EXPOSÉ XII

TORES MAXIMAUX, GROUPE DE WEYL, SOUS-GROUPES DE CARTAN, CENTRE RÉDUCTIF DES SCHÉMAS EN GROUPES LISSES ET AFFINES

par A. Grothendieck

À partir du présent exposé, contrairement aux exposés précédents, nous ferons **180**
usage des résultats connus sur la structure des groupes algébriques lisses sur un corps algébriquement clos k, et surtout de la théorie de Borel des groupes algébriques affines, exposée dans le Séminaire Chevalley 56/57 : « Classification des groupes de Lie algébriques » [(1)]. Suivant l'usage en théorie des groupes algébriques, nous référons à ce Séminaire par le sigle BIBLE. Pour les prochains exposés, nous aurons besoin notamment des résultats de BIBLE 4, 5, 6, 7 (le chiffre après BIBLE renvoie au numéro de l'exposé). Il semble d'ailleurs que la théorie des schémas n'apporte aucune simplification notable à la théorie de Borel telle qu'elle est exposée dans BIBLE. C'est pourquoi il n'a pas semblé utile de la reproduire dans le présent Séminaire, notre but étant ici de déduire, de résultats connus sur les corps algébriquement clos, des résultats analogues valables sur tout préschéma de base. (Il n'en sera plus de même pour la théorie de structure de Chevalley des groupes semi-simples, qui, semble-t-il, se traite avec avantage ab ovo sur un préschéma de base quelconque).

Dans les exposés oraux (que nous avons suivis dans les N$^{\text{os}}$ 1 à 4), nous nous étions limités aux préschémas en groupes affines sur S, en nous appuyant de façon essentielle sur les théorèmes de représentabilité de Exp XI N°4. Dans les présentes notes (cf. N$^{\text{os}}$ **181**
6 à 8) nous montrons rapidement comment on peut éliminer les hypothèses affines par une méthode plus simple n'utilisant pas les résultats les plus délicats de l'Exposé XI. Pour d'autres généralisations des résultats contenus dans le présent exposé, voir également exposés XV et XVI. (Il est évident que le contenu des exposés XI, XII, XV, XVI devrait être complètement refondu).

1. Tores maximaux

[(0)] version xy du 2/12/08

[(1)] N.D.E. : Ce séminaire a maintenant été publié, sous une forme révisée par P. Cartier, comme volume 3 des Oeuvres de Chevalley (Springer, 2005).

1.0. Soit d'abord G un groupe algébrique sur un corps *algébriquement clos* k. On appelle *tore maximal* de G un sous-groupe algébrique T de G qui est un *tore* (ce qui signifie ici, k étant algébriquement clos, qu'il est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbb{G}_m^r$), et qui est maximal pour cette propriété. Noter que, k étant parfait, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est un sous-groupe de G, lisse sur k, c'est donc essentiellement un groupe algébrique au sens de BIBLE. D'ailleurs, tout sous-groupe réduit de G (tel un tore) est automatiquement un sous-groupe de $\mathrm{G}_{\text{réd}}$, par suite les tores maximaux de G coïncident avec les tores maximaux de $\mathrm{G}_{\text{réd}}$. Lorsque G est affine, donc $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ affine, un théorème fondamental de Borel nous dit que deux tores maximaux de G sont conjugués par un élément de $\mathrm{G}(k) = \mathrm{G}_{\text{réd}}(k)$ (BIBLE 6, th. 4 c), en particulier ils ont même dimension. Nous appellerons la dimension commune des tores maximaux de G le *rang réductif* de G. Noter d'ailleurs que la restriction G affine est inutile, comme il résulte d'un théorème connu de Chevalley, affirmant que tout groupe algébrique connexe lisse sur k est une extension d'une variété abélienne par un groupe affine ; cf. N°6. Dans les N$^{\text{os}}$ 1 à 4, nous nous bornerons le plus souvent aux préschémas en groupes affines sur la base.

Soit G un groupe algébrique lisse sur k, et T un tore maximal de G, le centralisateur C(T) de T dans G sera appelé le *sous-groupe de Cartan* de G associé à T. C'est pour nous un sous-préschéma en groupes défini grâce à VIII 6.7, mais on notera que G étant lisse sur k, il en est de même du sous-groupe de Cartan C, en vertu de XI 5.3, donc
182 dans ce cas C est l'unique sous-préschéma en groupes de G lisse sur k (i.e. un sous-groupe algébrique de G au sens de BIBLE) tel que C(k) soit le sous-groupe de G(k) centralisateur de T(k), i.e. c'est essentiellement le centralisateur au sens de BIBLE. D'après le théorème de conjugaison déjà cité, les sous-groupes de Cartan associés aux divers tores maximaux sont conjugués entre eux, donc ont même dimension. Nous appellerons leur dimension commune le *rang nilpotent de* G, il est égal à celui de $\mathrm{G}_{\text{réd}}$. Soient $\rho_r(\mathrm{G})$ et $\rho_n(\mathrm{G})$ les rangs réductif et nilpotent de G, alors on a

$$\rho_r(\mathrm{G}) \leqslant \rho_n(\mathrm{G}),$$

et la différence

$$\rho_u(\mathrm{G}) = \rho_n(\mathrm{G}) - \rho_r(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{C}/\mathrm{T}$$

pourrait être appelé, lorsque G est affine, le *rang unipotent* de G. Lorsque G est lisse, affine et connexe, alors C est un groupe algébrique *nilpotent et connexe* (BIBLE 6, th. 6 a) et c)), donc (BIBLE 6, th. 2) isomorphe au produit $\mathrm{C}_s \times \mathrm{C}_u$, où $\mathrm{C}_s = \mathrm{T}$ est le tore maximal de départ (qui est a fortiori un tore maximal dans C), et où C_u est un sous-groupe lisse unipotent, i.e. extension successive de groupes isomorphes à $\mathbb{G}_a$ (BIBLE 6 th. 1 cor. 1 et 7, th. 4). On a donc aussi, dans ce cas :

$$\rho_u(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{C}_u.$$

Remarque 1.1. — En plus des trois notions de rang que nous venons de préciser pour un groupe algébrique affine, il en est deux autres qui sont utiles, savoir le *rang semi-simple* $\rho_s(\mathrm{G})$, qui est par définition le rang réductif du quotient G/R, où R est le radical de G, et enfin le *rang infinitésimal* $\rho_i(\mathrm{G})$, qui est par définition le rang nilpotent de l'algèbre de Lie de G (qui sera défini et étudié dans l'exposé suivant). Nous ne les utiliserons pas dans le présent exposé. Signalons seulement les inégalités :

$$\rho_s \leqslant \rho_r \leqslant \rho_n \leqslant \rho_i.$$

Lemme 1.2. — *Soit* G *un groupe algébrique sur le corps algébriquement clos* k, T *un sous-groupe algébrique de* G, k' *une extension algébriquement close de* k, G′ *et* T′ *les groupes déduits de* G, T *par extension de la base. Pour que* T *soit un tore maximal de* G, *il faut et suffit que* T′ *soit un tore maximal de* G′. 183

C'est une conséquence immédiate du « principe de l'extension finie » EGA IV 9.1.1.

Définition 1.3. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de type fini, T un sous-préschéma en groupes de G. On dit que T est un *tore maximal* de G si

a) T est un tore (IX 1.3) et

b) pour tout $s \in S$, désignant par $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, $T_{\overline{S}}$ est un tore maximal dans $G_{\overline{s}}$.

Remarques 1.4. — Il résulte de 1.2 que lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos on retrouve la définition habituelle, et que la propriété 1.3 est stable par tout changement de base. Noter que en vertu de X 8.8 l'on peut dans la définition 1.3 remplacer la condition a) par la condition :

a′) T est de présentation finie et plat sur S.

On fera attention qu'un tore maximal au sens de la définition 1.3 est bien maximal dans l'ensemble des sous-tores de G (comme il résulte aussitôt de IX 2.9), mais que la réciproque ne peut être exacte, la base S étant disons connexe, que si G admet effectivement un tore maximal au sens de 1.3, ce qui n'est pas le cas en général (même si $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et si G est « semi-simple » ; voir aussi 1.6). Nous verrons cependant dans XIV que la réciproque est vraie lorsque S est artinien, ou lorsque S est un schéma local et G est « réductif » : dans ce cas, tout tore de G est contenu dans un tore maximal.

Définition 1.5. — Soit G un groupe algébrique sur un corps k. On appelle *rang réductif* (resp. *rang nilpotent*, resp. *rang unipotent* etc.) de G le rang réductif (resp. ...) de $G_{\overline{k}}$, où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k. 184

On notera qu'en vertu de 1.2 et de la commutation de la formation de $\underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ avec l'extension de la base, les notions de rang introduites dans 1.5 sont *invariantes par extension du corps de base* ; d'autre part, pour k algébriquement clos, elles coïncident avec celles introduites au début du présent numéro.

Remarque 1.6. — Il n'est pas difficile de construire un schéma en groupes affine et lisse G sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, dont la fibre générique soit isomorphe à $\mathbb{G}_m$, et la fibre spéciale isomorphe à $\mathbb{G}_a$. Un tel G ne contient aucun tore sauf le tore trivial T (réduit au sous-groupe unité), qui n'est évidemment pas tore maximal. De façon précise, dans la fibre spéciale $G_0 = \mathbb{G}_{a,\,k}$, T_0 est bien tore maximal, mais dans la fibre générique $G_1 = \mathbb{G}_{m,\,K}$, T_1 n'est plus tore maximal (k est le corps résiduel, K le corps des fractions de l'anneau de valuation envisagé). On voit aussi sur cet exemple que le rang réductif de G_s ($s \in S$) n'est pas fonction continue de s. On a cependant les résultats suivants :

Théorème 1.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes affine et lisse sur* S. *Pour tout* $s \in S$, *considérons* $\rho_r(s) = \rho_r(G_s)$ *et* $\rho_n(s) = \rho_n(G_s)$, *les rangs réductif et nilpotent de* G_s (1.5). *Avec ces notations, on a ce qui suit :*

a) *La fonction* ρ_r *sur* S *est semi-continue inférieurement, la fonction* ρ_n *sur* S *est semi-continue supérieurement, donc la fonction* $\rho_u = \rho_n - \rho_r$ *est semi-continue supérieurement.*

b) *Les conditions suivantes* (*stables par changement de base quelconque*) *sont équivalentes :*

(i) *La fonction* ρ_r *sur* S *est localement constante.*

185 (ii) *Il existe localement, au sens de la topologie étale, un tore maximal dans* G.

(ii bis) *Il existe localement, au sens de la topologie fidèlement plate quasi-compacte, un tore maximal dans* G.

c) *Soient* T_1, T_2 *deux tores maximaux dans* G (*ce qui implique que l'on est sous les conditions envisagées dans b*)). *Alors* T_1, T_2 *sont conjugués localement au sens de la topologie étale, i.e. il existe un morphisme étale surjectif* $S' \to S$ *tel que les sous-groupes* $(T_1)_{S'}$ *et* $(T_2)_{S'}$ *de* $G_{S'}$ *soient conjugués par une section de* $G_{S'}$ *sur* S'.

d) *Sous les conditions de* b), *i.e. lorsque* ρ_r *est localement constante, il en est de même de* ρ_n (*donc aussi de* $\rho_u = \rho_n - \rho_r$).

Démonstration. a) Notons que pour tout morphisme $S' \to S$, si $G' = G \times_S S'$, les fonctions ρ'_r etc. sur S' définies en termes de G' comme ρ_r etc. en termes de G, s'obtiennent simplement en composant ces dernières avec $S' \to S$. Lorsque $S' \to S$ est fidèlement plat quasi-compact, il en résulte que ρ' est continue, resp. semi-continue supérieurement, resp. semi-continue inférieurement, si et seulement si ρ l'est, la topologie de Zariski de S étant en effet quotient de celle de S' (SGA1 VIII 4.3). Par suite, les assertions de a) sont locales pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte. Soit alors $s \in S$, on veut montrer que l'ensemble U des $t \in S$ tels que $\rho_r(t) \geqslant \rho_r(s)$ (resp. $\rho_n(t) \leqslant \rho_n(s)$) est un voisinage de s. En vertu du principe de l'extension finie, il existe une extension finie k de $\kappa(s)$, telle que G_k admette un tore maximal. Il existe alors un voisinage ouvert U de s, et un morphisme fini surjectif localement libre $S' \to U$, tel que la fibre S'_s soit $\kappa(s)$-isomorphe à $\mathrm{Spec}(k)$ (cf. EGA III 10.3.2, où l'hypothèse noethérienne est manifestement inutile). Comme $S' \to S$ est un morphisme ouvert (SGA1 IV 6.6), on est ramené au cas où $S' = S$, i.e. au cas où il existe un tore maximal T_s dans G_s. De plus, grâce à XI 5.8 a), quitte à
186 remplacer encore S par un S' étale sur S et muni d'un point s' au-dessus de s, on peut supposer que T_s est la fibre en s d'un sous-tore T de G. Alors pour tout $t \in S$, $\rho_r(t) = \rho_r(G_t) \geqslant \dim T_t = \dim T_s = \rho_r(G_s) = \rho_r(s)$, ce qui prouve que ρ_r est semi-continue inférieurement. D'autre part, en vertu de XI 5.3, le foncteur

$$C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$$

est représentable par $C = \mathrm{Centr}_G(T)$ [2], un sous-préschéma en groupes fermé de G *lisse* sur S. Donc il existe un voisinage U de s tel que $t \in U$ implique $\dim C_t = \dim C_s = \rho_n(s)$. La semi-continuité supérieure de ρ_n est alors une conséquence de la relation

$$\rho_n(t) \leqslant \dim C_t \quad \text{pour tout} \quad t \in S,$$

qui est contenue elle-même dans le lemme purement géométrique suivant :

Lemme 1.8. — *Soient k un corps,* G *un groupe algébrique affine et lisse sur k,* T *un tore dans* G*,* C *son centralisateur, alors on a*

$$\rho_n(G) \leqslant \dim C.$$

En effet, on peut supposer k algébriquement clos, de sorte que T est contenu dans un tore maximal T′. Soit C′ le centralisateur de ce dernier, alors on a $C' \subset C$, donc $\dim C' \leqslant \dim C$. C.Q.F.D.

b) Si ρ_r est localement constant, alors pour tout tore T dans G, et tout $s \in S$, si T_s est tore maximal dans G_s, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que $T|_U$ soit tore maximal dans $G|_U$. Utilisant maintenant le raisonnement de a), on voit que (i) ⇒ (ii bis). D'autre part (ii bis) ⇒ (i), car lorsque G admet un tore maximal T, alors il est évident que $\rho_r(s) = \dim T_s$ est une fonction localement constante de s, or nous avons signalé au début de la démonstration de a) que la question de la continuité de ρ_r était locale pour la topologie fidèlement plate. Donc (i) ⇔ (ii bis), et évidemment (ii) ⇒ (ii bis), reste à prouver l'implication inverse (i) ⇒ (ii). Pour ceci, 187
introduisons le foncteur F de XI 4.1[3], qui est donc un préschéma lisse et séparé sur S, et considérons le sous-foncteur $\mathscr{T}$ de F, dont la valeur pour un S′ sur S est l'ensemble des tores maximaux dans $G_{S'}$. Utilisant la remarque précédente que, moyennant (i), un tore dans $G_{S'}$ qui est maximal dans la fibre d'un point $s \in S'$ est maximal au-dessus d'un voisinage ouvert de s, on voit que $\mathscr{T}$ est représentable par un sous-préschéma ouvert de F, et par suite est lisse et séparé sur S. Comme le morphisme structural $\mathscr{T} \to S$ est évidemment surjectif, il admet donc une section localement au sens de la topologie étale en vertu de XI 1.10, ce qui prouve (i) ⇒ (ii).

c) C'est une conséquence immédiate de XI 5.4 bis, compte tenu du théorème de conjugaison de Borel rappelé au début du numéro.

d) Moyennant la remarque du début de la démonstration dans a), et compte tenu de b), on peut supposer qu'il existe un tore maximal T dans G. Si C est son centralisateur, alors C est représentable et est lisse sur S par XI 5.3, donc la fonction $s \mapsto \rho_n(s) = \dim C_s$ est bien localement constante.

La démonstration de 1.7 est achevée. Nous référerons aux conditions envisagées dans 1.7 b) en disant que dans ce cas, G est de *rang réductif localement constant.* Notons :

---

[2] N.D.E. : modification faite pour introduire le préschéma $C = \mathrm{Centr}_G(T)$ représentant le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$.
[3] N.D.E. : Il s'agit du foncteur des sous–groupes de type multiplicatif de G.

Corollaire 1.9. — *Soit* G *comme dans* 1.7, *et soit* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* $\rho_u(s) = 0$ *i.e.* $\rho_r(s) = \rho_n(s)$, (*i.e. les sous-groupes de Cartan de* G_k *sont des tores, où* k *est une clôture algébrique de* $\kappa(s)$). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *sur lequel* ρ_r *et* ρ_n *sont constants, en particulier pour tout* $t \in \mathrm{U}$, *le rang unipotent* $\rho_u(t)$ *de* G_t *est nul.*

En effet, cela résulte immédiatement de 1.7 a) et de l'inégalité $\rho_r(t) \leqslant \rho_n(t)$ pour tout $t \in \mathrm{S}$.

Notons aussi que nous avons prouvé, en même temps que b), le

188 ***Corollaire 1.10***. — *Soit* G *comme dans* 1.7, *et supposons* G *de rang réductif localement constant. Considérons le foncteur*

$$\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ} \longrightarrow (\mathbf{Ens}),$$

tel que pour tout S′ *sur* S, *on ait*

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des tores maximaux de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

Alors $\mathscr{T}$ *est représentable par un préschéma lisse, séparé et de type fini sur* S.

Il reste à vérifier que $\mathscr{T}$ est de type fini sur S. La question étant locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, on peut supposer que G admet un tore maximal T. D'après XI 5.3 bis et la version bis de 5.5, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ sont représentables par des préschémas $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et $\mathscr{T}$ est isomorphe à $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ [(4)]. Le morphisme $\mathrm{G} \to \mathscr{T}$ défini par $g \mapsto \mathrm{int}(g)(\mathrm{T})$ étant surjectif, et G quasi-compact sur S, il en est de même de $\mathscr{T}$, ce qui achève la démonstration.

Remarques 1.11. — a) Le préschéma $\mathscr{T}$ de 1.10 s'appellera comme de juste le *préschéma des tores maximaux* de G. On verra au N°5 qu'il est en fait *affine* sur S. On peut le vérifier directement, lorsque G est isomorphe à un sous-préschéma en groupes fermé d'un préschéma de la forme $\mathrm{GL}(n)$, en utilisant XI 4.6 et en remarquant que par le raisonnement de la démonstration de 1.7 b), $\mathscr{T}$ s'identifie à un sous-préschéma à la fois *ouvert et fermé* du préschéma F qui représente les sous-groupes de type multiplicatif de G.

b) Il est possible de donner une démonstration de 1.7 donc de 1.9 n'utilisant pas les résultats délicats de XI, mais seulement les résultats faciles XI 3.12 et 6.2, en travaillant uniquement avec des groupes de type multiplicatif finis sur la base (moralement, les groupes ${}_n\mathrm{T}$ où T est un tore maximal), comparer N°7. La même remarque vaut pour la démonstration de 1.10.

189 Nous terminons ce numéro en donnant des exemples où il existe un unique tore maximal.

Proposition 1.12. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors* G *admet un unique tore maximal, et tout tore dans* G *est contenu dans ce tore maximal.*

(4) N.D.E. : modification faite pour introduire les préschémas $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

L'unicité résulte évidemment de cette dernière assertion, qui caractérise le tore maximal comme le plus grand sous-tore de G. De l'unicité résulte que la question d'existence est locale pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, ce qui nous permet de supposer G diagonalisable, i.e. de la forme $D_S(M)$, M un groupe commutatif de type fini. Soit M_0 le quotient de M par son sous-groupe de torsion, je dis que le tore $T = D_S(M_0)$ dans G est tore maximal et un plus grand sous-tore. En effet un sous-tore T' de G est localement diagonalisable pour la topologie fpqc, donc pour prouver $T' \subset T$, on peut supposer T' diagonalisable, donc de la forme $D_S(N)$, où N est un quotient libre de M (VIII 1.4 et 3.2 b)), donc N est un quotient de M_0, donc $T' \subset T$. Comme la construction de T comme $D_S(M_0)$ est compatible avec toute extension de la base, cela montre en même temps que T est un tore maximal de G, et achève la démonstration. Dans le cas où G est lisse sur S, on peut généraliser 1.12 :

Proposition 1.13. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes de présentation finie sur* S. *Supposons que* G *admette localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un tore maximal* central. *Alors* G *admet* (*globalement*) *un unique tore maximal*[(5)], *et c'est le plus grand sous-tore de* G.

Ici encore, l'unicité est triviale sur la dernière assertion, et rend l'existence une question locale pour fpqc, ce qui nous permet de supposer que G admet un tore maximal central T. Montrons que tout tore R de G est contenu dans T.

Ceci résulte du 190

Lemme 1.14. — *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes, de présentation finie sur* S, T *un tore maximal de* G, R *un sous-tore de* G, *et supposons que* T *et* R *commutent. Alors* $R \subset T$.

En effet, comme R et T commutent, le morphisme $R \times_S T \to G$ défini par $(r, t) \mapsto r \cdot t$ est un homomorphisme de groupes, donc en vertu de IX 6.8 il admet un sous-groupe image T' dans G, qui est un groupe de type multiplicatif quotient de $R \times_S T$, donc un tore, contenant évidemment T. Comme T est un tore maximal, on a $T' = T$ (1.4), donc $R \subset T$, ce qui démontre 1.14 donc 1.13. En particulier, utilisant 1.7 b) :

Corollaire 1.15. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes* commutatif, *lisse et affine sur* S, *de rang réductif localement constant. Alors* G *admet un unique tore maximal, et ce dernier contient tout sous-tore de* G.

Corollaire 1.16. — *Soit* G *un* S-*préschéma en groupes, lisse et affine sur* S. *Supposons que pour tout* $s \in S$, *désignant par* $\overline{s}$ *le spectre d'une clôture algébrique* k *de* $\kappa(s)$, *la fibre géométrique* $G_{\overline{s}}$ *soit un groupe algébrique connexe, et nilpotent* (*au sens de BIBLE, i.e. le groupe* $G(k)$ *de ses points à valeurs dans* k *est nilpotent*). *Supposons de plus le rang réductif de* G *localement constant. Alors* G *admet un unique tore maximal* T, *de plus* T *est central et c'est le plus grand sous-tore de* G.

[(5)] N.D.E. : qui est central !

En vertu de 1.7 b), G admet localement pour fpqc un tore maximal, et en vertu de 1.13 on est ramené à prouver qu'un tore maximal de G est central. En vertu de IX 5.6 b), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, qu'on peut supposer algébriquement clos. Alors $\mathrm{T}(k)$ est dans le centre de $\mathrm{G}(k)$ en vertu de BIBLE 6 th.2, ce qui implique que T est dans le centre de G, car $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est un sous-schéma fermé de G (VIII 6.6), qui contient les points de $\mathrm{G}(k)$, donc est identique à G par le Nullstellensatz (G étant réduit).

191 Enfin, pour référence ultérieure, signalons la proposition triviale suivante, (dont nous avons fait déjà usage implicitement) :

Proposition 1.17. — *Soient* $\mathrm{G} \supset \mathrm{H} \supset \mathrm{T}$ *des préschémas en groupes de type fini sur* S. *Conditions équivalentes :*

(i) T *est un tore maximal de* G.

(ii) T *est un tore maximal de* H, *et pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on a égalité des rangs réductifs* $\rho_r(\mathrm{G}_s) = \rho_r(\mathrm{H}_s)$.

2. Le groupe de Weyl

Soit d'abord k un corps algébriquement clos, et soit G un groupe algébrique sur k, lisse et affine sur k. Si T est un tore maximal, C son centralisateur et N son normalisateur, alors en vertu de XI 5.9 ce sont des sous-groupes fermés lisses de G, et C est un sous-groupe ouvert de N, de sorte que $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{C}$ est un groupe fini étale sur k, donc déterminé par le groupe $\mathrm{W}(k)$ de ses points à valeurs dans k, comme $\mathrm{W} = \mathrm{W}(k)_k$ (groupe constant défini par le groupe fini ordinaire $\mathrm{W}(k)$). Le groupe fini $\mathrm{W}(k)$ s'appellera le *groupe de Weyl géométrique*, (ou simplement groupe de Weyl si une confusion n'est pas à craindre), *de* G *relativement à* T. En vertu du théorème de conjugaison de Borel, les groupes de Weyl relatifs aux divers tores maximaux sont isomorphes entre eux, c'est pourquoi on parle parfois « du » groupe de Weyl de G, sans préciser de tore maximal. Comme la formation de C, N, et N/C commute à toute extension de la base, on voit que si k' est une extension algébriquement close de k, le groupe de Weyl géométrique de $\mathrm{G}_{k'}$ relativement à $\mathrm{T}_{k'}$ est canoniquement isomorphe à celui de G relativement à T ; par suite, « le » groupe de Weyl géométrique de G (qui est à proprement parler une classe à isomorphisme près de groupes finis ordinaires) coïncide avec celui de G'.

192 Ceci permet, lorsque G est un groupe algébrique lisse et affine sur un corps quelconque k, de parler du *groupe de Weyl géométrique* de G comme étant la classe à isomorphisme près du groupe de Weyl géométrique de $\mathrm{G}_{k'}$, où k' est une extension algébriquement close quelconque de k. Lorsque G admet le tore maximal T, alors on peut évidemment former comme plus haut $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{N} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{C}$ qui est un groupe fini étale sur k, appelé le *groupe de Weyl de* G *relativement à* T ; le groupe de Weyl géométrique n'est alors autre que la classe du groupe des points de W à valeurs dans une extension algébriquement close quelconque k' de k. Ici, la connaissance du groupe de Weyl géométrique $\mathrm{W}(k')$ ne suffit évidemment plus en général, à reconstituer le groupe algébrique W : il faut de plus connaître les

opérations sur $\mathrm{W}(k')$ du groupe de Galois de la clôture algébrique séparable de k dans k'.

Lorsque enfin G est un préschéma en groupes sur une base quelconque S, G lisse et affine sur S, et si T est un tore maximal de G, alors XI 5.9 nous permet encore de former le groupe

$$\mathrm{W}(\mathrm{T}) = \mathrm{N}(\mathrm{T})/\mathrm{C}(\mathrm{T}),$$

qui est un S-préschéma en groupes étale, séparé et quasi-fini sur S. Ses fibres géométriques (relatives aux clôtures algébriques des corps résiduels $\kappa(s)$, $s \in \mathrm{S}$) sont les groupes de Weyl géométriques des fibres G_s. Par suite, XI 5.10 nous donne des renseignements sur la variation de ces groupes avec $s \in \mathrm{S}$. Nous pouvons préciser et généraliser ces renseignements de la façon suivante :

Théorème 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*. Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, soit* $w(s)$ *le groupe de Weyl géométrique de* G_s*, qui est donc une classe de groupes finis à isomorphisme près. Dans l'ensemble* E *de telles classes, introduisons la relation de préordre suivante :* $w \leqslant w'$ *si et seulement si* w *et* w' *sont représentés par des groupes finis* W *et* W'*, tels que* W *soit isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de* W'*. Avec cette convention :*

a) *La fonction* $s \mapsto w(s)$ *de* S *dans* E *est semi-continue inférieurement.* **193**

b) *Supposons que le rang réductif de* G *soit localement constant. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction* $s \mapsto w(s)$ *est localement constante.*

(i bis) *La fonction* $s \mapsto \operatorname{card} w(s)$ *est localement constante.*

(ii) *Il existe, localement pour la topologie étale* (*ou seulement pour la topologie* fpqc) *un tore maximal* T*, tel que* W(T) *soit fini sur sa base.*

(ii bis) *Pour tout* S' *sur* S*, et tout tore maximal* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, le groupe de Weyl associé* W(T) *est fini sur* S'*.*

Démonstration. a) Procédant comme dans 1.7 a), on est ramené, pour prouver que pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert U de s tel que $t \in \mathrm{U}$ implique $w(t) \geqslant w(s)$, au cas où il existe un tore R dans G tel que R_s soit un tore maximal dans G_s. Soit

$$\mathrm{W}(\mathrm{R}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{R})/\,\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{R})$$

comme dans XI 5.9, c'est un préschéma en groupes étale, séparé, quasi-fini sur S. Pour tout $t \in \mathrm{S}$, soit $w'(t) \in \mathrm{E}$ sa fibre géométrique en t. Comme R_s est un tore maximal dans G_s, et la formation de Norm, Centr, Norm / Centr est compatible avec toute extension de la base, en particulier le passage aux fibres, on voit que l'on a

$$w(s) = w'(s);$$

je dis que de plus, pour t voisin de s, on aura les inégalités

$$w(t) \geqslant w'(t) \qquad \text{et} \qquad w'(t) \geqslant w'(s),$$

ce qui suffira pour établir a). Ces deux inégalités sont contenues dans les deux lemmes suivants :

194 ***Lemme 2.2***. — *Soient* S *un préschéma,* W *un* S*-préschéma en groupes qui est étale, séparé et quasi-fini sur* S. *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *soit* $f(s)$ *la classe de la fibre géométrique de* W *en* s, *qui est un élément de l'ensemble ordonné* E *des classes de groupes finis à isomorphisme près, introduit dans* 2.1. *Alors la fonction* $f : \mathrm{S} \to \mathrm{E}$ *est semi-continue inférieurement. Pour qu'elle soit constante au voisinage de* $s \in \mathrm{S}$, *il faut et suffit qu'il en soit de même de la fonction* $s \mapsto \operatorname{card} f(s)$, *et pour ceci il faut et suffit que* W *soit fini sur* S *au-dessus d'un voisinage ouvert* U *de* s.

Ce résultat est un raffinement, en termes de groupes, de celui invoqué dans la démonstration de XI 5.10, nous nous bornons à une esquisse de la démonstration (qui est du type le plus standard). On est ramené comme d'habitude au cas S affine noethérien. On voit de suite que la fonction f est constructible (EGA 0_{III} 9.3.1 et 9.3.2, et sorites de EGA IV 9), et en vertu de EGA 0_{III} 9.3.4 on est ramené pour la semi-continuité à prouver que si t est une générisation de s, on a $f(t) \geqslant f(s)$. Cela nous ramène grâce à EGA II 7.1.7 au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, qu'on peut supposer complet à corps résiduel algébriquement clos. Mais alors, s désignant le point fermé de S, comme G est étale et séparé sur S, il contient un sous-schéma à la fois ouvert et fermé G′, fini sur S, tel que $\mathrm{G}'_s = \mathrm{G}_s$ (EGA II 6.2.6), et on voit de suite que G′ est ici un sous-groupe de G. D'ailleurs G′ étant étale fini sur S = Spec(V), V complet à corps résiduel algébriquement clos, est un groupe constant, donc de la forme $\mathrm{A_S}$, où $\mathrm{A} = \mathrm{G}'(\kappa(s)) = \mathrm{G}(\kappa(s))$ a pour classe $f(s)$. Si B est la fibre géométrique de G en le point générique t de S, on a donc un monomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, ce qui prouve $f(s) \leqslant f(t)$. (N. B. cette démonstration prouve en fait la semi-continuité pour une relations d'ordre sur E plus fine que celle indiquée dans 2.1). Le fait que f soit continue en s si et seulement si $s \mapsto \operatorname{card} f(s)$ l'est résulte du fait que pour $w, w' \in \mathrm{E}$, les relations $w \leqslant w'$ et card $w = \operatorname{card} w'$ impliquent $w = w'$. Le fait que cette condition soit équivalente à la finitude de W sur un voisinage de s est alors indépendant de la structure de groupe
195 sur W, et a été signalé après XI 5.10 ; d'ailleurs sa démonstration se fait aisément par les arguments précédents, en utilisant le critère valuatif de propreté EGA II 7.3.8.

Lemme 2.3. — *Soient* G *un groupe algébrique affine lisse sur un corps algébriquement clos* k, $\mathrm{R} \subset \mathrm{T}$ *deux sous-tores,* W(R) *et* W(T) *les deux groupes finis associés comme dans* XI 5.9, *quotients du normalisateur par le centralisateur. Alors* W(R) *est isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de* W(T).

Considérons en effet le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T} \arrow[r, hook] & \mathrm{C(T)} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{C(R)} \arrow[d, hook] \\
 & \mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{N(R)} \\
 & \mathrm{N(T)} &
\end{tikzcd}$$

alors $(\mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)})/\mathrm{C(T)}$ est un sous-groupe de $\mathrm{W(T)} = \mathrm{N(T)}/\mathrm{C(T)}$, et on a un homomorphisme évident :

$$(\mathrm{N(T)} \cap \mathrm{N(R)})/\mathrm{C(T)} \longrightarrow \mathrm{W(R)} = \mathrm{N(R)}/\mathrm{C(R)},$$

et tout revient à prouver que ce dernier est surjectif, donc que pour tout point g de N(R) à valeurs dans k, il existe un point c de C(R) à valeurs dans k tel que cg normalise T, i.e. tel que

$$\mathrm{int}(c)(\mathrm{int}(g)\mathrm{T}) = \mathrm{T}.$$

Or pour ceci, il suffit de noter que $\mathrm{int}(g)\mathrm{T}$ est un tore de N(R) donc de C(R) (qui en est un sous-groupe ouvert). Alors T et $\mathrm{int}(g)\mathrm{T}$ sont des tores maximaux de C(R), puisqu'ils sont maximaux dans G, et on conclut par le théorème de conjugaison de Borel.

Cela prouve 2.3 et par là 2.1 a). **196**

b) Nous avons déjà signalé que (i) et (i bis) sont équivalents trivialement, ils impliquent (ii bis) d'après la réciproque à 2.2 ou XI 5.10 au choix ; (ii bis) $\Rightarrow$ (ii) grâce à 1.7 b), enfin (ii) $\Rightarrow$ (i bis), car on voit comme dans 1.7 a) que la condition (i) est locale pour fpqc, ce qui nous permet de supposer que G admet un tore maximal T tel que W(T) soit fini sur S, et on conclut encore par XI 5.10. Cela achève la démonstration de 2.1.

3. Sous-groupes de Cartan

Définition 3.1. — Soit G un préschéma en groupes lisse de type fini sur le préschéma S. On appelle *sous-groupe de Cartan* de G un sous-préschéma en groupes C de G, lisse sur S, tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, désignant par $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, $\mathrm{C}_{\overline{s}}$ soit un sous-groupe de Cartan (cf. N°1) de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Il est immédiat que si C est un sous-groupe de Cartan de G, alors pour tout S′ sur S, $\mathrm{C}_{\mathrm{S}'}$ est un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. Si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, on retrouve la notion rappelée au N°1. Enfin, on vérifie aussitôt que le fait pour un sous-préschéma en groupes C de G d'être un sous-groupe de Cartan est de *nature locale* pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte.

Théorème 3.2. — *Soit* G *sur* S *comme dans* 3.1*, et supposons que* G *soit affine sur* S*, et de rang réductif localement constant. Alors l'application*

$$\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

induit une bijection de l'ensemble des tores maximaux de G *avec l'ensemble des sous-groupes de Cartan* (*) *de* G. *Si* C *correspond à* T*, alors* T *est l'unique tore maximal de* C. **197**

(*) La démonstration donnée ici prouve en fait seulement 3.2 pour les sous-groupes de Cartan *fermés* de G. Cependant, 7.1 a) établit 3.2 sous la forme énoncée, et implique que les sous-groupes de Cartan de G sont fermés.

Si T est un tore maximal de G, le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est représentable, en vertu de XI 5.3 ou 6.2, par un sous-préschéma fermé et lisse de G, $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et il résulte des définitions que C est un sous-groupe de Cartan de G. De plus, T est évidemment un tore maximal de C, et étant central, c'est l'unique tore maximal de C (1.13). Donc l'application $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ de l'ensemble des tores maximaux dans l'ensemble des sous-groupes de Cartan est injective, reste à prouver qu'elle est surjective. Soit donc C un sous-groupe de Cartan de G, prouvons qu'il est de la forme $\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, pour T un tore maximal de G. Pour cela il suffit de trouver un tore maximal T de C, car alors T sera un tore maximal de G (car pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s et C_s ont même rang réductif). En vertu de IX 5.6 b) T est dans le centre de C, donc $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}' = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, et alors C est un sous-groupe lisse du groupe lisse C′ sur S′, coïncidant avec C′ fibre par fibre, d'où $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Or comme G est de rang réductif localement constant, il en est de même de C, donc C admet un tore maximal *localement* pour la topologie étale en vertu de 1.7 b), et comme ce tore est central par le raisonnement précédent, il s'ensuit par 1.13 que C admet bien un tore maximal, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.3. — *Soit* G *un préschéma en groupes lisse et affine sur* S *de rang réductif localement constant, soit* $\mathscr{C} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *le foncteur défini par*

$$\mathscr{C}(\mathrm{S}') = \textit{ ensemble des sous-groupes de Cartan de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

Alors le foncteur $\mathscr{C}$ *est isomorphe au foncteur* $\mathscr{T}$ *de* 1.10*, donc est représentable par le même préschéma lisse, séparé et de type fini sur* S.

Corollaire 3.4. — *Sous les conditions de* 3.2*, si* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$*, on a*

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}).$$

198 ***Remarque 3.5***. — Lorsque G n'est pas de rang réductif localement constant, il est cependant possible que G admette des sous-groupes de Cartan (par exemple si G est à fibres connexes nilpotentes, G est un sous-groupe de Cartan de lui-même, mais n'est pas nécessairement de rang réductif localement constant, cf. 1.6). Dans XV, nous développons la théorie des sous-groupes de Cartan sans supposer G affine sur S ni de rang réductif localement constant, en utilisant la théorie des éléments réguliers du prochain exposé. Voir aussi les N$^{\mathrm{os}}$ 6 et 7 pour l'élimination de l'hypothèse affine.

4. Le centre réductif

Définition 4.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe de présentation finie sur S, à fibres affines, Z un sous-préschéma en groupes de G. On dit que Z est un *centre réductif* de G si

(i) Z est central, et de type multiplicatif et

(ii) pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et tout homomorphisme central $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, où H est un groupe de type multiplicatif et de type fini sur S, u se factorise à travers $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$.

(Pour une variante de cette notion lorsqu'on ne suppose pas les fibres de G affines, cf. 8.6.)

Notons qu'un tel Z est nécessairement de type fini sur S (puisque ses fibres le sont), donc est uniquement déterminé comme le plus grand sous-groupe central de type multiplicatif de G. Il est facile de donner des exemples où G (lisse et affine sur S) admet un plus grand sous-groupe central de type multiplicatif Z, mais où Z n'est pas un centre réductif (i.e. G n'admet pas de centre réductif), cf. par exemple 1.6 ; il résulte cependant facilement de IX 6.8 qu'un sous-groupe Z de G est un centre réductif de G si et seulement si c'est un plus grand sous-groupe central de type multiplicatif, et garde cette propriété par tout changement de base ; voir aussi 4.3 plus bas.

Il est évident sur 4.1 que si Z est le centre réductif de G, alors pour tout changement de base $S' \to S$, $Z_{S'}$ est le centre réductif de $G_{S'}$. De ceci, et de l'unicité du centre réductif, résulte grâce à la théorie de la descente fidèlement plate quasi-compacte (SGA 1 VIII) : **199**

Proposition 4.2. — *Soit* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S *et à fibres affines. Si* G *admet un centre réductif localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, il admet un centre réductif. Pour que* Z *soit un centre réductif de* G*, il faut et suffit qu'il le soit localement pour la topologie* fpqc.

Notons aussi :

Proposition 4.3. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie et à fibres affines,* Z *un sous-préschéma en groupes. Pour que* Z *soit un centre réductif de* G*, il faut et il suffit qu'il soit de type multiplicatif, et que pour tout* $s \in S$*,* Z_s *soit un centre réductif de* G_s.

En effet, il résulte d'abord de IX 5.6 b) qu'alors Z est central. Comme les conditions envisagées sont stables par changement de base, il reste à prouver que tout homomorphisme central $u : H \to G$, avec H de type multiplicatif et de type fini, se factorise par Z. Or, Z étant central, u et l'immersion canonique $v : Z \to G$ définissent un homomorphisme de groupes

$$w : H \underset{S}{\times} Z \longrightarrow G.$$

En vertu de IX 6.8 ce dernier admet un groupe image K, qui est un sous-groupe de type multiplicatif de G, et tout revient à prouver que l'on a $K = Z$. Or cela est vrai fibre par fibre d'après l'hypothèse sur Z, et il suffit maintenant d'appliquer IX 5.1 bis, ce qui achève de prouver 4.3.

On notera que dans le critère 4.3, l'hypothèse que pour tout $s \in S$, Z_s soit le centre réductif de G_s est en fait purement géométrique, i.e. il suffit de le vérifier sur la clôture algébrique de $\kappa(s)$, comme il résulte de la deuxième assertion de 4.2.

Théorème 4.4. — *Soit* G *un groupe algébrique* affine *sur un corps* k*. Alors* G *admet un centre réductif.* **200**

Comme le centre de G est représentable par un sous-groupe fermé de G (VIII 6.7), on est ramené aussitôt au cas où G est commutatif. De plus, en vertu de 4.2 on peut supposer k algébriquement clos. Nous verrons dans XVII que dans ce cas G s'écrit comme un produit $Z \times U$, où Z est de type multiplicatif, et U « unipotent », d'où il résultera aussitôt que Z est bien un centre réductif de G. Nous allons donner ici une démonstration indépendante du théorème de structure des groupes algébriques commutatifs sous la forme générale qu'on vient d'indiquer.

Notons qu'il résulte de IX 6.8 que l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif H de G est filtrant croissant. Montrons qu'il admet un plus grand élément.

Lorsque G est lisse sur k, on applique le théorème de structure BIBLE 4 th. 4,

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u,$$

avec G_s de type multiplicatif et G_u « unipotent », ce qui signifie ici que G_u admet une suite de composition dont les facteurs sont des sous-groupes (lisses si on y tient) de $\mathbb{G}_a$. (En effet, $\mathrm{G}_u/\mathrm{G}_u^0$ est un groupe unipotent par BIBLE 4, cor. au th. 3, donc un p-groupe où $p =$ exposant caractéristique, grâce à BIBLE 4 prop. 4, d'autre part G_u^0 admet une suite de composition à quotients connexes lisses de dimension 1 par BIBLE 6 th. 1, cor. 1, et ces derniers sont isomorphes à $\mathbb{G}_a$ par BIBLE 7 th. 4). Or on voit facilement (cf. lemme plus bas) que tout homomorphisme d'un groupe de type multiplicatif dans $\mathbb{G}_a$, donc aussi dans G_u, est trivial, ce qui prouve bien que tout sous-groupe de type multiplicatif de G est contenu dans G_s.

Dans le cas général, considérons le sous-groupe

$$\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}_{\text{réd}}$$

201 de G, qui est lisse sur k, donc par ce qui précède admet un plus grand sous-groupe de type multiplicatif Z_0. Les sous-groupes de type multiplicatif de G contenant Z_0 correspondent à des sous-groupes de type multiplicatif de $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}_0$. Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0 \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{Z}_0 \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \longrightarrow 0,$$

où en vertu de ce qui précède, $\mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0$ n'a pas de sous-groupe de type multiplicatif sauf le groupe unité. Comme un sous-groupe d'un groupe de type multiplicatif est de type multiplicatif (IX.8), il s'ensuit que pour tout sous-groupe de type multiplicatif H de G/Z_0, on a $\mathrm{H} \cap (\mathrm{G}_0/\mathrm{Z}_0) = 0$, donc $\mathrm{H} \to \mathrm{G}/\mathrm{G}_0$ est injectif. Comme G/G_0 est un groupe algébrique radiciel, donc fini sur k, cela implique que H est lui-même radiciel et de *rang majoré* par celui de G/G_0. Cela implique que la famille des sous-groupes de type multiplicatif de G admet un plus grand élément, soit Z.

Je dis que G/Z n'a pas de sous-groupe de type multiplicatif autre que le sous-groupe unité. Cela résulte du fait (démontré dans 7.1.1) qu'une extension commutative de deux groupes algébriques de type multiplicatif est de type multiplicatif : si donc Z' est l'image inverse dans G d'un sous-groupe de type multiplicatif de G/Z, alors Z' est de type multiplicatif, donc $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$ par le caractère maximal de Z, donc $\mathrm{Z}'/\mathrm{Z} = 0$.

Il résulte maintenant aisément du « principe de l'extension finie » que pour toute extension K de k, $(\mathrm{G}/\mathrm{Z})_{\mathrm{K}} = \mathrm{G}_{\mathrm{K}}/\mathrm{Z}_{\mathrm{K}}$ n'a pas non plus de sous-groupe de type multiplicatif sauf le groupe unité.

Nous pouvons maintenant prouver que Z est un centre réductif de G. En effet, soit $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ un homomorphisme de S-groupes, où S est un préschéma sur k et H un groupe de type multiplicatif et de type fini sur S, prouvons que u se factorise à travers Z_{S}. Il revient au même de dire que l'homomorphisme composé $\mathrm{H} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}} \to (\mathrm{G}/\mathrm{Z})_{\mathrm{S}} =$

G_S/Z_S est nul. Or je dis que, posant $U = G/Z$, tout homomorphisme $u : H \to U_S$ est nul. En effet, en vertu de IX 5.2 on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, et par IX 6.8 cela résulte alors du fait que U_K n'a d'autre sous-groupe de type **202**
multiplicatif que 0. Cela achève la démonstration de 4.4. Il reste seulement à reporter la démonstration du

Lemme 4.4.1. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif, alors tout homomorphisme de* S*-groupes* $u : H \to \mathbb{G}_a$ *est trivial.*

Considérons en effet le module $\mathscr{O}_S^2 = E$ comme une extension de $\mathscr{O}_S = E'$ par $\mathscr{O}_S = E''$, alors $\mathbb{G}_a$ s'identifie au préschéma des automorphismes de cette extension, donc un homomorphisme $u : H \to \mathbb{G}_a$ s'identifie à une structure de H-module sur E respectant la structure d'extension, i.e. telle que E' soit stable par H et que les opérations induites par H dans E' et E'' soient triviales. En vertu de I 4.7.3 il s'ensuit que H opère trivialement sur E, donc u est trivial. C.Q.F.D.

Remarque 4.4.2. — Si G est une variété abélienne non nulle sur k, alors G n'admet pas de centre réductif au sens de 4.1 où on omettrait la restriction « G affine », car pour n premier à la caractéristique, ${}_nG$ est étale sur k d'ordre premier à la caractéristique, donc de type multiplicatif, or la famille des ${}_nG$ est schématiquement dense dans G, donc s'il y avait un centre réductif, il serait identique à G, ce qui est absurde, G n'étant pas de type multiplicatif. C'est la raison pour laquelle il y a lieu dans 4.1 d'imposer la restriction que G soit à fibres affines.

Lemme 4.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, affine sur* S*, à fibres connexes,* T *un tore maximal de* G*,* $u : H \to G$ *un homomorphisme central, avec* H *un* S*-préschéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors* u *se factorise par* T*.*

En effet, soit C le centralisateur de T, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S (XI 5.3), donc affine sur S. Comme T est dans le centre de G, il est invariant, et on peut considérer le groupe quotient $G/T = U$, qui est représentable (VIII 5.1). Comme u est central, il se factorise par C, et tout revient à prouver que **203**
l'homomorphisme composé $H \to C \to U = C/T$ est trivial. En vertu de IX 5.2 on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, qu'on peut supposer algébriquement clos. Mais alors en vertu de BIBLE 6, th. 2, U est un groupe algébrique connexe (lisse sur k) « unipotent », ce qui signifie, comme nous l'avons déjà observé, qu'il admet une suite de composition à quotients isomorphes à $\mathbb{G}_a$. Donc tout homomorphisme d'un groupe de type multiplicatif de type fini H dans U est trivial. Cela démontre 4.5.

Corollaire 4.6. — *Soit* G *comme dans* 4.5*. Si* G *admet un centre réductif, ce dernier est contenu dans tout tore maximal de* G*.*

Théorème 4.7. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, affine sur* S*, et à fibres connexes.*

a) *Pour tout* $s \in S$*, soit* $z(s)$ *le type du centre réductif de* G_s *(qui est défini en vertu de* 4.4*). Ordonnons l'ensemble* E *des classes, à isomorphisme près, de* $\mathbb{Z}$*-modules de type fini, en déclarant que la classe de* M *est plus grande que celle de* M'*, si* M' *est* *isomorphe à un quotient de* M. *Alors l'application* $\mathrm{S} \to \mathrm{E}$, $s \mapsto z(s)$ *est semi-continue inférieurement.*

b) *Pour que* G *admette un centre réductif* Z, *il faut et il suffit que la fonction précédente* $z : \mathrm{S} \to \mathrm{E}$ *soit localement constante. S'il en est ainsi,* G/Z *est représentable* (cf. VIII 5.1)*, et* G/Z *admet pour centre réductif le sous-groupe unité.*

c) *Supposons que le rang réductif de* G *soit localement constant* (cf. 1.7 b)*. Alors* G *admet un centre réductif* Z*. Si* G/Z *est représentable* (*par exemple,* G *affine sur* S) *alors de plus les tores maximaux* T *de* G (*resp. les sous-groupes de Cartan* C *de* G) *et* T' (*resp.* C') *de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *sont en correspondance biunivoque, à* T (*resp.* C) *correspondant* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ (*resp.* $\mathrm{C}' = \mathrm{C}/\mathrm{Z}$)*, et à* T' (*resp.* C') *correspondant* $\mathrm{T} = \varphi^{-1}(\mathrm{T}')$ (*resp.* $\mathrm{C} = \varphi^{-1}(\mathrm{C}')$)*, où* $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *est l'homomorphisme canonique.*

204 d) *Soit* T *un tore maximal de* G*, désignons par* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G*, et considérons l'homomorphisme*

$$\theta : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),$$

induit par la représentation adjointe de G (II 4)*. Alors le noyau de* θ *est un centre réductif de* G*.*

Démonstration. a) et b). La démonstration de a) et de la première assertion dans b) est essentiellement identique à celle de 1.7 a) et b), et nous nous dispensons de reproduire ici le raisonnement. Signalons seulement qu'il faut faire appel dans a) à IX 5.6 (utilisant le fait que G est à fibres connexes). Prouvons la deuxième assertion de b), i.e. que si Z est un centre réductif de G, alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ admet pour centre réductif le sous-groupe unité. Notons tout de suite qu'en vertu de VIII 5.1 le groupe quotient G/Z est bien représentable, il est affine sur S, de présentation finie sur S (VIII 5.8) et même lisse sur S (car il suffit de le voir pour les fibres, G' étant plat de présentation finie sur S, or pour les fibres on a signalé dans $\mathrm{VI_B}$.9.2.(xii) qu'un quotient d'un groupe algébrique lisse sur un corps k est lisse) ; enfin G étant à fibres connexes, il en est de même de G'. Ainsi G' satisfait aux mêmes hypothèses de départ que G. Pour voir que le sous-groupe unité de G' est un centre réductif, on peut se borner si on veut au cas où S est le spectre d'un corps (4.3). Soit Z' un sous-groupe central de type multiplicatif de G', tout revient à prouver que Z' est réduit au groupe unité. Soit Z_1 l'image inverse de Z' dans G, et considérons les opérations de Z_1 sur G induites par automorphismes intérieurs de G. Comme Z est central, Z opère trivialement, de sorte que Z_1 opère par l'intermédiaire d'opérations de Z' sur G. D'ailleurs Z étant dans le centre de G, Z_1 donc Z' opère trivialement sur Z, de plus Z' étant dans le
205 centre de G', les opérations de Z' dans le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{Z} = \mathrm{G}'$ sont également triviales. Comme Z est central, il s'ensuit aussitôt que les opérations de Z' sur G proviennent d'un homomorphisme de groupes

$$u : \mathrm{Z}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G}', \mathrm{Z}),$$

par

$$r(z') \cdot g = g \cdot u(z')(\varphi(g)),$$

où $r : \mathrm{Z}' \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G})$ est la représentation envisagée de Z' par automorphismes de G, $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ l'homomorphisme canonique. Or la donnée d'un homomorphisme de groupes u comme ci-dessus, revient à la donnée d'un homomorphisme de groupes

$$v : \mathrm{G}' \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{Z}', \mathrm{Z}),$$

d'autre part en vertu de X 5.8 le deuxième membre est représentable et est un groupe étale sur S, donc sa section unité est une immersion ouverte, donc $\operatorname{Ker} v$ est un sous-groupe ouvert de G′. Comme G′ est à fibres connexes, il est égal à G′, donc v est nul, donc u est nul, donc Z′ opère trivialement dans G, donc il en est de même de Z_1, qui est donc *central* dans G. Ainsi Z_1 est une extension *commutative* d'un groupe de type multiplicatif Z′ par un groupe de type multiplicatif Z, donc (comme on est sur un corps) est un groupe de type multiplicatif (7.1.1). Étant central dans G, il est contenu dans le centre réductif Z, i.e. $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}$, d'où Z′ = groupe unité, ce qui achève de prouver b).

d) Soit $\mathrm{Z} = \operatorname{Ker} \theta$, qui est un sous-groupe de type multiplicatif de T (par exemple en vertu de IX 6.8). En vertu de 4.5, tout homomorphisme central $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, avec H de type multiplicatif et de type fini, se factorise par T, donc par Z. Comme la formation de Z est compatible avec tout changement de base, il reste à prouver que Z est *central*, i.e. que le centralisateur C de Z est égal à G. Or, en vertu de XI 5.3, C est un sous-groupe fermé lisse de G, d'autre part, comme Z opère trivialement sur **206**
$\mathfrak{g}$, on voit que $\mathrm{Lie}(\mathrm{C}) = \mathfrak{g}$. On en conclut aisément que C = G : en effet, l'immersion $\mathrm{C} \to \mathrm{G}$ est étale, car elle l'est fibre par fibre (comme un homomorphisme non ramifié de groupes algébriques lisse de même dimension, $\mathrm{VI_B}$.1.3) et on peut appliquer X 3.5. Ainsi $\mathrm{C} \to \mathrm{G}$ est une immersion fermée étale, donc une immersion ouverte (SGA1 I 5.1), et comme c'est aussi une immersion fermée et que G est à fibres connexes, c'est un isomorphisme.

c) En vertu de 1.7 b), G admet localement pour la topologie fpqc un tore maximal, donc en vertu de 4.2 et de d) qu'on vient de démontrer, G admet un centre réductif Z. On a vu dans d) que tout tore maximal T de G contient Z. On constate aussitôt que $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Z}$ est un tore, pour prouver que c'est un tore maximal dans G′, on est ramené par la définition 1.3 au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et alors l'assertion est contenue dans BIBLE 7 th. 3a). Inversement, soit T′ un tore maximal de G′, et soit $\mathrm{T} = \varphi^{-1}(\mathrm{T}')$, prouvons que T est un tore maximal de G. La question étant locale pour la topologie fpqc, on peut supposer que G admet déjà un tore maximal, soit T_0, de sorte que en vertu de ce qui précède, $\mathrm{T}'_0 = \mathrm{T}_0/\mathrm{Z}_0$ est un tore maximal de G′. En vertu du théorème de conjugaison 1.7 c), T′ et T'_0 sont localement conjugués pour la topologie fpqc, donc ($\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ étant couvrant pour cette topologie, donc toute section de G′ se remontant localement en une section de G) T et T_0 sont également conjugués localement. Comme T est un tore maximal, il en est donc de même de T. On procède de façon analogue pour les sous-groupes de Cartan. Cela achève la démonstration.

Donnons une traduction utile de d), dans le cas où T est diagonalisable, donc de la forme $\mathrm{D_S}(\mathrm{M})$, où M est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Alors (I 4.7.3) le T-module

$\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de sous-T-modules $\mathfrak{g}_m (m \in \mathrm{M})$:

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}_m,$$

207 qui sont nécessairement localement libres. Supposons que pour tout $m \in \mathrm{M}$, le rang de $\mathfrak{g}_m$ soit constant (ce qui est le cas en particulier si S est connexe). Alors l'ensemble R des $m \in \mathrm{M}$ tels que $\mathfrak{g}_m \neq 0$ (« racines ») est fini. Ceci posé :

Corollaire 4.8. — *Sous les conditions et avec les notations précédentes, le centre réductif de* G *est l'intersection des noyaux des caractères racines* $m \in \mathrm{R}$ *sur* T. *On a donc un isomorphisme*

$$\mathrm{Z} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}),$$

où N *est le quotient de* M *par le sous-groupe engendré par* R.

Corollaire 4.9. — *Soit* G *un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos k. On suppose* G *lisse sur k, connexe affine, à centre réductif réduit au groupe unité, et que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G *est nilpotente. Alors* G *est « unipotent », i.e. admet une suite de composition à quotients isomorphes à* $\mathbb{G}_a$.

En vertu de BIBLE 6, th. 4, cor. 3 il suffit de prouver qu'un tore maximal T de G est réduit au groupe unité, ou ce qui revient au même, que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T est réduite à 0. Or il résulte du fait que le T-module $\mathfrak{g}$ se décompose suivant les caractères α de T (I 4.7.3), que pour tout $t \in \mathfrak{t}$, l'opération $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ dans $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Si donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ est nul. Or en vertu de 4.7 d), le centre réductif de G étant réduit à l'élément neutre, l'homomorphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un monomorphisme donc induit une application injective sur les algèbres de Lie, ce qui signifie (II 4.5.) que pour $t \in \mathfrak{t}$, la relation $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t) = 0$ implique $t = 0$. Cela prouve que $\mathfrak{t} = 0$ et achève la démonstration.

Proposition 4.10. — *Soit* G *un groupe algébrique affine, lisse, connexe sur un corps algébriquement clos k. Alors le centre réductif de* G *est l'intersection des tores maximaux de* G.

208 Bien entendu, il s'agit de l'intersection au sens schématique, (ou ce qui revient au même, au sens sous-foncteurs de G), i.e. du plus grand sous-préschéma fermé de G majoré par les tores maximaux de G. Il résulte du caractère noethérien de G que c'est aussi l'intersection d'un ensemble *fini* convenable de tores maximaux de G.

Soit Z l'intersection en question, Z est un sous-groupe fermé d'un tore donc est de type multiplicatif, d'autre part en vertu de 4.5 il contient le centre réductif de G. Pour prouver qu'il lui est égal, il reste à prouver qu'il est central. Comme G est connexe, il suffit en vertu de IX 5.5 de prouver que Z est *invariant.* Or par construction Z est invariant par les $\mathrm{int}(g)$, avec $g \in \mathrm{G}(k)$, donc le normalisateur N de Z (cf. VIII 6.7) est un sous-groupe fermé de G qui contient les points rationnels de G. Comme G est réduit, on a $\mathrm{N} = \mathrm{G}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 4.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, affine sur* S*, à fibres connexes, et de rang unipotent nul, ce qui implique* (1.9) *que*

G *est de rang réductif localement constant, donc* (1.10) *que le « préschéma des tores maximaux de* G *» est défini, soit* $\mathscr{T}$, *et est lisse, séparé, de type fini sur* S. *Faisons opérer* G *sur* $\mathscr{T}$ *via automorphismes intérieurs, d'où un homomorphisme de foncteurs groupes*

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathscr{T}).$$

Sous ces conditions, les trois sous-foncteurs suivants de G *sont identiques :*

(i) *Le centre réductif* Z *de* G.

(ii) *Le centre* Z′ *de* G.

(iii) *Le noyau* $\mathrm{Z}'' = \mathrm{Ker}\, u$ *de l'homomorphisme précédent.*

En particulier, le centre de G *est représentable par un sous-groupe de type multiplicatif de* G.

Démonstration. On a trivialement $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z}' \subset \mathrm{Z}''$, reste à prouver que $\mathrm{Z}'' \subset \mathrm{Z}$, ce qui revient à prouver (les hypothèses étant stables par changement de base) que toute section g de G sur S qui opère trivialement sur $\mathscr{T}$ est une section de Z. Introduisant $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ et utilisant 4.7 b) et c), qui impliquent en particulier que le préschéma $\mathscr{T}'$ des tores maximaux de G′ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{T}$, on est ramené au cas où $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$, i.e. au cas où le centre réductif Z de G est nul. (N. B. noter qu'en vertu de 4.7 c), le rang unipotent de G′ est égal à celui de G, donc est nul puisque celui de G l'est). Il faut donc prouver dans ce cas que g est la *section unité* de G. Le procédé de réduction habituel nous ramène au cas où S est noethérien, et même au cas où S est *artinien local*, (puisque pour vérifier que g est la section unité, il suffit de vérifier lorsque S est localement noethérien qu'il en est ainsi après tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, avec S′ artinien local). Or dans ce cas le noyau Z″ de u est représentable (VIII 6.2 a) et 6.5 c)) (Noter que Z″ est représentable par XI 6.8). Pour prouver que Z″ est réduit au sous-groupe unité, il suffit en vertu de Nakayama de prouver qu'il en est ainsi de sa fibre Z''_0. Cela nous ramène donc au cas où S est le spectre d'un corps k, que l'on peut évidemment supposer algébriquement clos. Or Z″ est contenu dans le stabilisateur de tout point de $\mathscr{T}(k)$, i.e. dans la normalisateur N(T) de tout tore maximal T de G. Comme le rang réductif de G est nul, il s'ensuit par XI 5.9 que T est un sous-groupe ouvert de N(T), donc que l'algèbre de Lie de N(T) est identique à celle de T. Donc l'algèbre de Lie de Z″ est contenue dans celle de T. D'autre part, il résulte de 4.10 que l'intersection des algèbres de Lie des tores maximaux T de G n'est autre que l'algèbre de Lie du centre réductif Z, donc ici nulle, puisqu'on a supposé $\mathrm{Z} = 0$. Par suite, l'algèbre de Lie de Z″ est nulle, i.e. Z″ est étale sur k. D'ailleurs Z″ est évidemment invariant dans G, et comme G est connexe il en résulte facilement que Z″ est dans le *centre* de G. Il est donc dans $\mathrm{T} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ pour tout tore maximal T, donc dans l'intersection des tores maximaux, i.e. dans $\mathrm{Z} = 0$ par 4.10, ce qui achève la démonstration. **209**

5. Application au schéma des sous-groupes de type multiplicatif (*)

210

Théorème 5.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S, M *le « préschéma des sous-groupes de type multiplicatif de* G *», représentant le* *foncteur explicité dans* XI 4.1. *Pour tout entier $n > 0$, soit* T_n *le sous-foncteur de* M *tel que* $\mathrm{T}_n(\mathrm{S}') =$ *ensemble des sous-préschémas en groupes de type multiplicatif* H *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que* $n\,\mathrm{id}_{\mathrm{H}} = 0$*, de sorte que* T_n *est représentable, et est affine sur* S (XI, 3.12 a)). *Soit* $u_n : \mathrm{M} \to \mathrm{T}_n$ *le morphisme défini par* $u_n(\mathrm{H}) = {}_n\mathrm{H}$ (*où* ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n\,\mathrm{id}_{\mathrm{H}})$). *Avec ces notations, on a ce qui suit :*

a) *Tout sous-préschéma* U *de* M*, de type fini sur* S*, est contenu dans un sous-préschéma fermé de type fini sur* S*, et tout sous-préschéma fermé* X *de* M*, de type fini sur* S*, est affine sur* S.

b) *Supposons* S *quasi-compact, et soit* X *un sous-préschéma fermé de* M *de type fini sur* S. *Alors il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout multiple m de n, le morphisme induit*

$$u_m|_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_m$$

soit une immersion fermée.

Démonstration. a) Pour prouver la première assertion de a), on prendra pour X l'adhérence schématique de U (EGA I 9.5.1 et 9.5.3), qui est définie puisque l'immersion $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ est quasi-compacte (car U est de type fini sur S et M séparé sur S (4.1)). Il faut donc prouver qu'un tel X est affine sur S, ce qui prouvera en même temps la seconde assertion de a). Sous la forme précédente, on voit que la question est locale sur S, qu'on peut donc supposer affine. Alors, U étant de type fini sur S, est contenu dans un ouvert quasi-compact de M, et cela nous ramène au cas où U est lui-même
211 un ouvert, de type fini sur S i.e. quasi-compact. (N. B. Un sous-schéma fermé d'un schéma affine sur S est affine sur S).

Il suffit de prouver qu'un tel U est majoré par un sous-préschéma fermé de M qui est affine. Sous cette forme, le procédé de réduction habituel nous ramène aussitôt au cas où S est noethérien. On procède de même pour b), qui se ramène au cas où S est affine noethérien.

Reprenons la limite projective T des T_n utilisée dans la démonstration de XI 4.1, qui est un préschéma affine (mais non de type fini) sur S, et dont les anneaux locaux sont des anneaux noethériens, comme il a été vu au début de la démonstration de IX 3.7. (N. B. Pour $t \in \mathrm{T}$, $t = (t_n)$, les morphismes de transition $\mathrm{T}_m \to \mathrm{T}_n$ étant lisses et la dimension des T_m majorée, il existe un n_0 tel que les $\mathrm{T}_n \to \mathrm{T}_{n_0}$ soient étales en t_n pour tout n multiple de n_0). La démonstration de *loc. cit.*, ou XI 3.11, montrent que le morphisme canonique

$$u : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{T}$$

est une *immersion*, et induit des isomorphismes sur les anneaux locaux (mais on fera attention que u n'est pas en général une immersion ouverte ni un morphisme quasi-compact). Soit U un ouvert quasi-compact de M, nous allons prouver que son adhérence dans T est contenue dans M, ce qui prouve (si X désigne l'adhérence schématique de U dans M) que $u|\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$ est une immersion fermée, donc que X est

---

(*)Pour une généralisation des résultats du présent n° au cas où on ne suppose pas G affine sur S, cf. M. Raynaud : Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Chap. IX.

affine, et cela prouvera a). Comme U est noethérien, il n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et tout élément $t \in \mathrm{T}$ dans l'adhérence de U est spécialisation d'un élément x de U. Comme l'anneau local de t dans T est noethérien, il en est de même de l'anneau local A de t dans $\overline{x}$ muni de la structure réduite induite.

Le morphisme canonique du schéma local noethérien intègre $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ dans T envoie alors le point fermé de S' dans t, le point générique dans $x \in \mathrm{M}$, et il faut montrer sous ces conditions que $t \in \mathrm{M}$. Quitte à remplacer A par le quotient d'une A-algèbre locale complète plate sur A convenable (EGA 0_{III} 10.3.1) par un idéal premier minimal, on peut supposer que A est complet à corps résiduel algébriquement clos, (et **212**
on pourrait même se ramener au cas où c'est de plus un anneau de valuation discrète grâce à EGA II 7.1.7). On est ainsi ramené (faisant le changement de notation : S' dénoté par S) au

Lemme 5.2. — *Soient* S *le spectre d'un anneau local noethérien intègre complet à corps résiduel algébriquement clos,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*,* $(\mathrm{H}(n))_{n>0}$ *un système de sous-groupes de type multiplicatif de* G*, indexé par les entiers* $n > 0$*,* η *le point générique de* S*. On suppose :*

a) *Si* m *est un multiple de* n*, on a* $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}(m)$*.*

b) *Il existe un sous-groupe de type multiplicatif* H_η *de* G_η *te que l'on ait* $\mathrm{H}(n)_\eta = {}_n(\mathrm{H}_\eta)$ *pour tout* $n > 0$*.*

Sous ces conditions, il existe un sous-groupe H *de type multiplicatif de* G*, tel que pour tout* $n > 0$*, on ait* $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}$*.*

Pour tout n, soit $\mathrm{C}_n = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}(n))$, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G, lisse sur S (XI 5.3). L'ensemble des entiers $n > 0$ étant ordonné par divisibilité, les C_n forment une famille décroissante de sous-préschémas fermés de G, et comme G est noethérien, cette famille est stationnaire. Soit C la valeur commune des C_n pour n grand. Alors C satisfait les mêmes conditions que G, de plus les $\mathrm{H}(n)$ sont en fait des sous-groupes de C. Donc, quitte à remplacer G par C, on peut supposer que les $\mathrm{H}(n)$ sont des sous-groupes *centraux* de G.

Soit alors s le point fermé de S, et Z_s le centre réductif de G_s (défini grâce à 4.4). En vertu de la définition (4.1) Z_s contient les $\mathrm{H}(n)_s$. Comme A est complet, Z_s provient d'un sous-préschéma en groupes de type multiplicatif Z de G (XI 5.8). Je dis que Z contient les $\mathrm{H}(n)$. En effet, comme $\mathrm{H}(n)$ est central donc commute à Z dans G, on déduit un homomorphisme de groupes $\mathrm{Z} \times \mathrm{H}(n) \to \mathrm{G}$, qui d'après IX 6.8, admet un groupe image qui est un sous-groupe de type multiplicatif K de G contenant Z, et **213**
tout revient à prouver que $\mathrm{K} = \mathrm{Z}$, ce qui résulte de $\mathrm{K}_s = \mathrm{Z}_s$ et de IX 5.1 bis.

On est ainsi ramené à prouver l'analogue de 5.2, mais G étant remplacé par un groupe Z de type multiplicatif et de type fini sur S (pas nécessairement lisse sur S). Comme A est complet à corps résiduel algébriquement clos, Z est diagonalisable (X 3.3 et 1.4) donc de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, M un groupe commutatif de type fini. Par suite tout sous-groupe de type multiplicatif H de Z est diagonalisable (IX 2.11 (i)), donc de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N})$, où N est un groupe quotient de M (VIII 3.2). Ainsi les $\mathrm{H}(n)$ correspondent à des groupes quotients $\mathrm{M}(n)$ de M, et l'existence d'un sous-groupe de type multiplicatif H de Z tel que $\mathrm{H}(n) = {}_n\mathrm{H}$ pour tout n revient à celle d'un groupe quotient N de M tel que $\mathrm{M}(n) = \mathrm{N}/n\mathrm{N}$ pour tout n. Or ceci provient aussitôt du fait qu'il existe un sous-groupe H_η de G_η tel que $\mathrm{H}(n)_\eta = {}_n(\mathrm{H}_\eta)$ pour tout n. Cela achève la démonstration de 5.2 donc de a).

b) Nous savons déjà que $u|_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$ est une immersion fermée. Il en résulte facilement que pour m grand, le composé $u_m|_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{T}_m$ est également une immersion fermée. Comme nous n'aurons pas besoin de ce fait par la suite, nous nous dispensons d'en détailler ici la démonstration.

Corollaire 5.3. — *Avec les notations de* 5.1*, soit* U *une partie à la fois ouverte et fermée de* M*, de type fini sur* S*. Alors* U *est affine sur* S *pour la structure induite par* M*, et si* S *est quasi-compact, il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout multiple m de n, le morphisme induit $u_m|_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{T}_m$ soit une immersion ouverte et fermée,* (*i.e. un isomorphisme sur une partie ouverte et fermée de* T_m*, munie de la structure induite*).

La première assertion résulte de 5.1 a), la seconde de 5.1 b), compte tenu que $u_m : \mathrm{M} \to \mathrm{T}_m$ est lisse (XI 2.2 bis) et qu'une immersion lisse i.e. étale est une immersion ouverte.

214 ***Corollaire 5.4***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et affine sur* S*, de rang réductif localement constant* (1.7 b))*, $\mathscr{T}$ le « préschéma des tores maximaux de* G *»* (1.10)*. Alors $\mathscr{T}$ est lisse et affine sur* S*. Si* T *est un tore maximal de* G*,* N(T) *son normalisateur, alors* G/N(T) (XI 5.3 bis) *est affine sur* S*. Il en est de même de* G/C(T) (*où* C(T) *est le centralisateur de* T) *pourvu que* W(T) = N(T)/C(T) *soit fini sur* S (cf. 2.1 b)).

La deuxième assertion est contenue dans la première, puisque par le théorème de conjugaison, G/N(T) est isomorphe à $\mathscr{T}$ (XI 5.5 bis). Pour la première assertion, on note que par construction, $\mathscr{T}$ est isomorphe à un sous-préschéma ouvert et fermé de M (car on peut supposer le rang réductif de G constant et égal à r, et alors $\mathscr{T}$ est le sous-préschéma de M qui correspond aux sous-tores de dimension relative r, i.e. le plus grand sous-préschéma de M sur lequel le « sous-groupe de type multiplicatif universel » $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}_\mathrm{M}$ soit un tore de dimension relative r). On peut donc appliquer 5.3. Enfin, pour la dernière assertion, on note que G/C(T) est fini sur $\mathrm{G}/\mathrm{N}(\mathrm{T}) \simeq (\mathrm{G}/\mathrm{C}(\mathrm{T}))/\mathrm{W}(\mathrm{T})$, donc est affine puisque G/N(T) l'est.

Corollaire 5.5. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et affine sur un corps k. Alors le schéma* M *des sous-groupes de type multiplicatif de* G *est une somme directe de schémas affines sur* S*. Pour tout sous-groupe de type multiplicatif* H *de* G*, si* C *et* N *désignent respectivement son centralisateur et son normalisateur, les quotients* G/C *et* G/N *sont affines.*

Utilisant XI 5.1 bis, on voit que le saturé par G opérant sur M de toute partie finie fermée de M est ouverte : en effet, on est ramené au cas où k est algébriquement clos, donc au cas de la trajectoire d'un point x rationnel sur k, mais alors par *loc. cit.* le morphisme $g \mapsto g \cdot x$ de G dans M est lisse donc ouvert, donc son image est ouverte.

Soit U la réunion des classes des points fermés de M pour la relation d'équivalence définie par les opérations de G. Alors U est ouvert et contient tout point fermé de M, 215
donc par le Nullstellensatz est identique à M. Ainsi M est réunion disjointe d'ouverts, qui sont donc nécessairement fermés, donc M est le préschéma somme de préschémas M_i, dont chacun est une trajectoire sous G d'un point fermé, donc est quasi-compact, donc de type fini. En vertu de 5.3 les M_i sont donc affines. Si H est un sous-groupe de type multiplicatif de G, il correspond à un point x de M rationnel sur k, et G/N s'identifie à la trajectoire de x sous G (XI 5.5 bis). Il est donc affine par ce qui précède. Comme C est un sous-groupe ouvert de N (XI 5.9) G/C est donc fini sur G/N (car ce dernier est isomorphe à (G/C)/(N/C)) donc affine puisque G/C l'est. Cette démonstration montre en même temps :

Corollaire 5.6. — *Sous les conditions de* 5.5 *pour* G *et* H*, le sous-schéma* U *de* M *« des sous-groupes de type multiplicatif de* G *qui sont localement conjugués de* H *» est un sous-préschéma ouvert et fermé de* G*.*

De façon imagée, tout sous-groupe de type multiplicatif H′ de G qui est limite de sous-groupes de G conjugués de H, est lui-même conjugué de H.

Remarques 5.7. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma lisse et affine sur S, H un S-préschéma de type multiplicatif et de type fini, posons $M = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(H, G)$, qui en vertu de XI 4.2 est représentable et est lisse sur S et séparé sur S. On peut alors prouver pour M un résultat tout analogue à 5.1, soit en se ramenant à 5.1 par une démonstration analogue à celle de XI 4.2, soit en procédant directement par une démonstration calquée sur celle de 5.1. On en déduit des variantes correspondantes pour 5.3, 5.5, 5.6, que le lecteur formulera.

6. Tores maximaux et sous-groupes de Cartan des groupes algébriques non nécessairement affines (corps de base algébriquement clos)

216

Lemme 6.1. — *Soit* G *un groupe algébrique connexe sur un corps* k*,* Z *un sous-groupe algébrique d'indice fini de son centre, alors* G/Z *est affine.*

On peut supposer que Z est le centre de G, car un schéma fini sur un schéma affine est affine. Considérons les espaces vectoriels

$$P^n = P^n(G) = \mathscr{O}_{G,e}/\mathfrak{m}_{G,e}^{n+1} \quad (n \text{ entier} \geqslant 0),$$

où $\mathfrak{m}_{G,e}$ est l'idéal maximal, alors G opère sur les $P^n(G)$ par la représentation adjointe, et si Z_n est le noyau de l'homomorphisme correspondant

$$\mathrm{ad}_n : G \longrightarrow GL(P^n),$$

on vérifie facilement (utilisant le fait que G est connexe) que Z est l'intersection des Z_n, donc (G étant noethérien), égal à l'un des Z_n. Mais ad_n définit, par passage au quotient, un monomorphisme $G/Z_n \to GL(P^n)$, qui est donc une immersion fermée, donc G/Z_n est affine, et par suite G/Z l'est.

Lemme 6.2. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse sur le corps* k, Z *un sous-groupe algébrique central,* $G' = G/Z$, $u : G \to G'$ *l'homomorphisme canonique,* T *un sous-groupe de type multiplicatif dans* G, $T' = u(T)$ *le groupe image,* C *le centralisateur de* T *dans* G, C′ *celui de* T′ *dans* G′. *Alors on a*

$$C'^0 \subset u(C).$$

On peut supposer k algébriquement clos. Soit

$$C_1 = (u^{-1}(C')^0)_{\text{réd}},$$

217 il suffit de prouver qu'on a $C_1 \subset C$, car $u(C_1)$ est connexe d'indice fini dans C′ donc égal ensemblistement à C'^0, donc égal à C'^0 puisque C′ et par suite C'^0 sont lisses. Considérons le morphisme

$$(g,t) \mapsto gtg^{-1}t^{-1}$$

de $G \times G$ dans G, il induit un morphisme

$$\varphi : C_1 \times T \longrightarrow Z_1, \quad \text{où} \quad Z_1 = Z_{\text{réd}},$$

car le premier membre étant réduit, il suffit de voir que pour $g \in C_1(k)$, $t \in T(k)$, on a $gtg^{-1}t^{-1} \in Z(k)$, ce qui provient du fait que g centralise T modulo Z. On voit facilement (en calculant sur les points rationnels sur k) que $\varphi(g,t)$ est additif en g, et additif en t, donc est « bilinéaire », je dis que (Z_1 étant lisse et C_1 connexe) cet homomorphisme est identiquement nul, ce qui prouvera bien que $C_1 \subset C$. Utilisant le théorème de densité pour T, on est ramené au cas où T est fini i.e. où il existe un entier $n > 0$ tel que $n\,\mathrm{id}_T = 0$. Notons que φ est défini par un homomorphisme de groupes

$$C_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(T, Z_1),$$

or Z_1 étant commutatif et lisse, le deuxième membre est représentable par un groupe algébrique étale sur k, et C_1 étant connexe, tout homomorphisme de groupes de C_1 dans ce dernier est nul. C.Q.F.D.

Corollaire 6.3. — *Sous les conditions précédentes, supposons* C′ *connexe, alors on a*

$$C' = u(C), \qquad C = u^{-1}(C').$$

En effet, alors $C' = C'^0$, d'autre part C contient évidemment Z, donc est égal à $u^{-1}(u(C))$.

218 ***Lemme 6.4***. — *Soient* G *un groupe algébrique sur le corps* k, Z *un sous-groupe algébrique central tel que* $G/Z = G'$ *soit un tore. Alors* G *est commutatif, et si* k *est algébriquement clos, il existe un tore* T *dans* G *tel que* $u(T) = G'$, *où* u *est l'homomorphisme canonique* $G \to G/Z = G'$.

On peut supposer k algébriquement clos. Considérons encore le morphisme $G \times G \to G$ défini par $(g,h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, alors (Z étant central) ce morphisme se factorise en un morphisme $G' \times G' \to G$, et G′ étant commutatif, ce dernier prend ses valeurs dans Z, et même dans $Z_1 = Z_{\text{réd}}$, puisque $G' \times G'$ est réduit. On voit comme dessus que le morphisme $\varphi : G' \times G' \to Z_{\text{réd}}$ ainsi obtenu est bilinéaire, donc nul, ce qui prouve que G est commutatif. Pour trouver un tore T de G tel que $u(T) = G'$, on peut (quitte à remplacer G par $G^0_{\text{réd}}$) supposer G lisse et connexe, et de plus (quitte à remplacer Z par $Z^0_{\text{réd}}$) que Z est lisse et connexe. D'après un théorème bien connu de Chevalley [(6)], Z est une extension d'une variété abélienne par un groupe affine, ce qui nous ramène aussitôt à prouver notre assertion dans chacun des deux cas suivants : 1°) Z est affine, 2°) Z est une variété abélienne. Dans le cas 1°), G est affine et le résultat est bien connu (BIBLE 7 th. 3 a)). Supposons donc que Z soit une variété abélienne. Comme tout homomorphisme du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dans le tore $G' = R$ ou dans la variété abélienne Z est trivial, il s'ensuit qu'il en est de même de tout homomorphisme de $\mathbb{G}_a$ dans G, donc G ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$. Par le théorème de structure de Chevalley déjà invoqué, on a une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

où A est une variété abélienne, et T un groupe affine lisse et connexe. Comme ce dernier est commutatif et ne contient pas de sous-groupe additif, il s'ensuit que T est un tore (et c'est évidemment l'unique tore maximal de G). Tout revient à prouver que tout épimorphisme

$$u : G \longrightarrow R,$$

où R est un tore, satisfait à $u(T) = R$. Posons

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T, \mathbb{G}_m) = M, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(R, \mathbb{G}_m) = P,$$

(ce sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini qui redonnent T, R à isomorphisme près 219
par $T = D_k(M)$, $R = D_k(P)$), et soit

$$B = \mathrm{Ext}^1_{k\text{-gr}}(A, \mathbb{G}_m),$$

(B est aussi l'ensemble des points rationnels sur k de la variété abélienne duale de A). On a évidemment

$$(\mathrm{xx}) \qquad \mathrm{Ext}^1(A, T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, B), \qquad \mathrm{Ext}^1(A, R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(P, B),$$

en particulier l'extension G de A par T est donnée par un homomorphisme

$$\theta : M \longrightarrow B.$$

D'autre part la suite exacte $(*)$ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, R),$$

de plus $\mathrm{Hom}(A, R) = 0$, et $\mathrm{Hom}(T, R) \to \mathrm{Ext}^1(A, R)$ s'identifie à l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, B)$$

déduit de $\theta : M \to B$. Posant

$$N = \mathrm{Ker}(\theta),$$

on trouve donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(G, R) \simeq \mathrm{Hom}(P, N) \simeq \mathrm{Hom}(S, R), \quad \text{où} \quad S = D_k(N),$$

qu'on peut décrire géométriquement de façon immédiate ainsi :

Lemme 6.5. — *Soit* G *une extension d'une variété abélienne* A *par un tore* $\mathrm{T} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, *définie par un homomorphisme* $\theta : \mathrm{M} \to \mathrm{B} = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{A}, \mathbb{G}_m)$ (*corps de base* k *algébriquement clos*). *Soit* $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}\,\theta$, $\mathrm{S} = \mathrm{D}_k(\mathrm{N})$ *le tore correspondant, isomorphe à* T/U *où* $\mathrm{U} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M}/\mathrm{N})$, *considérons l'extension* H = G/U *de* A *par* S. *Cette extension* splitte[(7)], *donc on a une unique projection de* H *sur* S, *d'où un unique homomorphisme* 220

$$v : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{S}$$

prolongeant l'homomorphisme canonique $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. *Ceci posé, pour tout tore* R, *et tout homomorphisme* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{R}$, *il existe un unique homomorphisme* $u' : \mathrm{S} \to \mathrm{R}$ *tel que* $u = u'v$. *En particulier, on a* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u') = u(\mathrm{T})$.

Cela montre en particulier que si u est un épimorphisme, il en est de même de sa restriction à T, ce qui achève de prouver 6.4.

Théorème 6.6. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos* k.

a) *Les tores maximaux de* G *sont conjugués.*

b) *Soit* T *un tore de* G, *alors son centralisateur est lisse et connexe.*

c) *L'application* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux* T *de* G, *et l'ensemble des sous-groupes de Cartan* (N°1) *de* G. *Pour qu'un sous-groupe algébrique* C *de* G *soit un sous-groupe de Cartan, il faut et il suffit qu'il soit lisse, nilpotent et ensemblistement égal à son normalisateur connexe,* (*et alors il est même égal à son normalisateur connexe*) *; on a alors* $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, *où* T *est l'unique tore maximal de* C, *et* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.

d) *Soit* $v : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un épimorphisme de groupes algébriques lisses et connexes, alors les tores maximaux* (*resp. les sous-groupes de Cartan*) *de* H *sont les images des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* G. *Si* T *est un tore maximal de* G, C *son centralisateur, alors* $v(\mathrm{C})$ *est le centralisateur de* $v(\mathrm{T})$.

221 e) *Sous les conditions de* d), *supposons que* $\mathrm{Ker}\,v$ *soit un sous-groupe central de* G, *alors* $\mathrm{T} \mapsto v(\mathrm{T})$ (*resp.* $\mathrm{C} \mapsto v(\mathrm{C})$) *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* G, *et l'ensemble des tores maximaux* (*resp. des sous-groupes de Cartan*) *de* H. *Les sous-groupes de Cartan de* G *contiennent le centre de* G *et a fortiori* $\mathrm{Ker}\,v$, *et sont les groupes de la forme* $v^{-1}(\mathrm{C}')$, *où* C′ *est un sous-groupe de Cartan de* H.

Explicitons aussi tout de suite la conséquence immédiate suivante de c) :

Corollaire 6.7. — *Pour que* G *soit nilpotent* (*i.e. le groupe* $\mathrm{G}(k)$ *nilpotent*) *il faut et il suffit que les tores dans* G *soient centraux, ou encore que* G *n'ait qu'un seul tore maximal,* (*et alors ce dernier est le plus grand sous-tore de* G).

Démonstration de 6.6. Soit Z un sous-groupe algébrique central de G, soit $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ l'homomorphisme canonique. Alors G′ est un groupe lisse et connexe. Si T′ est un sous-tore de G′, il résulte de 6.4 que $u^{-1}(\mathrm{T}')$ est commutatif,

(6) N.D.E. : donner des références ici.

(7) N.D.E. : est scindée !

et que T' est l'image d'un sous-tore de $u^{-1}(\mathrm{T}')$ donc d'un sous-tore de G. Comme $u^{-1}(\mathrm{T}')$ est commutatif, il admet évidemment un plus grand sous-tore T (car la somme de deux sous-tores en donne un troisième qui les contient tous deux), et on a donc $u(\mathrm{T}) = \mathrm{T}'$. De ceci résulte immédiatement que pour tout tore maximal T de G, son image $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$ est un tore maximal de G', et que $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ est une correspondance biunivoque entre tores maximaux de G et tores maximaux de G'.

Nous faisons maintenant

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Centr}(\mathrm{G})^0_{\text{réd}},$$

alors G' est *affine* en vertu de 6.1. Comme les tores maximaux de G' sont alors conjugués, il en est donc de même de ceux de G, ce qui prouve a). D'ailleurs, pour **222**
que G soit nilpotent, resp. n'ait qu'un seul tore maximal, il faut et il suffit que G' satisfasse la même condition, or G' étant affine, les deux conditions en question sur G' sont équivalentes (BIBLE 6 th. 4 cor. 2), donc il en est de même pour les conditions en question pour G. D'ailleurs, si G n'a qu'un seul tore maximal T, ce dernier est invariant donc central, et comme tout tore dans G est contenu dans un tore maximal, il est central. Réciproquement, si tout tore est central, il en est de même des tores maximaux, et par le théorème de conjugaison a) il n'y a qu'un seul tore maximal. Cela prouve 6.7.

Soit T un tore quelconque de G, $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$, alors $\mathrm{C}' = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$ est connexe (BIBLE 6 th. 6 a)), donc en vertu de 6.3 le centralisateur C de T est égal à $u^{-1}(\mathrm{C})$, donc connexe (puisque Z est connexe), ce qui prouve b). Si T est maximal, donc T' maximal, alors on sait que C' est nilpotent, donc C (qui est une extension centrale de C') est nilpotent. De plus, T est un tore maximal de C, donc en vertu de 6.7 c'est l'unique tore maximal de C, par suite l'application $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ de l'ensemble des tores maximaux de G dans l'ensemble de sous-groupes de Cartan est *bijective.* D'ailleurs on a

$$\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{C} \subset \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) \subset \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

et comme on sait que le centralisateur de T est d'indice fini dans son normalisateur (cf. XI 5.9 dont le raisonnement est valable sans hypothèse affine, en utilisant seulement la représentabilité des deux foncteurs en question, comme il a été signalé dans XI 6.5), et que C est lisse et connexe, on en conclut

$$\mathrm{C} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})^0.$$

De plus, d'après la correspondance biunivoque entre les tores maximaux et les sous-groupes de Cartan, on voit que $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})$ et $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ ont mêmes points à valeurs dans k, et comme le deuxième est lisse, on a

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}).$$

Pour achever d'établir c), il reste à prouver que si C est un sous-groupe lisse nilpotent **223**
connexe de G qui est d'indice fini dans son normalisateur, alors C est un sous-groupe de Cartan. Or comme Z est central, le normalisateur de C contient Z, et comme Z est lisse et connexe, on en conclut $\mathrm{Z} \subset \mathrm{C}$, d'où $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$, où $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$. On a alors

$$\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}) = u^{-1}(\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{C}')),$$

ce qui prouve que C′ est nilpotent connexe d'indice fini dans son normalisateur, donc en vertu de BIBLE 7 th. 1 c'est un sous-groupe de Cartan de G′, d'où aussitôt que C est un sous-groupe de Cartan de G.

Prouvons e) : on est sous les conditions du début de la démonstration, (en posant $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Z}$, $\mathrm{G}' = \mathrm{H}$), on a déjà vu que $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ est une correspondance biunivoque entre tores maximaux de G et tores maximaux de G′. Compte tenu de la correspondance biunivoque entre tores maximaux et sous-groupes de Cartan qu'on vient de prouver, on en déduit une correspondance biunivoque entre sous-groupes de Cartan C de G et sous-groupes de Cartan C′ de G′, en faisant correspondre à $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ le groupe $\mathrm{C}' = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$, où $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$. Comme C′ est connexe en vertu de b), il s'ensuit par 6.3 que $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$, et $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$, ce qui prouve e).

Reste à prouver d). Soit T un tore maximal de G, prouvons que $v(\mathrm{T})$ est un tore maximal de H (ce qui, compte tenu du théorème de conjugaison a), impliquera que les tores maximaux de H sont tous de la forme $v(\mathrm{T})$ comme ci-dessus). Soit donc R un tore dans H contenant $v(\mathrm{T})$, et prouvons $\mathrm{R} = v(\mathrm{T})$. Quitte à remplacer H par R, G par $v^{-1}(\mathrm{R})^0_{\text{réd}}$, on peut supposer $\mathrm{R} = \mathrm{H}$, i.e. que H est un tore, et on est ramené à prouver que alors $v(\mathrm{T}) = \mathrm{H}$. Soit encore $\mathrm{Z} = \mathrm{Centr}(\mathrm{G})^0_{\text{réd}}$, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, et $\mathrm{H}' = \mathrm{H}/v(\mathrm{Z})$:

$$\text{(D)} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[r] & \mathrm{Z} \arrow[r] \arrow[d, "v''"'] & \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{G}' \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & e \\ e \arrow[r] & v(\mathrm{Z}) \arrow[r] & \mathrm{H} \arrow[r, "u'"'] & \mathrm{H}' \arrow[r] & e. \end{tikzcd}$$

224 Nous savons déjà que $u(\mathrm{T})$ est un tore maximal de G′, et comme G′ est affine donc $v' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ un épimorphisme de groupes affines lisses et connexes, $v'(u(\mathrm{T}))$ est un tore maximal de H′ (BIBLE 7 th. 3 a)) donc égal à H′, i.e. $u'(v(\mathrm{T})) = \mathrm{H}'$, donc pour prouver $v(\mathrm{T}) = \mathrm{H}$ il suffit de montrer que $v(\mathrm{T}) \supset v(\mathrm{Z})$. Or $v(\mathrm{Z})$ est un sous-groupe lisse connexe de H, donc un tore, et $v'' : \mathrm{Z} \to v(\mathrm{Z})$ est un épimorphisme, donc en vertu de 6.4 on a $v(\mathrm{Z}) = v''(\mathrm{S})$, où S est un tore de Z. Or S, étant central dans G, est évidemment contenu dans le tore maximal T, d'où $v(\mathrm{Z}) \subset v(\mathrm{T})$. Cela prouve l'assertion d) dans le cas des tores maximaux.

Compte tenu de la correspondance biunivoque entre tores maximaux et sous-groupes de Cartan, il reste à prouver que si T est un tore maximal de G, C son centralisateur, alors $v(\mathrm{C})$ est le centralisateur de $v(\mathrm{T})$. Pour cela, reprenons le diagramme (D) ci-dessus (où bien entendu H n'est plus supposé un tore), soient $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$, $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$, nous avons déjà vu dans e) que C′ est le centralisateur du tore maximal T′, donc (G′ étant affine, donc H′ étant affine) $v'(\mathrm{C}')$ est le centralisateur du tore maximal $v'(\mathrm{T}')$ de H′ (BIBLE 7 th. 3 a), i.e. $u'(v(\mathrm{C}))$ est le centralisateur de $u'(v(\mathrm{T}))$; comme C contient Z donc $v(\mathrm{C})$ contient $v(\mathrm{Z})$, $v(\mathrm{C})$ est donc l'image inverse par u' de $u'(v(\mathrm{C}))$ i.e. du centralisateur de $u'(v(\mathrm{T}))$, c'est donc le centralisateur de $v(\mathrm{T})$ comme il résulte de e) appliqué à $u' : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ et au tore maximal $v(\mathrm{T})$ de H. Cela achève la démonstration de 6.6.

7. Application aux préschémas en groupes lisses non nécessairement affines

Théorème 7.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse, séparé et de type fini sur* S. *On suppose que* G *admet localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un tore maximal. Alors :*

a) *L'application*

$$\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

induit une bijection de l'ensemble des tores maximaux de G *avec l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G. *Si* C *correspond à* T, *alors* T *est l'unique tore maximal de* C. **225**

b) *Soient* T, T′ *deux tores maximaux de* G, C, C′ *les sous-groupes de Cartan correspondants, alors on a*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{T}') = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{C}') = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{C}'),$$

les deux premiers termes sont aussi identiques aux transporteurs stricts, *enfin le foncteur en question est représentable par un sous-préschéma fermé de* G *lisse sur* S. *Les tores* T, T′ *et les sous-groupes de Cartan* C, C′ *sont conjugués localement pour la topologie étale.*

c) *Il existe localement pour la topologie étale un tore maximal de* G *et un sous-groupe de Cartan de* G.

d) *Supposons que toute partie finie d'une fibre* G_s *de* G *soit contenue dans un ouvert affine de* G (*par exemple* G *quasi-projectif sur* S, *ou* S *artinien*), *alors le foncteur* $\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *défini dans* 1.10 (*foncteur des tores maximaux de* G), *isomorphe au foncteur* $\mathscr{T} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *des sous-groupes de Cartan de* G, *est représentable par un préschéma lisse, séparé de type fini sur* S, *qui est quasi-projectif sur* S *lorsque* G *l'est, et est affine sur* S *lorsque* G *est affine sur* S, *ou lorsque* S *est artinien.*

e) *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* S*-préschémas en groupes, où* G′ *est lisse, séparé de type fini sur* S, *et supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on ait* $u_s(\mathrm{G}_s) = \mathrm{G}'_s$ *i.e.* u_s *est fidèlement plat* (Exp. VI [(8)]). *Alors pour tout tore maximal* T *de* G, $u(\mathrm{T})$ *est un tore maximal de* G′ *; si* G′ *est à fibres connexes, alors pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* G, $u(\mathrm{C})$ *est un sous-groupe de Cartan de* G′, *et si* C *est le centralisateur de* T, $u(\mathrm{C})$ *est le centralisateur de* $u(\mathrm{T})$. *Dans l'un et l'autre cas, le morphisme induit* $\mathrm{T} \to u(\mathrm{T})$, *resp.* $\mathrm{C} \to u(\mathrm{C})$, *est fidèlement plat.*

f) *Sous les conditions de* e), *supposons de plus que* $\mathrm{Ker}\, u$ *soit un sous-groupe central de* G. *Alors* $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ *est une applications bijective de l'ensemble des tores maximaux de* G *sur l'ensemble des tores maximaux de* G′, *et si* G′ *est à fibres connexes,* $\mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C})$ *est de même une application bijective de l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G *sur l'ensemble des sous-groupes de Cartan de* G′ *; si* $\mathrm{C}' = u(\mathrm{C})$, *on a* $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$. **226**

[(8)] N.D.E. : référence non localisée dans $\mathrm{VI_B}$, voir M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, I, Masson (1970), proposition II.5.1.(c).

Remarques 7.2. — Nous verrons dans XV que la conclusion de d) reste valable sans la condition restrictive sur les parties finies des G_s. Nous y prouverons également les conclusions concernant les seuls sous-groupes de Cartan contenues dans b) c) d) e), lorsqu'on suppose seulement que G admet localement pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte un sous-groupe de Cartan (mais par nécessairement un tore maximal). Pour ceci, nous aurons d'ailleurs à utiliser 7.1 dans le cas ou S est artinien. D'ailleurs, la démonstration de c) et d) (dans le cas S non artinien), se simplifie considérablement en utilisant la méthode de XV.

Démonstration de 7.1. a) Procédant comme dans 3.2, on voit que pour tout tore maximal T de G, $C = \mathrm{Centr}_G(T)$ est bien un sous-groupe de Cartan de G, et T est déterminé en termes de C comme l'unique tore maximal de C, de sorte qu'il reste à montrer seulement que tout sous-groupe de Cartan C de G est défini par un tore maximal de G, ou encore que C admet un tore maximal central. La question étant encore locale pour la topologie fpqc on peut supposer que G admet un tore maximal T. Alors en vertu de XI 6.2, $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T, C)$ est représentable par un sous-préschéma fermé S' de G lisse sur S, d'ailleurs $S' \to S$ est surjectif, comme il résulte de 6.6 c). Donc quitte à faire le changement de base $S' \to S$, on peut supposer qu'il existe une section g de G telle que $\mathrm{ad}(g) \cdot T \subset C$, mais alors $\mathrm{ad}(g) \cdot T$ est un tore maximal de C, qui est central fibre par fibre en vertu de 6.6 c), donc central en vertu de IX 5.6 b). C.Q.F.D.

227 b) Soient T, T', deux tores maximaux de G, et C, C' les sous-groupes de Cartan correspondants de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ T \subset T' \qquad (2)\ T = T' \qquad (3)\ T \subset C' \qquad (4)\ C \subset C' \qquad (5)\ C = C'.$$

Cela résulte trivialement de a). Utilisant le même résultat après changement de base quelconque, on en conclut l'identité énoncée dans b), entre divers transporteurs et transporteurs stricts. D'ailleurs, on a déjà remarqué dans a) que $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T, C')$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G, lisse sur S, et que son morphisme structural est surjectif. Par suite, par Hensel il existe localement pour la topologie étale une section de ce préschéma sur S, donc T et T' d'une part, C et C' d'autre part, sont conjugués localement pour la topologie étale, ce qui prouve b).

c) Supposons d'abord que S soit artinien, local. Lorsque G admet un tore maximal T, alors il résulte du théorème de conjugaison prouvé dans b) que le foncteur $\mathscr{T}$ des tores maximaux de G est représentable par l'espace homogène G/N, où N est le normalisateur de T dans G, qui est lisse en vertu de b). D'ailleurs, comme on a observé dans VI_A.3.2.1, comme $\mathscr{T}$ est un espace homogène sous G, toute partie finie de $\mathscr{T}$ est contenue dans un ouvert affine. Dans le cas général, il existe une extension finie k' du corps résiduel k de S telle que $G_{k'}$ ait un tore maximal, alors k' provient de k par changement de base fini plat $S' \to S$, et le tore maximal de $G_{k'}$ se remonte en un tore maximal $G_{S'}$ (XI 2.1 bis), donc le foncteur $\mathscr{T}_{S'}$ est représentable par un préschéma sur S', lisse séparé et de type fini sur S', dont toute partie finie est contenue dans un ouvert affine. Donc la donnée de descente naturelle sur $\mathscr{T}_{S'}$ est effective, donc $\mathscr{T}$ est représentable, et par descente on voit que $\mathscr{T}$ est lisse sur S, séparé et de type fini sur S. De la lissité résulte, grâce à Hensel, que $\mathscr{T}$ admet une section localement pour la topologie étale. Cela prouve c) et d) dans le cas S artinien (N. B. nous prouverons plus bas que dans ce cas, $\mathscr{T}$ est en fait affine sur S).

Supposons maintenant S quelconque. Pour prouver c) et d), qui sont des assertions locales sur S pour la topologie de Zariski, on peut supposer qu'il existe un nombre **228**
premier ℓ premier aux caractéristiques résiduelles de S, que S est affine, et que le rang réductif des fibres de G (qui est évidemment localement constant, grâce à l'hypothèse de l'existence locale pour fpqc d'un tore maximal) est constant, soit r. Soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, S' affine, tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ admette un tore maximal T'. Soit C' son centralisateur, je dis qu'il existe une puissance convenable n de ℓ telle qu'on ait aussi $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}({}_n\mathrm{T})$. En effet, pour le voir, on est ramené aussitôt au cas S' noethérien, où cela a été vu dans XI 6.2. Fixons n ainsi, posons

$$\mathrm{M} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r, \qquad \mathrm{P} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}),$$

alors P est évidemment représentable comme un sous-préschéma fermé de présentation finie de $({}_n\mathrm{G})^r$, où

$${}_n\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}),$$

qui est aussi le noyau du morphisme de puissance n-ème dans G, donc représentable par un sous-préschéma fermé de présentation finie de G. D'ailleurs P est *lisse* sur S en vertu de XI 2.1. Soit $s \in \mathrm{S}$, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, il existe une extension finie séparable k'' de $\kappa(s)$ telle qu'il existe un tore maximal T'' dans $\mathrm{G}_{k''}$; de plus, comme ${}_n\mathrm{T}''$ est étale sur k'' (n étant premier à la caractéristique de k'') on peut supposer (quitte à remplacer k'' par une extension finie séparable) que ${}_n\mathrm{T}''$ est isomorphe à $\mathrm{M}_{k''}$. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ un morphisme étale, tel qu'il existe un $s'' \in \mathrm{S}''$ au-dessus de $s \in \mathrm{S}$, donnant lieu à l'extension résiduelle $\kappa(s'') \simeq k''$. On a donc une section de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}''} \otimes \kappa(s'')$ sur $\mathrm{Spec}(\kappa(s''))$, donc par Hensel, quitte à remplacer (S'', s'') par (S''', s''') étale sur lui, on peut supposer qu'il existe une section de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}''}$ sur S'', i.e. un élément de $\mathrm{P}(\mathrm{S}'')$, qui étend la section donnée. En d'autres termes, on a un homomorphisme $\mathrm{M}_{\mathrm{S}''} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$ qui induit un isomorphisme $\mathrm{M}_{\kappa(s'')} \simeq {}_n\mathrm{T}''$. En vertu de IX 6.4 (qui ici se réduit à une simple application du lemme de Nakayama) cet homomorphisme est une immersion fermée au-dessus d'un voisinage ouvert de s', **229**
qu'on peut supposer égal à S''. Soit H'' son image, et considérons son centralisateur C'' dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$, qui est un sous-préschéma fermé lisse de G, en vertu de XI 6.2. Notons d'ailleurs :

Lemme 7.3. — *Sous les conditions précédentes pour ℓ, n, r, pour tout préschéma* S'' *sur* S *et tout tore maximal* T'' *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$*, on a*

$$\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}}(\mathrm{T}'') = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}}({}_n\mathrm{T}'').$$

En effet, par descente fidèlement plate à partir de $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$, on est ramené au cas où $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''}$ admet un tore maximal T''_1 pour lequel la relation précédente est vraie. Mais comme T'' est localement conjugué à T''_1 pour la topologie étale en vertu de b), il s'ensuit que la même relation est vraie pour T''.

Appliquons le résultat précédent pour $\mathrm{Spec}(\kappa(s''))$ au lieu de S'', on voit que la fibre $\mathrm{C}''_{s''}$ est un sous-groupe de Cartan de G. Notons maintenant que G étant lisse sur S, la réunion des composantes neutres des fibres G_s est un ouvert de G (en vertu d'un résultat général de EGA IV sur les morphismes lisses [9]), évidemment stable par la loi de groupe de G, c'est donc un sous-groupe de G pour la structure de préschéma induite par G. De plus, G^0 satisfait aux hypothèses préliminaires de G, et il y a une correspondance biunivoque évidente entre les tores maximaux de G, et ceux de G^0. Donc pour prouver c) et d), on peut supposer G à fibres connexes, ce que nous ferons. Alors les sous-groupes de Cartan de G sont à fibres connexes (6.6 a)). Ceci posé, je dis que C''^0 est un sous-groupe de Cartan de $G_{S''}$ au-dessus d'un voisinage ouvert de s'' dans S'' (ce qui achèvera de prouver c)). Ceci résulte en effet du

Lemme 7.4. — *Sous les conditions de* 7.1, *supposons* G *à fibres connexes, soit* C *un*
230 *sous-préschéma en groupes fermé de* G, *lisse sur* S, *et s un élément de* S *tel que* C_s *soit un sous-groupe de Cartan de* G_s, *alors* C^0 *est un sous-groupe de Cartan de* G *au-dessus d'un voisinage ouvert de s.*

On se ramène facilement au cas où S est local et s son point fermé, et à prouver qu'alors C est un sous-groupe de Cartan de G, puis par descente plate au cas où G admet un tore maximal, soit T. Alors en vertu de XI 6.2, $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T, C)$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G lisse sur S. De plus, en vertu de l'hypothèse sur C_s, la fibre du transporteur en s est non vide (compte tenu du théorème de conjugaison 6.6 a)). Cela nous ramène par descente fidèlement plate au cas où ce transporteur admet une section sur S, donc au cas où C contient un tore maximal T de G. Mais alors T est central dans C^0 en vertu de IX 5.6 a), donc $C^0 \subset \mathrm{Centr}_G(T)$, et comme il s'agit d'une inclusion de schémas en groupes lisses sur S, ayant même dimension relative (savoir la dimension de leur fibre commune en s) et à fibres connexes, c'est une égalité, ce qui achève la démonstration.

d) Nous gardons les notations et hypothèses précédentes pour ℓ, n, r, et la connexité des fibres de G. Soit Q : $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/S} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini par

$Q(S') =$ ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de $G_{S'}$ de type égal à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r = M$ (IX 1.4).

Alors

$$T \longmapsto {}_nT$$

est un morphisme

$$\varphi : \mathscr{T} \longrightarrow Q,$$

qui est un monomorphisme en vertu de 7.3. Je dis que Q *est représentable* par un préschéma séparé de présentation finie sur S. En effet, comme nous avons signalé dans la démonstration de XI 3.12 a), on a un isomorphisme

$$Q \simeq P'/\Gamma$$

231 où P' est le sous-préschéma ouvert et fermé du préschéma $P = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(M_S, G)$ introduit dans c) qui correspond aux *monomorphismes* $M_{S'} \to G_{S'}$ (cf. IX 6.8), et où $\Gamma = (\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(M))_S$. L'hypothèse que toute partie finie d'une fibre G_s est contenue dans un ouvert affine de G, étant stable par passage à un sous-préschéma fermé et par produits cartésiens, est évidemment héritée par $({}_nG)^r$ donc par P, donc par P', de

[9]N.D.E. : préciser cette référence.

sorte que Q est représentable par un préschéma de présentation finie sur S (cf. V)[10]. On voit de la même façon que si G est quasi-projectif (resp. affine) sur S, il en est de même de Q. En tous cas, Q est séparé sur S. Or on a le

Lemme 7.5. — *L'homomorphisme* $\varphi = \mathscr{T} \to \mathrm{Q}$ *précédent est représentable par une immersion ouverte.*

En d'autres termes, il faut prouver que si H est un sous-groupe de type multiplicatif de G, de type M, alors il existe une partie ouverte U de S telle que pour tout S′ sur S, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est de la forme ${}_n\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, pour un tore maximal convenable $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, si et seulement si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ se factorise par U. On peut supposer évidemment que le rang nilpotent des fibres de G est constant (car grâce à b), il est localement constant), soit r'. Soit $\mathrm{C} = \mathrm{Centr}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S (XI 6.2). Alors quitte à remplacer S par la partie ouverte et fermée des points en lesquels C est de dimension relative r', on peut supposer C de dimension relative r' partout. On voit alors aussitôt que H est de la forme ${}_n\mathrm{T}$, pour un tore maximal T de G, si et seulement si C^0 admet un tore maximal central T de dimension relative r partout et que $\mathrm{H} = {}_n\mathrm{T}$, ce qui donne une autre expression du sous-foncteur U de S que nous voulons représenter (en remplacant dans le critère précédent S par un S′ sur S). D'ailleurs par descente plate, on peut supposer que G admet un tore maximal T_1. Soit R le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1, \mathrm{Centr}_{\mathrm{C}^0}(\mathrm{C}^0))$ de $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1, \mathrm{C})$; ce dernier est représentable par un préschéma lisse sur S en vertu de XI 6.2, et le premier est représentable par un sous-préschéma ouvert induit, comme il résulte aussitôt de IX 5.6 a), en particulier il est lisse sur S. Par suite son morphisme structural dans S est **232** ouvert, donc son image est ouverte, et quitte à remplacer S par ladite image (munie de la structure induite) on peut supposer le morphisme structural surjectif. Alors en vertu de 1.13 appliqué à C^0, C^0 admet un tore maximal central T puisqu'il en admet un localement pour fpqc, qui sera évidemment de dimension relative égale à celle de T_1, i.e. r. Ainsi, la condition à exprimer pour H est l'égalité $\mathrm{H} = {}_n\mathrm{T}$, ce qui en vertu de IX 2.10 revient encore à prendre une partie ouverte (et fermée) convenable de S.

Le lemme 7.5 implique donc que $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma séparé localement de présentation finie sur S, et même de présentation finie sur S, comme on voit en reprenant la démonstration de 7.5 pour s'assurer que φ est en fait une immersion ouverte quasi-compacte, ou en se ramenant par descente fidèlement plate quasi-compacte au cas où G admet un tore maximal, et où $\mathscr{T}$ est donc isomorphe à $\mathrm{G}/\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. Cette dernière expression, ou au choix XI 2.1, montrent de plus que $\mathscr{T}$ est lisse sur S. Enfin, si G est quasi-projectif sur S, il en est de même de Q donc aussi de $\mathscr{T}$. Si G est affine sur S, l'assertion que $\mathscr{T}$ est alors affine sur S est mise pour mémoire, étant établie dans 5.4 (N. B. J'ignore si sans hypothèse affine pour G/S, il est possible de choisir n de façon que dans 7.5 l'immersion ouverte soit aussi une immersion fermée). Pour l'assertion que $\mathscr{T}$ est affine sur S si S est artinien, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps (EGA I 6.1.7), qu'on peut supposer algébriquement clos. Alors grâce à f) qui sera prouvé plus bas, il suffit de prouver la

[10]N.D.E. : préciser cette référence

même assertion pour $G/\operatorname{Centr}(G)$, or ce dernier est affine par 6.1, de sorte qu'on est sous les conditions précédentes. Cela achève la démonstration de d).

e) En vertu de IX 6.8, on sait qu'il existe un sous-tore T' de G' tel que u induise un morphisme fidèlement plat $T \to T'$ (ce qui caractérise T' comme le sous-faisceau $u(T)$ de G'). Soient C le centralisateur de T, C' celui de T', prouvons que le morphisme
233 $C \to C'$ est *plat*, et fidèlement plat si G' est à fibres connexes. Comme C, C' sont plats de présentation finie sur S, on est ramené au cas d'un corps de base (SGA1 I 5.9), qu'on peut supposer évidemment algébriquement clos. De plus on peut supposer G, G' connexes (quitte à les remplacer par G^0 et G'^0, ce qui ne change pas C^0 et C'^0), et il suffit alors d'appliquer 6.6 d), compte tenu de a).

f) Compte tenu de a) et e), on peut se borner à prouver l'assertion concernant les sous-groupes de Cartan. Or comme un sous-groupe de Cartan de G est le centralisateur d'un tore maximal, il contient le centre de G et a fortiori $\operatorname{Ker} u$, donc il est de la forme $u^{-1}(C')$, où $C' = u(C)$ est le sous-groupe de Cartan de G' envisagé dans e). Donc l'application $C \mapsto u(C)$ est injective, pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de voir que pour tout sous-groupe de Cartan C' de G', $u^{-1}(C')$ est un sous-groupe de Cartan de G. La question étant locale pour fpqc, on peut supposer que G admet un sous-groupe de Cartan C_1, donc $u(C_1) = C'_1$ est un sous-groupe de Cartan de G', donc localement conjugué à C' pour fpqc en vertu de b), et comme $u^{-1}(C'_1) = C_1$ est un sous-groupe de Cartan de G, il s'ensuit que $u^{-1}(C')$ est un sous-groupe de Cartan de G. C.Q.F.D.

On peut aussi, pour prouver que $u^{-1}(C')$ est un sous-groupe de Cartan, noter qu'il est plat sur S car u l'est (SGA1 I 5.9), ce qui nous ramène par définition au cas d'un corps de base, et on peut appliquer 6.6 e).

Corollaire 7.6. — *Sous les conditions de* 7.1 e)*,* G' *admet localement pour la topologie étale un tore maximal, donc satisfait aux conditions préliminaires pour* G*. Si de plus* $\operatorname{Ker} u$ *est central, alors les foncteurs* $\mathscr{T}_G$*,* $\mathscr{C}_G$ *des tores maximaux de* G *et des sous-groupes de Cartan de* G *sont isomorphes aux foncteurs analogues* $\mathscr{T}_{G'}$*,* $\mathscr{C}_{G'}$ *pour* G' (*donc, dans le cas où ils sont représentables, ils sont représentés par des* S*-préschémas isomorphes*)*.*

Remarque 7.7. — a) Contrairement à ce qui a lieu dans le cas où G est affine sur S (il suffit, en fait, que G soit à fibres affines, comme on verra dans XVI), il n'est pas vrai
234 que le fait que G ait un rang réductif localement constant implique que G admette localement pour fpqc un tore maximal. Soient par exemple S le spectre d'un anneau de valuation discrète, G_1 et G_2 des schémas en groupes lisses séparés de type fini sur S, tels que la fibre générique de G_1 soit une courbe elliptique, la fibre spéciale un groupe $\mathbb{G}_m$, et la fibre générique de G_2 un groupe $\mathbb{G}_m$, la fibre spéciale un groupe $\mathbb{G}_a$, et prenons $G = G_1 \times_S G_2$. Alors les deux fibres de G ont le rang réductif 1, mais on voit aussitôt que G n'admet pas de tore maximal localement pour fpqc. Il est par contre très plausible que la condition suivante (pour un groupe lisse séparé de type fini sur un préschéma S) soit *suffisante* pour l'existence d'un tore maximal localement pour la topologie étale : le rang réductif *et* le rang abélien des fibres de G sont des fonctions localement constantes.

b) Dans la démonstration de 7.1 (notamment a)) nous avons invoqué XI 6.2 dans des cas où S n'est pas supposé localement noethérien. Cependant dans les cas envisagés d'application de XI 6.2 la réduction au cas S noethérien affine est immédiate.

Voici une variante de 7.1 b) :

Proposition 7.8. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes,* H *un préschéma en groupes lisse sur* S, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes* (*faisant de* H *un sous-*S*-groupe de* G). *Alors pour tout sous-groupe de Cartan*[(*)] C *de* G, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{H})$ *est représentable par un* sous-préschéma fermé de G lisse *sur* S.

Le fait que le transporteur soit représentable par un sous-préschéma fermé de G de présentation finie est contenu dans XI 6.11, compte tenu que C est à fibres connexes puisque G l'est (6.6 b)). Pour montrer que le transporteur est lisse sur S, on est ramené par le procédé standard au cas où S est affine noethérien, puis au cas où S est artinien local, et par descente au cas où le corps résiduel de S est algébriquement clos. Mais alors C admet un tore maximal T, qui est tore maximal de G. On peut supposer que **235**
le rang réductif et le rang nilpotent de la fibre H_0 sont égaux à ceux de G_0 (autrement le transporteur serait vide), mais alors on voit aussitôt (utilisant la connexité de C et le fait que le centralisateur dans H d'un tore maximal de H est lisse) que l'on a

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{H})$$

et comme on sait que le deuxième membre est lisse (XI 2.5), il en est de même du premier. Le raisonnement précédent montre plus généralement la partie b) de la

Proposition 7.9. — *Soient* G *et* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *comme dans* 7.8, *supposons de plus que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, H_s *soit connexe, et ait même rang réductif et même rang nilpotent que* G_s (*i.e.* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *contient un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$). *Alors on a ce qui suit :*

a) $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un sous-préschéma fermé* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *de* G *de présentation finie sur* S, *et le monomorphisme canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est une immersion ouverte ; par suite i est une immersion, et on a*

$$\mathrm{H} = \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})^0.$$

b) *Pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* G, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{H})$ *est un sous-préschéma fermé de* G, *lisse sur* S, *à morphisme structural surjectif. Si* C *est le centralisateur d'un tore maximal* T *de* G, *on a de plus*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T},\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C},\mathrm{H}).$$

c) *Soit* C *un sous-préschéma en groupes de* H. *Pour que ce soit un sous-groupe de Cartan de* H, *il faut et il suffit que ce soit un sous-groupe de Cartan de* G.

d) *Supposons que* G *admette localement pour la topologie étale, ou pour la topologie* **236**
fpqc, *un sous-groupe de Cartan* (*resp. un tore maximal*), *alors il en est de même de* H.

[(*)] La démonstration montre qu'il suffit de supposer que C est un sous-groupe lisse de G dont chaque fibre géométrique est le centralisateur connexe d'un sous-groupe d'un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{\mathrm{S}}}$.

Démonstration. a) La représentabilité de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ par un sous-préschéma fermé $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ de G de présentation finie sur S est contenue dans XI 6.11. Comme H est lisse donc plat localement de présentation finie sur S, pour vérifier que $\mathrm{H} \to \mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est une immersion ouverte, on est ramené à le vérifier sur les fibres (VI_{B}.2.6), ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos k. On est ramené alors (Exp. VI [11]) à vérifier que l'homomorphisme correspondant sur les algèbres de Lie est un isomorphisme, ou ce qui revient au même, que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{H}} = 0$, où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de G et de H, et l'exposant H désigne les invariants sous H (cf. II 5.2.3 (i)). Or H contient par hypothèse un sous-groupe de Cartan C de G, centralisateur du tore maximal T de G, et il suffit donc de prouver que l'on a

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{\mathrm{T}} = 0,$$

ce qui résulte, compte tenu de la complète réductibilité des représentations de T (I, 4.7.3), de la relation analogue $(\mathfrak{g}/\mathfrak{c})^{\mathrm{T}}$, où $\mathfrak{c} = \mathrm{Lie}(\mathrm{C})$. Quant à cette dernière, équivalente à

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{c},$$

elle signifie que le centralisateur C et le normalisateur N de T ont même algèbre de Lie, ce qui résulte du fait que C est un sous-groupe ouvert de N (XI 5.9). Cela achève de prouver a).

b) Comme on l'a signalé, la démonstration a été donnée dans 7.8.

c) Compte tenu du fait que H est un sous-préschéma de G, l'assertion se ramène trivialement au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas elle résulte aussitôt de l'hypothèse faite sur H.

237 d) On utilise b), c) et le « lemme de Hensel » XI 1.10.

Corollaire 7.10. — *Soient* G *et* H *comme dans* 7.9, *et supposons que pour tout corps algébriquement clos k au-dessus de* S, *tout élément de* $\mathrm{G}_k(k)$ *qui normalise* H_k *est dans* $\mathrm{H}_k(k)$. *Alors* H *est un* sous-préschéma fermé de G, *et est* son propre normalisateur.

Cela résulte trivialement de 7.9 a). Nous appliquerons en particulier 7.10 aux sous-groupes de Borel (plus généralement, aux sous-groupes paraboliques) de G.

Corollaire 7.11. — *Soient* G, H *comme dans* 7.9. *Alors* H *contient tout sous-préschéma en groupes* Z *de* G, *central dans* G *et plat et de présentation finie sur* S.

On peut comme d'habitude se ramener au cas S affine noethérien, puis au cas S artinien, ce qui implique qu'on est sous les conditions de 7.1. En vertu de 7.9 c) on peut supposer que H contient un sous-groupe de Cartan C de G, et on est ramené à prouver que $\mathrm{C} \supset \mathrm{Z}$. Or comme S est artinien, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ est représentable par un préschéma en groupes de type fini sur S, le morphisme canonique $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ étant fidèlement plat et son noyau étant Z (VI_{A}.3.2). Évidemment G' est lisse sur S, et on peut appliquer 7.1 f), qui implique que C est de la forme $u^{-1}(\mathrm{C}')$, donc contient Z.

[11] N.D.E. : référence non localisée dans VI_{B}, voir M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, I, Masson (1970), corollaire II.5.6.

Corollaire 7.12. — *Soient* G, G′ *deux* S-*préschémas en groupes lisses de présentation finie,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un homomorphisme de groupes fidèlement plat* (*i.e. pour tout* $s \in \mathrm{S}$, u_s *est fidèlement plat*), *supposons* Ker u *central et* G *à fibres connexes. Alors l'application*

$$\mathrm{H}' \longmapsto \mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}')$$

établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes H′ *de* G′, *lisses de présentation finie sur* S, *ayant même rang réductif et même rang nilpotent* **238**
que G′ *en tout* $s \in \mathrm{S}$, *et l'ensemble des sous-préschémas en groupes* H *de* G, *lisses de présentation finie sur* S, *ayant même rang réductif et même rang nilpotent que* G *en tout* $s \in \mathrm{S}$. *Pour que* H *soit à fibres connexes, il faut et suffit que* H′ *le soit.*

Soit H un sous-préschéma en groupes de G ayant les propriétés qu'on vient de préciser. Alors en vertu de 7.10, H contient Z = Ker u, donc en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate, est de la forme $u^{-1}(\mathrm{H}')$, où H′ est un sous-préschéma en groupes bien déterminé de G′, et on constate aussitôt compte tenu de 6.6 e) que ce dernier a les propriétés énoncées plus haut. D'ailleurs, si H est à fibres connexes, il en est évidemment de même de H′ = H/Z. Il reste donc à prouver que si on part d'un sous-groupe H′ de G′ ayant les propriétés énoncées, alors $u^{-1}(\mathrm{H}') = \mathrm{H}$ a les mêmes propriétés dans G ; et que si H′ est à fibres connexes, il en est de même de H. Compte tenu de 6.6 e), on est ramené à prouver que H est lisse sur S (resp. et à fibres connexes). Or H est déjà plat sur S comme image inverse de H′ qui l'est par le morphisme plat u, donc on est réduit à vérifier que les fibres géométriques de H sont lisses (resp. et connexes) ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Alors H′ contient un sous-groupe de Cartan C′ de G′, donc H contient l'image inverse C de C′, qui est un sous-groupe de Cartan de G par 6.6 e), donc C est lisse et connexe. Par suite 7.11 résulte du lemme suivant :

Lemme 7.13. — *Soient* G, G′ *deux préschémas en groupes plats de présentation finie sur* S, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un homomorphisme de groupes qui soit fidèlement plat,* C′ *un sous-préschéma en groupes de* G *de présentation finie sur* S, *tel que* $\mathrm{C} = u^{-1}(\mathrm{C}')$ *soit lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*). *Alors pour tout sous-préschéma en groupes* H′ *de* G′ *de présentation finie sur* S, *contenant* C′, *et tel que* H′ *soit lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*), *son image inverse* $\mathrm{H} = u^{-1}(\mathrm{H}')$ *est lisse sur* S (*resp. à fibres connexes*).

Comme nous l'avons remarqué plus haut, cet énoncé se réduit aussitôt au cas où S est le spectre d'un corps. Notons alors que H est fibré principal de base H/C, de **239**
groupe C (Exp. $\mathrm{VI_B}$.9), d'autre part $\mathrm{H/C} \simeq \mathrm{H'/C'}$ (cf. Exp. IV), et H′ étant lisse (resp. connexe) il en est de même de H′/C′ donc de H/C. Comme il en est de même de C par hypothèse, il s'ensuit aussitôt qu'il en est encore de même pour le fibré H. C.Q.F.D.

8. Éléments semi-simples, réunion et intersection des tores maximaux dans les schémas en groupes non nécessairement affines

Dans tout ce Numéro, G désigne un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur S, à *fibres connexes.*

Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps algébriquement clos. Lorsque G est affine, on a défini dans BIBLE 4 N°4 la notion d'*élément semi-simple* de $G(k)$; on constate aussitôt que cette notion est invariante par extension algébriquement close k'/k du corps de base. De plus, on a vu dans BIBLE 6 th. 5 (c) que $g \in G(k)$ est semi-simple si et seulement si il est contenu dans un tore maximal de G. Lorsque G n'est plus supposé affine, G s'écrit canoniquement (grâce à Chevalley) comme extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique affine lisse et connexe :

$$(*) \qquad e \longrightarrow V \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow e.$$

Nous dirons qu'un élément g de $G(k)$ est *semi-simple* si c'est un élément semi-simple de $V(k)$. Comme les tores maximaux de V sont évidemment identiques aux tores maximaux de G, il revient au même de dire que g appartient à un tore maximal de G. C'est évidemment encore une notion invariante par extension algébriquement close k'/k du corps de base k.

Supposons maintenant que S soit le spectre d'un corps quelconque k, et soit $g \in G$. Alors (choisissant une extension algébriquement close K de $\kappa(g)$) on voit que g est
240 l'image d'un point géométrique g' de G à valeurs dans une extension algébriquement close K de k, et nous dirons que g est *semi-simple* si g' est semi-simple, ce qui est indépendant du choix particulier de g', grâce à ce qui a été dit plus haut. Si k' est une extension de k, alors l'ensemble des éléments semi-simples de $G_{k'}$ est l'image inverse de l'ensemble G^{ss} des éléments semi-simples de G.

Supposons enfin S quelconque, alors un point $g \in G$ est dit semi-simple s'il est semi-simple dans sa fibre G_s. Si $S' \to S$ est un morphisme quelconque, alors $G^{ss}_{S'}$ est donc l'image inverse de G^{ss}. Supposons que le foncteur $\mathscr{T}$ défini dans 1.10 (foncteur des tores maximaux) soit représentable par un préschéma de présentation finie sur S (ce qui est le cas par exemple si G admet localement pour fpqc un tore maximal, en vertu de 7.1 d), du moins si G est quasi-projectif sur S). Considérons le tore maximal $\underline{T}$ de $G_{\mathscr{T}}$ canonique (« tore maximal universel de G »), et le morphisme

$$u : \underline{T} \longrightarrow G$$

induit par la projection $G_{\mathscr{T}} \to G$. Alors il résulte aussitôt de la définition que G^{ss} n'est autre que l'image du morphisme précédent. On va en conclure :

Proposition 8.1. — *L'ensemble* G^{ss} *des éléments semi-simples de* G *est localement constructible* (*donc constructible si* S *donc* G *est quasi-compact et quasi-séparé*).

On se ramène comme d'habitude au cas où S est affine noethérien, de plus on peut supposer (par le critère noethérien habituel de constructibilité (EGA 0_{III} 9.2.3)) que S est intègre, et se borner à prouver qu'il existe un ouvert non vide U de S tel que $G^{ss}|_U$ est constructible. Prenant U assez petit, et le remplaçant au besoin par un revêtement fini, on peut supposer que G est séparé sur S et contient un tore maximal
241 T. Mais alors en vertu de 7.1 d) le foncteur $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma de présentation finie sur S, et il en est donc de même de $\underline{T}$, dont l'image dans G est par suite constructible. C.Q.F.D.

Supposons de nouveau que k soit un corps, et considérons le sous-groupe H de G engendré par le morphisme précédant (cf. $\mathrm{VI_B}$.1.2). C'est un sous-schéma en groupes lisse de G, connexe puisque $\underline{\mathrm{T}}$ l'est, dont la formation est évidemment compatible avec toute extension du corps de base (cf. VI), celle de $\underline{\mathrm{T}}$ l'étant. Lorsque k est algébriquement clos, on voit tout de suite que H est aussi le sous-groupe algébrique de G engendré par les tores maximaux de G, ou ce qui revient au même, par les tores de G, et c'est aussi le plus petit sous-groupe algébrique de G qui contient les éléments semi-simples de $\mathrm{G}(k)$. (En fait, ces caractérisations de H restent valables dès que k est un corps infini, grâce au fait, prouvé dans XIV, que l'ensemble des points de $\underline{\mathrm{T}}$ rationnels sur k est dense dans $\underline{\mathrm{T}}$). D'ailleurs, H est invariant dans G, car pour le voir, on peut se borner au cas où k est algébriquement clos, et alors (H et G étant lisses sur k) il suffit de vérifier que H est stable par les automorphismes intérieurs $\mathrm{int}(g)$, $g \in \mathrm{G}(k)$, ce qui est évident. (On pourrait même montrer que H est un sous-groupe *caractéristique* de G, i.e. stable sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{k\text{-gr}}(\mathrm{G})$). Il résulte alors aussitôt de 6.6 d) que le rang réductif de G/H est nul ; de façon plus précise, si K est un sous-groupe algébrique invariant de G, il résulte aussitôt du fait que pour k algébriquement clos, les tores maximaux de G/K sont les images directes des tores maximaux de G, que le rang réductif de G/K est nul si et seulement si K contient tous les tores maximaux de G (k étant supposé algébriquement clos), ou encore si et seulement si K contient H (k étant quelconque) : donc H est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/H soit de rang réductif nul. Une autre caractérisation évidente de H est la suivante : c'est le plus petit sous-groupe algébrique de G ayant même rang réductif que G. Notons enfin que H est affine : en effet, pour le voir on peut encore supposer k algébriquement clos, et reprenant la suite exacte $(*)$ du début du N°, on note que les tores maximaux de G sont contenus dans V, donc il en est de même de H, donc V **242**
étant affine, H l'est. Résumons les résultats obtenus :

Proposition 8.2. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur le corps k, et soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Il existe un sous-groupe algébrique* H *de* G*, tel que* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *soit le sous-groupe algébrique de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *engendré par les tores maximaux* (*ou encore par les tores*) *de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$*. Le groupe* H *est aussi caractérisé comme le plus petit sous-groupe algébrique de* G *ayant même rang réductif que* G*, ou le plus petit sous-groupe algébrique invariant de* G *tel que le rang réductif de* G/H *soit nul. C'est un sous-groupe lisse connexe invariant et affine de* G*, dont la formation commute à toute extension du corps de base.*

Pour utiliser la caractérisation de H en termes de G/H, il convient d'expliciter le

Corollaire 8.3. — *Soit* G *un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps k algébriquement clos k. Pour que* G *soit de rang réductif nul* (*i.e. avec les notations de* 8.2*, pour que l'on ait* $\mathrm{H} = (e)$) *il faut et suffit que* G *soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe unipotent* (*i.e. extension successive de groupes isomorphes au groupe additif* $\mathbb{G}_a$).

En effet, grâce à la suite exacte de Chevalley $(*)$, on est ramené à prouver que le rang réductif du groupe lisse connexe affine V est nul si et seulement si V est unipotent, ce qui est contenu dans BIBLE 6.4. th. 4 cor. 3. Donc, avec les notations de 8.2, H est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que $(G/H)_{\overline{k}}$ soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine unipotent. On conclut aussi :

Corollaire 8.4. — *Avec les notations de* 8.2 *pour qu'on ait* G = H (*i.e.* $G_{\overline{k}}$ *engendré par ses tores maximaux*) *il faut et suffit que* G *soit affine et que tout homomorphisme de* $G_{\overline{k}}$ *dans la groupe additif soit trivial.*

243 ***Remarques 8.5***. — a) Soit $\overline{V}$ le plus grand sous-groupe algébrique lisse connexe affine de $G_{\overline{k}}$ (de sorte que $G_{\overline{k}}$ est extension d'une variété abélienne par $\overline{V}$). Il est bien connu (Rosenlicht [12]), si k n'est pas parfait, que $\overline{V}$ n'est en général pas « défini sur k » i.e. qu'il n'existe pas en général de sous-groupe algébrique V de G, tel que $V_{\overline{k}} = \overline{V}$. Cependant, lorsque $\overline{V}$ est engendré par ses tores maximaux, i.e. lorsque $\overline{V}$ n'admet pas de groupe quotient isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_{a,\overline{k}}$, il existe un tel V, savoir le groupe H de 8.2. On voit donc que dans cette question de rationalité, comme dans bien d'autres (cf. par exemple XIV N°6), tous les ennuis proviennent des groupes unipotents i.e. du groupe additif, tandis que c'est la présence de (suffisamment de) groupes de type multiplicatif qui assure au contraire que les choses marchent bien.

b) On peut aussi introduire, avec les notations de 8.2, l'image inverse H′ dans G du sous-groupe des commutateurs de G/H, alors H′ est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que $(G/H')_{\overline{k}}$ soit extension *commutative* d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine unipotent. H′ est encore un sous-groupe lisse connexe affine de G. Soit H″ l'image inverse dans G de $p^n(G/H')$ pour n grand, p étant la caractéristique (supposée > 0), alors on voit facilement que H''/H' est une variété abélienne, et H″ est le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/H'' soit un groupe algébrique commutatif lisse connexe affine unipotent. Ceci posé, on voit facilement que pour que $\overline{V} = H_{\overline{k}}$ (notations de a)) i.e. pour que tout homomorphisme de $\overline{V}$ dans le groupe additif soit trivial, il faut et il suffit que $H'' = G$, ou encore que tout homomorphisme de $G_{\overline{k}}$ dans le groupe additif soit trivial.

Pour finir, nous allons généraliser aux groupes lisses à fibres connexes la notion de centre réductif développée dans le N°4, en nous inspirant de 4.10. Soit Z le sous-foncteur de G défini par

$Z(S') =$ Ensemble des sections g' de $G_{S'}$ sur S′ telles que pour tout S″ sur S′ et
244 tout tore maximal T″ de $G_{S''}$, l'image inverse g'' de g' par $S'' \to S'$ est une section de T″ sur S″.

Introduisant les foncteurs $\mathscr{T}(S') =$ ensemble des tores maximaux de $G_{S'}$, et $\underline{T}(S') =$ ensemble des couples (T', g'), où T′ est un tore maximal de $G_{S'}$ et g' une section de T′ sur S′, on voit que $\underline{T}$ est un sous-foncteur de $\mathscr{T} \times_S G = \mathscr{T}_G$, et avec ces notations, on peut écrire aussi

$$Z = \prod_{\mathscr{T}_G/G} \underline{T}/\mathscr{T}_G.$$

[12] N.D.E. : indiquer ici des références.

Utilisant XI 6.8, et 7.1 d) qui assure la représentabilité de $\mathscr{T}$ par un S-préschéma lisse sous certaines conditions, on pourrait en conclure la représentabilité de Z sous certaines conditions, que nous allons obtenir cependant par voie plus directe plus bas.

Définition 8.6. — Soit G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes. On dit que G *admet un centre réductif* si le foncteur Z précédent (qui est évidemment un sous-groupe de G) est représentable par un groupe de type multiplicatif. On dit alors que Z est le *centre réductif* de G.

On notera que si Z est un centre réductif de G, alors pour tout changement de base $S' \to S$, $Z_{S'}$ est un centre réductif de $G_{S'}$; d'autre part, l'existence d'un centre réductif est évidemment une question *locale* pour la topologie fpqc. Quant à la terminologie « centre réductif », notons que Z est en tous cas *central*, car évidemment Z est invariant par

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})$$

et a fortiori c'est un sous-groupe invariant de G, et on applique IX 5.5.

Le lemme 4.5 doit se remplacer ici par :

Lemme 8.7. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un homomorphisme central, où* H *est de type multiplicatif et de type fini sur* S, *supposons que pour tout corps algébriquement clos* k *sur* S, $u_k(\mathrm{H}_k)$ *soit contenu dans le plus grand sous-groupe affine lisse connexe de* G_k. *Alors* u *se factorise à travers tout tore maximal* T *de* G (*donc,* u *se factorise en fait à travers le sous-foncteur* Z *de* G *défini plus haut*). 245

Utilisant une variante facile de IX 5.1 bis (où le signe = serait remplacé par un signe d'inclusion), on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps k, qu'on peut supposer algébriquement clos. (Se ramener au cas S affine noethérien, puis artinien, puis utiliser IX 3.6). Comme T est contenu dans le plus grand sous-groupe affine lisse connexe V de G, on est alors ramené au cas où G = V i.e. où G est affine, où le résultat a été démontré dans 4.5.

Proposition 8.8. — *Soit* G *un* S*-préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes.*

a) *Si* S *est le spectre d'un corps* k, *alors* G *admet un centre réductif* Z. *Lorsque* G *est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine* V (*par exemple si* k *est algébriquement clos*), *alors* Z *est aussi le centre réductif de* V, *et c'est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif central de* V.

b) *Soit* Z *un sous-préschéma en groupes de type multiplicatif de* G. *Alors* Z *est un centre réductif de* G *si et seulement si pour tout* $s \in \mathrm{S}$, Z_s *est un centre réductif de* G_s. *Alors* Z *est le plus grand sous-groupe de type multiplicatif* K *de* G *tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, K_s *soit contenu dans le centre réductif de* G_s *; plus généralement, pour tout homomorphisme* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, *avec* H *de type multiplicatif et de type fini sur* S, *tel que pour tout corps algébriquement clos* k *sur* S, $u_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{G}_k$ *se factorise par le plus grand sous-groupe lisse connexe affine de* G_k, u *se factorise par* Z (*et en particulier,* u *est central*).

c) *Si* G *admet localement pour la topologie* fpqc *un tore maximal, alors* G *admet un centre réductif.* 246

d) *Soit* T *un tore maximal de* G*. Alors* $\mathrm{T} \cap \mathrm{Centr}(\mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{T} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}))$ *et c'est un centre réductif de* G.

e) *Soit* Z *un centre réductif de* G*, et supposons* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *représentable* (*par exemple* S *artinien*)*, alors* G′ *admet le sous-groupe unité comme centre réductif, et* $\mathrm{T}' \mapsto \mathrm{T} = u^{-1}(\mathrm{T}')$ *établit une correspondance biunivoque entre tores maximaux de* G′ *et tores maximaux de* G.

Démonstration. a) Supposons que S est le spectre d'un corps k. Pour prouver alors l'existence d'un centre réductif, on peut supposer k algébriquement clos, et on est ramené par suite au cas où G est extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe affine V. Comme pour tout S′ sur k, les tores maximaux de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont ceux de $\mathrm{V}_{\mathrm{S}'}$ (en vertu de IX 5.2 et du fait que sur un corps algébriquement clos, un homomorphisme d'un tore dans une variété abélienne est trivial), il s'ensuit que le foncteur Z défini plus haut en termes de G est le même que celui défini en termes de V. On est ainsi ramené au cas de G affine. Comme $\mathscr{T}$ est représentable, et nécessairement « essentiellement libre » sur k (VIII 6.1) il s'ensuit que $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ est essentiellement libre sur G, et comme $\underline{\mathrm{T}}$ est un sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_{\mathrm{G}} = \mathrm{G}_{\mathscr{T}}$ (en vertu par exemple de VIII 5.7) il s'ensuit en vertu de VIII 6.4 que $\mathrm{Z} = \prod_{\mathscr{T}_{\mathrm{G}}/\mathrm{G}} \underline{\mathrm{T}}/\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ est représentable par un sous-schéma fermé de G. C'est donc un sous-schéma en groupes de G, je dis qu'il est de type multiplicatif : en effet on peut supposer k algébriquement clos, alors G admet un tore maximal T, et par définition on aura $\mathrm{Z} \subset \mathrm{T}$, donc Z est de type multiplicatif comme sous-groupe algébrique d'un groupe de type multiplicatif (IX.8). Cela prouve que Z est un centre réductif de G. Le fait que ce soit le plus grand sous-groupe de type multiplicatif central de V est contenu dans 8.7.

b) Le « seulement si » étant trivial, prouvons que si Z est un sous-groupe de type
247 multiplicatif de G tel que pour tout $s \in \mathrm{S}$, Z_s soit le centre réductif de G_s, alors Z est un centre réductif de G. Il faut prouver d'abord que Z est contenu dans tout tore maximal de G (ce qui restera donc vrai après tout changement de base) : c'est une conséquence immédiate de 8.7. Ensuite, il faut prouver que si g est une section de G sur S tel que pour tout S′ sur S, et tout tore maximal T′ de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, $g_{\mathrm{S}'}$ est une section de T′, alors g est une section de Z. Notons qu'on pouvait se ramener comme à l'accoutumée (compte tenu que $\prod_{\mathscr{T}_{\mathrm{G}}/\mathrm{G}} \underline{\mathrm{T}}/\mathscr{T}_{\mathrm{G}} = \mathrm{Z}'$ est un faisceau pour fpqc qui commute aux limites inductives d'anneaux) au cas S affine, puis S noethérien, et enfin S artinien. Alors $\mathscr{T}$ est représentable par un préschéma lisse sur S en vertu de 7.1 d), donc procédant comme dans a), on voit que $\prod_{\mathscr{T}_{\mathrm{G}}/\mathrm{G}} \underline{\mathrm{T}}/\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ est représentable par un sous-schéma fermé Z′ de G. On a déjà vu que $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z}'$, d'autre part par hypothèse sur Z on a $\mathrm{Z}_k = \mathrm{Z}'_k$ (où k est le corps résiduel), or Z étant plat sur S, il s'ensuit $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}'$, ce qui prouve que Z est un centre réductif de G. Les autres assertions de b) sont contenues dans 8.7.

c) Se ramène immédiatement à d).

d) Bien entendu, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, et $T \to GL(\mathfrak{g})$ l'homomorphisme induit par la représentation adjointe de G. On a trivialement

$$T \cap \mathrm{Centr}_G \subset \mathrm{Ker}(T \to GL(\mathfrak{g})),$$

la démonstration de l'inclusion inverse est la même que dans 4.7 d), nous ne la répétons pas ici. Soit Z le groupe en question, en tant que $\mathrm{Ker}(T \to GL(\mathfrak{g}))$ il est de type multiplicatif, (cf. par exemple IX 6.8). Pour prouver que c'est un centre réductif de G, on est ramené par b) au cas où S est le spectre d'un corps. Soit alors Z' le centre réductif (qui existe en vertu de a)), on a évidemment $Z' \subset T \cap \mathrm{Centr}(G) = Z$, d'autre part comme Z est un sous-groupe central de type multiplicatif contenu dans le sous-groupe lisse connexe affine T, il résulte de a) que $Z' \supset Z$, donc $Z' = Z$. C.Q.F.D.

e) Sous les conditions de 7.1 f) posons $Z = \mathrm{Ker}\, u$ et supposons que pour tout corps algébriquement clos k sur S, Z_k soit contenu dans un tore maximal de G_k. Alors on **248**
constate aisément que l'application $T' \mapsto u^{-1}(T')$ induit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des tores maximaux de G', et l'ensemble des tores maximaux de G. Appliquant ceci à la situation 8.8 e), la conclusion voulue en résulte aussitôt.

Remarques 8.9. — a) La démonstration donnée de 8.8 est indépendante des résultats du N°4, et en particulier celle de 8.8 a) n'utilise pas 4.4 (dont la démonstration est un peu pénible).

b) On voit facilement que le sous-groupe Z de G envisagé dans 8.6 est toujours central (qu'il soit représentable ou non), et il peut être tentant de l'appeler centre réductif de G dans tous les cas.

c) On peut également généraliser 4.9, on trouve l'énoncé suivant : Soit G un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos, pour que G soit une extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique lisse connexe unipotent (i.e. pour que le rang réductif de G soit nul, cf. 8.3) il faut et suffit que le centre réductif de G soit réduit au groupe unité, et que l'algèbre de Lie de G soit nilpotente.

9. Complément : action d'un schéma en groupes et points fixes

Le but de cette section, ajoutée en janvier 2008, est d'étudier les points fixes sous l'action d'un schéma en groupes.

9.1. Représentabilité du foncteur des points fixes. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes qui opère sur un S-schéma X. On définit le sous-foncteur X^G de X des points fixes de X sous G : pour tout S-schéma T, $X^G(T)$ est le sous-ensemble de X(T) formé des points fixes sous G (VIII.6.e).

Rappelons la notion de '« schéma S-pur » introduite dans ([G-R], § 3.3, [R]). Soit G un S-schéma en groupes plat, de présentation finie. Comme les fibres de G sont sans composantes immergées, la notion de pureté pour G prend la forme suivante. Le schéma G est S-pur si pour tout S-schéma local strictement hensélien T, de point fermé t, tout point générique $\widetilde{x}$ d'une fibre de $G \times_S T$ se spécialise en un point de G_t, i.e. l'adhérence de $\widetilde{x}$ dans $G \times_S T$ rencontre G_t.

Exemples. — (1) Si G est quasi-fini et séparé sur S, G est S-pur si et seulement si G est fini sur S.

(2) Si S = Spec(R) et G = Spec(A), G est S-pur si et seulement si A est un R-module projectif ([G-R], 3.3.5). En particulier G est S-pur si G est diagonalisable.

(3) Un schéma en groupes de type multiplicatif est S-pur car la notion de pureté est locale pour la topologie étale sur S.

(4) Le schéma G est S-pur si G est S-propre ou si les fibres de G sont irréductibles ou si S est semi-local artinien.

(5) En particulier, un S-schéma en groupes réductifