(a), on a le carré cartésien ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \arrow[d, "p \times p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{X}}"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

et p donc aussi $p \times p$ est fidèlement plat et localement de présentation finie. Donc, par descente (fppf), comme d est une immersion fermée, il en est de même de Δ_{X}, i.e. X est séparé.

3.3. [42] Dans le théorème 3.2, l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, lorsque $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ est un *monomorphisme*. Cette généralisation est évoquée dans la remarque 9.3 b) de l'Exp. $\mathrm{VI_B}$, et aussi dans [**Ray67a**], Exemple a) i), p. 82. La démonstration, qu'on trouve dans le théorème 4 de [**An73**], découle du théorème 3.2 et du théorème suivant de Grothendieck (mentionné dans [**Ray67a**], Th. 1 ii) et démontré dans [**DG70**], § III.2, 7.1). Si X est un schéma et R une relation d'équivalence dans X, on notera $\widetilde{\mathrm{X}/\mathrm{R}}$ le *faisceau* (fppf) *quotient* de X par R (cf. IV 4.4.9).

Théorème 3.3.1 (Grothendieck). — *Soient* A *un anneau,* X *un* A*-schéma, et* $d_0, d_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ *une* A*-relation d'équivalence dans* X*, telle que* d_i *soit* fidèlement plat, de présentation finie*. Soit* X_0 *un sous-schéma fermé saturé de* X*, défini par un idéal nilpotent, et soit* R_0 *la relation d'équivalence induite par* R *sur* X_0*. Alors, si le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{\mathrm{X}_0/\mathrm{R}_0}$ *est* représentable *par un* A*-schéma, il en est de même de* $\widetilde{\mathrm{X}/\mathrm{R}}$

Pour la démonstration, on renvoie à [**DG70**], § III.2, 7.1. Revenons maintenant au cas où A est un anneau *local artinien.* Soit $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un morphisme *quasi-compact* entre A-groupes *localement de type fini*, et supposons de plus que u soit un *monomorphisme.* Alors, d'après 2.5.2, u est une *immersion fermée.*

On peut maintenant énoncer la variante suivante du théorème 3.2.

Théorème 3.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini*,* F *un sous-groupe* fermé *de* G*,* plat *sur* A*.* [43] *Alors :*

(i) *Le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}}$ *est représentable par un* A*-schéma* séparé et localement de type fini $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *; de plus, la suite*

$$\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \rightrightarrows \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$$

[41] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.
[42] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.
[43] N.D.E. : Pour un exemple où F *n'est pas plat et* $\widetilde{\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}}$ *pas représentable*, voir [**DG70**], § III.3, n°3.3.

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) $\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G} \xrightarrow{(\lambda,\mathrm{pr}_2)} \mathrm{G}\times_{(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})}\mathrm{G}$ *est un* isomorphisme *et* $p:\mathrm{G}\to\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est* fidèlement plat et localement de présentation finie*, de sorte que* p *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf)*.*

(iii) *Si* G *est* plat (*resp.* de type fini*, resp.* lisse) *sur* A*, alors* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *l'est aussi.*

(iv) $\mathrm{X}=\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est muni d'une action à droite de* G*, telle que* $p(e)\cdot g=p(g)$*, pour tout* $g\in\mathrm{G}$ *; par conséquent, les composantes connexes de* X *sont* de type fini *sur* A*,* irréductibles *et toutes de dimension* $\dim\mathrm{G}-\dim\mathrm{F}$*.*

(v) *Si, de plus,* F *est un sous-groupe* invariant *de* G*, il existe sur* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que* $p:\mathrm{G}\to\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *soit un morphisme de* A*-groupes.*

Les assertions (i) et (ii) découlent de 3.2 et 3.3.1, et comme $\mathrm{G}\to\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, l'assertion (iii) découle de EGA IV, 2.2.14, 2.7.1 et 17.7.7. On démontrera les assertions (iv) et (v) dans la section 5. Notons tout de suite le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.3. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe localement de type fini,* H *un sous-groupe fermé de* G*, plat sur* A*. On note* p *le morphisme* $\mathrm{G}\to\mathrm{G}/\mathrm{H}$ *et* λ (*resp.* pr_1) *le morphisme* $\mathrm{G}\times\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ *défini par* $\lambda(g,h)=gh$ (*resp. la projection* $\mathrm{G}\times\mathrm{H}\to\mathrm{G}$)*. Alors, pour tout ouvert* U *de* G/H*, on a*

$$\mathscr{O}(\mathrm{U})=\{\phi\in\mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U}))\mid\phi\circ\lambda=\phi\circ\mathrm{pr}_1\}$$

i.e. $\mathscr{O}(\mathrm{U})$ *est l'ensemble des* $\phi\in\mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U}))$ *tels que* $\phi(gh)=\phi(g)$*, pour tout* A*-schéma* S *et* $g\in\mathrm{G}(\mathrm{S})$*,* $h\in\mathrm{H}(\mathrm{S})$*.*

En effet, comme $p:\mathrm{G}\to\mathrm{G}/\mathrm{H}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc couvrant pour la topologie (fppf), cela résulte de IV, 3.3.3.2.

4. Construction de quotients $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ (cas général)

307 Nous supposons maintenant satisfaites les hypothèses du théorème 3.2, F et G n'étant pas nécessairement de type fini sur A.

4.1. Considérons tout d'abord une composante connexe G^α de G et montrons que *le saturé* $\mathscr{S}(\mathrm{G}^\alpha)$ [(44)] *de* G^α *pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde* G_* *est une partie ouverte et fermée de* G (autrement dit est la réunion de certaines composantes connexes de G).

Ce saturé est l'image de $\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G}^\alpha$ par λ, donc est ouvert dans G (confer § 3.1). Si k est le corps résiduel de A et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, il reste à montrer que l'image de $(\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G}^\alpha)\otimes_{\mathrm{A}}k$ par $\lambda\otimes_{\mathrm{A}}k$ est fermée dans $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}k$, ou encore, d'après SGA 1, VIII.4.4, que l'image de $(\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G}^\alpha)\otimes_{\mathrm{A}}\overline{k}$ par $\lambda\otimes_{\mathrm{A}}\overline{k}$ est fermée. Comme $\mathrm{G}^\alpha\otimes_{\mathrm{A}}\overline{k}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de $\mathrm{G}\otimes_{\mathrm{A}}\overline{k}$, on est ramené au cas où A est un corps algébriquement clos, ce que nous allons supposer. Dans ce cas, $\mathscr{S}(\mathrm{G}^\alpha)$ est la réunion des images de G^α par les translations à gauche $\ell_{u(x)}$, où

[(44)] N.D.E. : On a noté $\mathscr{S}(\mathrm{G}^\alpha)$ au lieu de $\overline{\mathrm{G}^\alpha}$ le saturé de G^α.

x parcourt les points fermés de F ; l'assertion résulte donc de ce que ces images sont des composantes connexes de G.

4.2. Prenons en particulier pour G^α la composante connexe G^0 de l'origine de G. Alors $\mathscr{S}(G^0)$ contient évidemment l'image de F par u qui n'est autre que la classe d'équivalence de l'origine. D'autre part, si F^β est une composante connexe de F, $F^\beta \times_A G^0$ est connexe (2.1.2) de sorte que l'image de $F^\beta \times_A G^0$ par λ est contenue dans la composante connexe de $u(F^\beta)$ dans G. Autrement dit, $\mathscr{S}(G^0)$ *est la réunion des composantes connexes qui rencontrent l'image de* F.

On remarquera aussi que le sous-schéma ouvert de G qui a $\mathscr{S}(G^0)$ pour espace **308**
sous-jacent est un sous-groupe de G (que nous notons encore $\mathscr{S}(G^0)$) : en effet le morphisme inversion de G conserve l'image de F et permute les composantes connexes de G qui rencontrent cette image ; il suffit donc de montrer que $\nu : G \times_A G \to G$ applique $\mathscr{S}(G^0) \times_A \mathscr{S}(G^0)$ dans $\mathscr{S}(G^0)$ et pour cela on peut supposer que A est un corps algébriquement clos (avec les notations de 4.1, $\mathscr{S}(G^0) \otimes_A \overline{k}$ s'identifie en effet au saturé de $(G \otimes_A \overline{k})^0$ par la relation d'équivalence définie par l'homomorphisme $u \otimes_A \overline{k}$) ; si G^γ et G^δ sont alors des composantes connexes de $\mathscr{S}(G^0)$, $G^\gamma \times_A G^\delta$ est connexe et son image par ν rencontre l'image de F ; par conséquent, $u(G^\gamma \times_A G^\delta)$ est contenu dans une composante connexe de G rencontrant $u(F)$.

4.3. Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_* de base G défini par u est la *somme directe* des groupoïdes $\mathscr{S}(G_*^\alpha)$ induits par G_* sur les différentes parties ouvertes et fermées de G de la forme $\mathscr{S}(G^\alpha)$. Le conoyau de G_* est donc la somme directe des conoyaux de ces groupoïdes $\mathscr{S}(G_*^\alpha)$, qu'on est amené à étudier séparément.

Considérons tout d'abord le groupoïde $\mathscr{S}(G_*^0)$ induit par G_* sur $\mathscr{S}(G^0)$. Il est clair que $\mathscr{S}(G_*^0)$ est le groupoïde de base $\mathscr{S}(G^0)$ défini par l'homomorphisme de F dans $\mathscr{S}(G^0)$ induit par u (§ 3.1). Le conoyau dont nous voulons prouver l'existence s'identifie donc à $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$. Considérons d'autre part le groupoïde

$$G_2^0 \underset{\ell'_0}{\overset{\ell'_2,\ \ell'_1}{\rightrightarrows}} G_1^0 \underset{\ell_0}{\overset{\ell_1}{\rightrightarrows}} G_0^0 = G^0$$

induit par $\mathscr{S}(G_*^0)$ sur G^0. Si l'on se reporte à la construction explicitée en V § 3.b), **309**
l'objet noté alors $Y_0 \times_{X_0} X_1$ n'est autre que $F \times_A G^0$, de sorte que G_1^0 est l'image réciproque de G^0 par le morphisme $F \times_A G^0 \to \mathscr{S}(G^0)$ induit par λ.

Je dis que cette image réciproque est $F_0 \times_A G^0$, où l'on note F_0 l'image réciproque de G^0 par u. En effet, si F^β est une composante connexe de F_0, $F^\beta \times_A G^0$ est connexe (2.1.2) et $\lambda(F \times_A G^0)$ est contenu dans G^0 ; réciproquement, si F^β est une composante connexe de F non contenue dans F_0, l'image de $F^\beta \times_A G^0$ est encore connexe et contient $u(F^\beta)$; si $u(F^\beta)$ n'est pas contenu dans G^0, $\lambda(F^\beta \times_A G^0)$ ne rencontre pas G^0.

Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_*^0 induit par G_* sur G^0 est le groupoïde de base G^0 défini par l'homomorphisme $F_0 \to G^0$ induit par u. Comme G^0, et donc

F_0, sont de type fini sur A, alors, d'après le paragraphe 4, G^0_* possède un conoyau qui n'est autre que $F_0\backslash G^0$.

Je dis maintenant que $F_0\backslash G^0$ *s'identifie à* $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$. En effet, la démonstration est analogue à celle de la première partie de l'assertion (i) du lemme V § 6.1 ; considérons le diagramme :

$$\mathscr{S}(G^0) \xleftarrow{\ v\ } F \times_A G^0 \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_2\ } G^0 \quad ,$$

où v est le morphisme induit par λ. Comme pr_2 possède une section, pr_2 est un épimorphisme effectif universel de sorte que $F_0\backslash G^0$ coïncide avec $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$, où

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1" description] \arrow[r, shift right=2, "v'_0"'] & V_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & V = F \times_A G^0 \end{tikzcd}$$

310 est l'image réciproque par pr_2 du groupoïde G^0_* (cf. V § 3.a), c'est-à-dire également l'image réciproque de $\mathscr{S}(G^0_*)$ par le morphisme composé

$$F \times_A G^0 \xrightarrow{\text{inclusion}} F \times_A \mathscr{S}(G^0) \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_2\ } \mathscr{S}(G^0).$$

De même, comme v est fidèlement plat et quasi-compact, $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de $\mathscr{S}(G^0_*)$ par le changement de base v. Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après l'Exp. V, § 3.c ; il résulte de là que l'inclusion canonique de G^0_* dans $\mathscr{S}(G^0_*)$ induit un isomorphisme de $F_0\backslash G^0$ sur $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$.

On remarque enfin que : *la construction de* $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$ *commute aux changements de base finis et localement libres*, parce qu'il en va de même pour $F_0\backslash G^0$ (cf. N.D.E. (37) et 4.6 plus loin).

4.4. Il reste à construire le conoyau du groupoïde $\mathscr{S}(G^\alpha_*)$ lorsque G^α est une composante connexe quelconque de G. Si A' est une A-algèbre locale, finie et libre assez grande (cf. 3.2), $G^\alpha \otimes_A A'$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $C^1, \dots, C^n$ de $G \otimes_A A'$ qui possèdent toutes un point strictement rationnel. Pour tout i, il existe donc une translation à droite r_i de $G \otimes_A A'$ qui applique $G^0 \otimes_A A'$ sur C^i ; cette translation induit un isomorphisme du groupoïde $\mathscr{S}(G^0_*) \otimes_A A'$ sur $\mathscr{S}(C^i_*)$, de sorte que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur le saturé de C^i possède un conoyau.

Comme $\mathscr{S}(G^\alpha_*) \otimes_A A'$ est la somme directe d'un certain nombre d'entre les $\mathscr{S}(C^i_*)$, alors $\mathscr{S}(G^\alpha_*) \otimes_A A'$ possède un conoyau ; ce conoyau est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $(F_0 \otimes_A A')\backslash(G^0 \otimes_A A')$ de sorte que toute partie finie de ce conoyau est contenue dans un ouvert affine ; de plus, la construction de ce conoyau
311 commute aux extensions finies et localement libres de la base (cf. N.D.E. (37) et 4.6 plus loin). On voit donc comme en 3.2.3 que ce conoyau est de la forme $Y \otimes_A A'$, où Y est un conoyau de $\mathscr{S}(G^\alpha_*)$.

4.5. Nous avons donc construit F\G et montré qu'il est somme directe de schémas de type fini sur A. Les autres assertions du théorème 3.2 se ramènent directement à des assertions concernant les groupoïdes $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha)$. Comme en V § 6, la seconde assertion de (i) découle de la première et de (ii) et (iii), donc il suffit de prouver (ii), (iii) et (iv)(a). Comme A′ est une A-algèbre locale, finie et libre, le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est fidèlement plat et de présentation finie, donc, d'après SGA 1, VIII (3.1, 4.6, 5.4), il suffit de vérifier les assertions correspondantes dans le cas du groupoïde $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$. Or celui-ci est isomorphe à la somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ (confer 4.4), de sorte qu'on est ramené au groupoïde $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0)$.

Pour ce dernier on continue de calquer la preuve établie en V § 6, comme on a commencé à le faire en 4.3.

4.6. Ajoutons pour terminer ce paragraphe quelques remarques concernant le lemme 6.1 et le § 9.a de l'exposé V : *avec les hypothèses et les notations de* V § 9.a, nous cherchons une condition sous laquelle la construction du conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde X_* commute à une extension $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de la base. Comme les conoyaux de X_* et X'_* s'identifient aux conoyaux des groupoïdes U_* et U'_* induits par X_* et X'_* sur les quasi-sections U et U′, on est ramené au cas d'un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde vérifiant les hypothèses du théorème V 4.1.

(45) Si l'on note Y le conoyau de U_*, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et Y_1 le conoyau de U'_*, on a vu en V § 9.a que le morphisme canonique $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ est un homéomorphisme (et même un homéomorphisme universel) ; on peut donc identifier Y_1 et Y' comme espaces topologiques. Si $p : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ est le morphisme canonique et si $p' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y}'$ en est déduit par changement de base, nous voulons alors que la suite de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$-modules

$$(*) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \longrightarrow p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'}) \rightrightarrows p'_* u'_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1}) = p'_* u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1})$$

soit exacte. (46) Comme on s'est placé sous les hypothèses de V 4.1, u_0 et u_1 sont finis et localement libres ; et, d'après V.4.1 (ii), p est entier. Alors, p et $p \circ u_i$ sont affines, donc séparés et quasi-compacts. 312

Par conséquent, si S′ est *plat* sur S, il résulte de EGA III_1, 1.4.15 (compte tenu de la correction $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 25 dans EGA III_2), que la suite (∗) s'identifie à l'image réciproque de la suite

$$(**) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}}) \rightrightarrows p_* u_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}) = p_* u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}),$$

qui est une suite exacte. (47) Un raisonnement analogue s'applique lorsque le groupoïde X_* possède « localement » des quasi-sections (cf. la démonstration du théorème V 7.1). On obtient donc la :

Proposition 4.6.1. — *La construction du conoyau de* X_* *commute aux extensions* plates *de la base lorsque* X_* *possède localement des quasi-sections.*

(45) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(46) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a modifié l'original, les hypothèses supplémentaires faites sur X_* étant superflues.

(47) N.D.E. : On a ajouté d'une part la phrase suivante et, d'autre part, la numérotation 4.6.1 ci-dessous, afin de mettre en évidence le résultat énoncé.

4.7. Considérons maintenant le cas du groupoïde G_* du théorème 3.2 lorsqu'on suppose provisoirement F et G de type fini sur A.

D'après 3.2.2 il existe une algèbre A' locale, finie et libre sur A telle que le groupoïde $G_* \otimes_A A'$ possède « localement » des quasi-sections. Pour toute extension $T \to \operatorname{Spec} A$ de la base, la suite

$$(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T \rightrightarrows (F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T \longrightarrow (F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$$

déduite du diagramme (∗) de 3.2.3 est exacte. Si l'on suppose de plus T plat sur Spec A, alors $(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ et $(F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifient respectivement, d'après 4.6, aux conoyaux des groupoïdes

$$(G_* \otimes_A A'') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T \qquad \text{et} \qquad (G_* \otimes_A A') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T.$$

Le diagramme déduit de 3.2.3 (∗) par le changement de base $T \to \operatorname{Spec} A$ montre alors que $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifie au conoyau de $G_* \times_{\operatorname{Spec} A} T$. Un raisonnement analogue est valable dans le cas général (i.e. lorsque G et F sont localement de type fini sur A). On obtient donc : [48]

Proposition 4.7.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.2*, pour tout* A*-schéma* plat T*,* $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *s'identifie au quotient à gauche de* $G \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *par* $F \times_{\operatorname{Spec} A} T$*.*

5. Liens avec l'Exposé IV et conséquences

313 **5.1.** [49] Nous reprenons les notations du § 3 et les hypothèses du théorème 3.2 ; on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F \times_A G \times_A G \arrow[r, "F\times\nu"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2\times G"'] \arrow[d, shift left, "\lambda\times G"] & F \times_A G \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, shift left, "\lambda"] \\
G \times_A G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "p\times G"'] & G \arrow[d, "p"] \\
(F\backslash G) \times_A G \arrow[r, dashed, "\rho"] & F\backslash G
\end{tikzcd} ,$$

qui satisfait aux égalités $\mathrm{pr}_2 \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\mathrm{pr}_2 \times G)$ et $\lambda \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\lambda \times G)$. En outre, comme G est supposé *plat* sur A, la suite verticale de gauche est exacte d'après 4.7, de sorte que ν induit un morphisme de A-schémas :

$$\rho : \ (F\backslash G) \underset{A}{\times} G \longrightarrow F\backslash G .$$

[48] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.7.1 ci-dessous, afin de mettre en évidence le résultat énoncé.

[49] N.D.E. : On a changé le titre de de cette section (nommée « Compléments » dans l'original).

Ce morphisme ρ fait opérer G à droite sur F\G comme on le vérifie immédiatement ; de plus, le morphisme canonique $G \to F\backslash G$ commute aux opérations de G à droite sur G et F\G.

[50] Ceci prouve la première assertion du point (ii′) de 3.2. D'après 2.5.4, on obtient alors que les composantes connexes de $X = F\backslash G$ sont de type fini, irréductibles, et toutes de même dimension. Pour évaluer cette dimension, on peut supposer que $A = k$ et que k est algébriquement clos. D'après I, 2.3.3.1, le stabilisateur du k-point $p(e)$ est représenté par la fibre $H = p^{-1}(p(e))$, et comme F\G est le quotient de G par F dans la catégorie des espaces annelés, cette fibre a pour espace sous-jacent $u(F)$, et comme $\mathrm{Ker}(u)$ est fini, on a donc $\dim H = \dim u(F) = \dim F$. D'après 2.5.4 (ii), on obtient donc que $\dim X = \dim G - \dim F$. Ceci prouve le point (ii′) du théorème 3.2 (et donc aussi le point (iv) de 3.3.2).

5.2. Lorsque l'homomorphisme de A-groupes $u : F \to G$ est un *monomorphisme*, on peut retrouver 5.1 en se servant des résultats de l'exposé IV. En effet, le morphisme canonique $p : G \to F\backslash G$ est fidèlement plat et ouvert d'après 3.2 ; il est donc couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 6.3.1) et l'on peut appliquer les corollaires IV.5.2.2 et IV.5.2.4.

En particulier, *si nous supposons, en plus des hypothèses de* 3.2, *que u est l'inclusion dans* G *d'un sous-groupe* invariant F, *il existe sur* F\G *une et une seule structure de* A-*groupe telle que le morphisme canonique* $p : G \to F\backslash G$ *soit un homomorphisme de* A-*groupes.* [51] Ceci prouve le point (v) de 3.3.2. **314**

5.3. Nous allons maintenant passer en revue quelques énoncés de l'exposé IV.

5.3.1. — Les énoncés IV 5.2.7 et IV 5.3.1 se traduisent comme suit. Soient F et G deux groupes *localement de type fini* et *plats* sur A, F étant un sous-groupe *invariant fermé* de G. Les applications $H \mapsto F\backslash H$ et $H' \mapsto H' \times_{(F\backslash G)} G$ définissent une *correspondance bijective* entre les A-sous-groupes *plats* de G contenant F et les A-sous-groupes *plats* de F\G. Dans cette bijection les sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de G contenant F correspondent aux sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de F\G. [52]

5.3.2. — La proposition IV 5.2.9 implique le résultat suivant. Soient F, H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose $F \subset H \subset G$, avec F *fermé* dans G et *invariant* dans H. Dans ces conditions, F\H opère librement à gauche sur F\G, le schéma quotient $(F\backslash H)\backslash(F\backslash G)$ existe et on a un isomorphisme canonique de schémas à groupe d'opérateurs G :

$$(F\backslash H)\big\backslash(F\backslash G) = H\backslash G \quad .$$

5.3.3. — De IV 5.2.8, enfin, découle l'assertion que voici. Soient F, H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose que F est contenu, *fermé et invariant* **315**

[50] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[51] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[52] N.D.E. : En plus des énoncés précités de l'Exp. IV, on utilise le fait que, puisque $G \to F\backslash G$ est fidèlement plat, alors un A-sous-groupe H de G est plat sur A si et seulement si F\H l'est.

dans G, que H est contenu dans G et que $F \cap H$ est *plat* sur A. Soit alors $F \overset{\tau}{\times}_A H$ le A-groupe qui a pour schéma sous-jacent le produit $F \times_A H$, la multiplication étant définie par le morphisme « $((x,h),(y,h')) \mapsto (xhyh^{-1}, hh')$ » ; de même, soit $u : H \cap F \to F \overset{\tau}{\times}_A H$ le monomorphisme $x \mapsto (x^{-1}, x)$ et soit $F \cdot H$ le quotient $(F \cap H)\backslash(F \overset{\tau}{\times}_A H)$. Dans ces conditions il existe un isomorphisme canonique

$$F\backslash(F \cdot H) = (F \cap H)\backslash H \quad .$$

5.4. [53] Soit $u : G \to H$ un morphisme *quasi-compact* entre A-groupes *localement de type fini*, tel que le noyau N de u soit *plat* sur A. Dans ce cas, d'après 3.3.2 et 5.2, le A-groupe quotient $C = N\backslash G$ existe et le morphisme $p : G \to C$ est fidèlement plat et localement de présentation finie. D'autre part, d'après IV 5.2.6, u induit un monomorphisme $v : C \to H$, qui est quasi-compact (car u l'est et $G \to C$ est surjectif, cf. EGA IV_1, 1.1.3), donc est une *immersion fermée*, d'après 2.5.2. On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition 5.4.1. — *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini*, tel que* $N = \operatorname{Ker} u$ *soit* plat *sur* A*. Alors on a la factorisation :*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & H \\ N\backslash G \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p est fidèlement plat, localement de présentation finie*, et i une* immersion fermée.

Supposons de plus G *plat* sur A. Alors, d'après 3.3.2, $C = N\backslash G$ est plat sur A et donc le quotient $X = C\backslash H$ existe dans $(\mathbf{Sch}_{/A})$ et représente le faisceau (fppf) quotient $\widetilde{C\backslash H}$, et $q : H \to X$ est un C-torseur. Par conséquent, notant $e : \operatorname{Spec} A \to G$ la section unité de G, v induit un isomorphisme de faisceaux (fppf) entre $\widetilde{C}$ et le produit fibré de q et de $q \circ e : \operatorname{Spec} A \to X$, qui est représenté par un sous-schéma fermé de H. Par conséquent, v est un *isomorphisme* de C sur un sous-schéma en groupes fermé K de G (égal au stabilisateur du A-point $q \circ e$ de X). (Ceci fournit une autre démonstration du fait que tout monomorphisme quasi-compact $v : C \to H$ entre A-groupes localement de type fini, est une immersion fermée, cf. 2.5.2 et VI_B 1.4.2.)

Supposons de plus que C soit un sous-groupe *invariant* de H ; dans ce cas, le A-groupe $\overline{H} = C\backslash H$ est le conoyau dans la catégorie des A-groupes du morphisme $u : G \to H$, et K est le noyau du morphisme $H \to \overline{H}$. Lorsque G et H sont des A-groupes abéliens, K est l'*image* de u dans la catégorie des A-groupes abéliens, alors que $C = (\operatorname{Ker} u)\backslash G$ est la *coïmage* de u. Compte tenu de l'isomorphisme $C \xrightarrow{\sim} K$ qu'on vient d'établir, on obtient : [53]

Théorème 5.4.2. — *Soit k un corps. La catégorie des k-groupes algébriques* commutatifs *est abélienne.*

[53] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté la proposition 5.4.1.
[53] N.D.E. : On a ajouté à ce théorème le numéro 5.4.2.

En effet, lorsque k est un corps, $\mathrm{Ker}(u)$ est plat sur k quelque soit u.

[54] Notons que la sous-catégorie pleine des k-groupes algébriques commutatifs *affines* est épaisse. En effet, considérons une suite exacte de k-groupes algébriques commutatifs :

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{N} \longrightarrow 1\ .$$

Si G est affine, il est clair que N l'est, et G/N l'est aussi d'après un théorème de Chevalley, cf. $\mathrm{VI_B}$, 11.17. Réciproquement, si N et G/N sont affines, alors G l'est aussi d'après $\mathrm{VI_B}$, 9.2 (viii). On obtient donc le

Corollaire 5.4.3. — *Soit k un corps. La catégorie des k-groupes algébriques* commutatifs affines *est abélienne.*

Signalons de plus que la catégorie de tous les k-groupes *commutatifs affines* (pas nécessairement de type fini) est abélienne ; ceci se déduit de $\mathrm{VI_B}$, 11.17 et 11.18.2 (cf. [**DG70**], § III.3, 7.4), voir aussi $\mathrm{VII_B}$, 2.4.2 pour une démonstration utilisant les groupes formels.

5.5. Soit G un groupe *localement de type fini et plat* sur un anneau local artinien **316**
A. On sait (2.3) que la composante connexe de l'origine G^0 est un sous-schéma en groupes de G invariant et ouvert, donc également plat sur A. Alors, d'après 3.2 et 5.2, $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est un A-schéma en groupes, plat sur A. De plus, comme chaque composante connexe G^α de G est saturée pour la relation d'équivalence définie par G^0, alors $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est la somme directe des $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^\alpha$ (cf. 4.3). En particulier, la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ n'est autre que $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^0 \cong \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ et donc $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G} \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ est un isomorphisme local à l'origine. Par conséquent, $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est *étale* sur Spec A, d'après $\mathrm{VI_B}$, 1.3. [55] On obtient donc la proposition suivante (pour le point (ii), on renvoie à [**DG70**], § II.5, 1.7–1.10) :

Proposition 5.5.1. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat.

(i) $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est un* A*-groupe étale.*

(ii) *Par conséquent, si* $\mathrm{A} = k$ *est un corps algébriquement clos,* $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est un k-groupe constant, opérant de façon simplement transitive sur l'ensemble des composantes connexes de* G *; donc si* G *est* algébrique*,* $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est fini.*

5.6. Soient maintenant k un corps *parfait* et G un k-groupe *localement de type fini.* Nous avons vu (0.2) que $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est alors un sous-schéma en groupes de G. De plus, la classe d'équivalence de l'origine de G pour l'opération de $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ à gauche sur G est tout l'espace sous-jacent à G. Donc, d'après le théorème 3.2, on obtient :

Proposition 5.6.1. — *Soient k un corps* parfait *et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Alors le k-schéma* $\mathrm{G}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{G}$ *est le spectre d'une k-algèbre finie et locale, de corps résiduel k.*

[54] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[55] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède et l'on a ajouté la proposition 5.5.1, pour mettre en évidence ce résultat.

[(56)] En effet, d'après 3.2, $\mathrm{G}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{G}$ a un seul point, de corps résiduel k, et est un k-schéma de type fini ; c'est donc le spectre d'une k-algèbre locale de dimension finie (cf. EGA I, 6.4.4).

Proposition 5.6.2. — *Soit* $u : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un morphisme entre groupes* localement de type fini *sur un corps* parfait k. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* plat.

(ii) $u^0 : \mathrm{F}^0 \to \mathrm{G}^0$ *est* dominant *et le morphisme* $v : \mathrm{F}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{F} \to \mathrm{G}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{G}$ *induit par* u *est* plat.

317 [(57)] Considérons en effet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{F}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{F} \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "q"] & \mathrm{G}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{G} \end{tikzcd} \quad ,$$

où p et q désignent les projections canoniques. D'après 3.2 (iv), p et q sont fidèlement plats ; par conséquent, si u est plat, alors $q \circ u = v \circ p$ est plat, donc également v.

Réciproquement, supposons v plat et u^0 dominant. Comme u^0 est quasi-compact (F^0 étant de type fini sur k, d'après 2.4, donc noethérien), il envoie donc le point générique ξ de F^0 sur le point générique η de G^0. Soit R la k-algèbre finie locale dont $\mathrm{G}_{\text{réd}}\backslash\mathrm{G}$ est le spectre, et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On a des morphismes locaux d'anneaux locaux : $\mathrm{R} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta} \to \mathscr{O}_{\mathrm{F},\xi}$. Notons qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_{\text{réd}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{Spec}(\mathrm{R}/\mathfrak{m}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \end{tikzcd}$$

et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta} \cong \mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\text{réd}},\eta} = \kappa(\eta)$, de sorte que $\mathscr{O}_{\mathrm{F},\xi}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{F},\xi}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}$.

D'autre part, comme q et $v \circ p$ sont plats, G et F sont plats sur R. Par conséquent, d'après le critère local de platitude (cf. EGA IV_3, 11.3.10.2), $\mathscr{O}_{\mathrm{F},\xi}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\eta}$, c.-à-d., u est plat au point ξ. Donc, d'après 2.5.3, u est plat.

6. Compléments sur les k-groupes non nécessairement de type fini

[(58)] Signalons encore les résultats suivants, qui seront utiles dans l'ajout VI_{B}, § 12. On fixe un corps de base k.

[(56)] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 5.6.1, ainsi que la démonstration qui suit.
[(57)] N.D.E. : On a détaillé la démonstration de (ii) ⇒ (i), et l'on a simplifié le diagramme ci-dessous.
[(58)] N.D.E. : On a ajouté les résultats qui suivent, tirés de [**Per75**]. Notons que le lemme 6.1 peut s'exprimer, dans le langage de Weil, en disant que « tout point de G est produit de deux points génériques ».

Lemme 6.1. — *Soit* G *un k-groupe. Pour tout $x \in \mathrm{G}$, il existe un point $u \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ tel que $\mu(u) = x$ et que les deux projections $p_1(u)$ et $p_2(u)$ soient des points maximaux de* G.

Démonstration. Posons $\mathrm{K} = \kappa(x)$. Comme la projection $\mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{G}$ envoie points maximaux sur points maximaux, on est ramené au cas où x est rationnel. Alors la translations à gauche λ_x (resp. ρ_x) nous donne un morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $g \mapsto (\lambda_x(g^{-1}), g)$ (resp. $g \mapsto (g, \rho_x(g^{-1}))$) qui induit un isomorphisme de G sur $\mu^{-1}(x)$, inverse de p_2 (resp. p_1). Donc, si u est un point maximal de $\mu^{-1}(x)$, alors $p_1(u)$ et $p_2(u)$ sont des points maximaux de G et donc u convient.

Corollaire 6.2. — *Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes, quasi-compact et dominant.*

(i) *f est surjectif.*

(ii) *Si* H *est réduit, f est fidèlement plat.*

Démonstration. Notons μ_{H} (resp. μ_{G}) la multiplication de H (resp. G). Soit $h \in \mathrm{H}$. D'après 6.1, il existe $u \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ tel que $\mu_{\mathrm{H}}(u) = h$ et que $\alpha = p_1(u)$ et $\beta = p_2(u)$ soient des points maximaux de H. Comme f est quasi-compact et dominant, $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}(\beta)$ sont non vides (cf. EGA IV_1, 1.1.5), et donc il existe $v \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ tel que $(f \times f)(v) = u$ (cf. EGA I, 3.5.2). Alors $g = \mu_{\mathrm{G}}(v)$ vérifie $f(g) = h$. Ceci montre que f est surjectif.

Supposons de plus H réduit. Alors $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\alpha}$ est un corps, et on a vu plus haut que $f^{-1}(\alpha) \neq \varnothing$, donc f est plat en tout point ξ de $f^{-1}(\alpha)$, donc f est plat d'après le lemme 2.5.3.

Rappel 6.3. — Rappelons (cf. EGA IV_3, 11.10.1) qu'un morphisme de schémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est dit *schématiquement dominant* s'il vérifie la condition suivante : pour tout ouvert U de Y, si Z est un sous-schéma fermé de U tel que le morphisme $f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ se factorise à travers Z, alors $\mathrm{Z} = \mathrm{U}$. Lorsque f est quasi-compact et quasi-séparé, ceci équivaut à dire que l'image fermée de X par f est Y (cf. *loc. cit.*, 11.10.3 (iv) et EGA I, 9.5.8).

Proposition 6.4. — *Soit $f : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un morphisme quasi-compact de k-groupes. Alors l'image fermée de f est un sous-schéma en groupes* H' *de* G*, et f se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{G} \\ \mathrm{H}' \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où f' est schématiquement dominant, quasi-compact et surjectif.

Démonstration. Comme H est séparé (0.3), f est quasi-compact et séparé, donc $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module quasi-cohérent, et l'image fermée H' de f existe et est le sous-schéma fermé de G défini par l'idéal quasi-cohérent $\mathscr{I} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}}))$ (cf. EGA I, § 9.5).

Notons c_{G} et μ_{G} (resp. c_{H} et μ_{H}) les morphismes d'inversion et de multiplication de G (resp. H). Alors $c_{\mathrm{G}} \circ f = f \circ c_{\mathrm{H}}$ se factorise à travers le sous-schéma fermé $c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$, d'où $\mathrm{H}' \subset c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$ et donc $\mathrm{H}' = c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$ (puisque $c_{\mathrm{G}}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$). De même, comme $f \circ \pi_{\mathrm{H}} = \pi_{\mathrm{G}} \circ (f \times f)$ se factorise par H′, alors $f \times f$ se factorise à travers le sous-schéma fermé $\pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H}')$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$. D'autre part, comme la formation de l'image fermée commute aux changements de base plats (EGA III 1.4.15 et IV_1 1.7.21), l'image fermée de $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{H}'} \times f$) est $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}$ (resp. $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$). Donc, par « transitivité des images fermées » (EGA I, 9.5.5), l'image fermée de $f \times f$ est $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$, qui est donc contenue dans $\pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H}')$, i.e. la restriction de π_{G} à $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$ se factorise par H′. Ceci montre que H′ est un sous-schéma en groupes fermé de G. Notons i l'inclusion $\mathrm{H}' \hookrightarrow \mathrm{G}$.

Alors f égale $i \circ f'$, où $f' : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ est schématiquement dominant et quasi-compact (puisque f est quasi-compact et i séparé). Donc, d'après 6.2, f' est surjectif. Ceci prouve 6.4.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant ([**Per75**], V 3.1 & 3.2, voir aussi [**Per76**], 0.0 & 0.1).

Théorème 6.5 (D. Perrin). — *Soit* G *un k-groupe* quasi-compact. *Alors*

(i) G *est limite projective d'un système filtrant* (G_i) *de k-groupes de type fini* (*dont les morphismes de transition* $u_{ij} : \mathrm{G}_j \to \mathrm{G}_i$ *sont affines pour i assez grand*) *et les morphismes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_i$ *sont fidèlement plats* (*et affines pour i assez grand*).

(ii) *Soit* H *un sous-k-groupe fermé de* G. *Alors le faisceau* (fpqc) *quotient* $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ *est un k-schéma dans les deux cas suivants :*

(1) *L'immersion* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *est de présentation finie ; dans ce cas,* G/H *est de type fini sur k.*

(2) H *est invariant dans* G.

Pour la démonstration de ce théorème (qui repose sur plusieurs théorèmes intermédiaires), on renvoie à [**Per75**]. Pour la commodité du lecteur, démontrons toutefois les deux corollaires ci-dessous, cf. [**Per75**] V 3.3 à 3.4 ou [**Per76**] 4.2.3 à 4.2.5.

Corollaire 6.6. — *Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme quasi-compact de k-groupes.*

(i) *Si f est schématiquement dominant, il est fidèlement plat.*

(ii) *Ceci est le cas, en particulier, si* H *est affine et si le morphisme* $f^\natural : \mathscr{O}(\mathrm{H}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G})$ *est injectif.*

Démonstration. Supposons f schématiquement dominant. Alors, d'après 6.2 (i), f est surjectif donc, d'après 2.5.3, il suffit de montrer que f est plat en l'élément neutre de G. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e} = \mathscr{O}_{\mathrm{H}^0,e}$ (cf. 2.6.5), on peut remplacer H par H^0, et donc supposer H irréductible. Alors H est quasi-compact (*loc. cit.*) et puisque f est quasi-compact, G l'est aussi. D'après 6.5 (i), $\mathrm{H} = \varprojlim_i \mathrm{H}_i$, où chaque H_i est un k-groupe algébrique. Notons N_i le noyau de $\mathrm{G} \to \mathrm{H}_i$, c'est un sous-$k$-groupe fermé invariant de G. De plus, comme la section unité $\{e\} \to \mathrm{H}_i$ est de présentation finie, l'immersion $\mathrm{N}_i \to \mathrm{G}$ l'est aussi, donc d'après 6.5 (ii), le quotient (fpqc) G/N_i est un k-groupe algébrique. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_i"'] & \mathrm{H} \arrow[d, "p_i"] \\ \mathrm{G}/\mathrm{N}_i \arrow[r, "f_i"] & \mathrm{H}_i \end{tikzcd}$$

où f est schématiquement dominant, p_i, q_i sont fidèlement plats (donc schématiquement dominants). Alors $f_i \circ q_i = p_i \circ f$ est schématiquement dominant, et donc f_i l'est aussi. D'autre part, f_i est un monomorphisme, donc une immersion fermée, puisque G/N_i et H_i sont algébriques (2.5.2). Il en résulte que f_i est un isomorphisme, et donc $\mathrm{G} \to \mathrm{H}_i$ est fidèlement plat. Alors, d'après [**BAC**] I § 2.7, Prop. 9, le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est plat ; d'autre part, il est surjectif d'après 6.2 (i), donc il est fidèlement plat. Ceci prouve le point (i), et le point (ii) en découle, car si H est affine et $f^\natural$ injectif, alors l'image fermée de f égale H, donc f est schématiquement dominant (cf. 6.4).

Corollaire 6.7. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de k-groupes et soit* $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$. *On suppose u quasi-compact.*

(i) *Le faisceau* (fpqc) *quotient* $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{N}}$ *est représenté par un k-schéma en groupes* G/N, *et u se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{H} \\ \mathrm{G}/\mathrm{N} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p est fidèlement plat et i une immersion fermée.

(ii) *En particulier, si u est un monomorphisme, u est une immersion fermée, et si u est schématiquement dominant, u est fidèlement plat.*

Démonstration. (i) D'après 6.4 et 6.6, l'image fermée G' de u est un sous-schéma en groupes fermé de G, et $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est fidèlement plat et quasi-compact. On a évidemment $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{N}$, et donc d'après l'Exp. IV, 3.3.2.1 et 5.1.7, G' représente le faisceau (fpqc) quotient $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{N}}$.

(ii) La deuxième assertion est contenue dans 6.6, montrons la première. Si u est un monomorphisme, il en est de même de p, alors p est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme effectif, donc un isomorphisme (cf. IV, 1.14). Ceci prouve 6.7

Signalons enfin les corollaires suivants (cf. [**Per76**], 4.2.6 à 4.2.8).

Corollaire 6.8. — *La catégorie des k-schémas en groupes quasi-compacts commutatifs est* abélienne.

Tenant compte de 6.7, la démonstration est analogue à celle de 5.4.2.

Corollaire 6.9. — *Si* $\mathrm{car}(k) = 0$, *tout k-schéma en groupes* G *est géométriquement réduit.*

En effet, si $g \in \mathrm{G}$ et si K est une clôture algébrique de $\kappa(g)$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_k \mathrm{K} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{G_K},g_\mathrm{K}}$, donc il suffit de montrer que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}^0,e}$ est géométriquement réduit. On est ainsi ramené au cas où G est connexe, donc quasi-compact (2.6.5). Alors le résultat découle de 6.5 et du théorème de Cartier pour les groupes algébriques (cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.6.1 ou [**DG70**] § II.6, Th. 1.1).

Corollaire 6.10. — *Soit* G *un* k*-groupe quasi-compact. On suppose* k *algébriquement clos.*

(i) *Soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme fidèlement plat de* k*-groupes. Alors l'application induite* $\mathrm{G}(k) \to \mathrm{H}(k)$ *est surjective.*

(ii) *L'ensemble des points rationnels est dense dans* G.

Pour la démonstration, on renvoie à [**Per75**], V 3.7 & 3.9.

Bibliographie

(59)

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV et V-VII, Masson, 1985.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Per75] D. Perrin, *Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps*, Publ. Math. Orsay N°165–75.46 (1ère partie), http://portail.mathdoc.fr/PMO/

[Per76] D. Perrin, *Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps*, Bull. Soc. Mah. France **104** (1976), 323-335.

[Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

[Ray70] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Maths. **119**, Springer-Verlag, 1970.

(59) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé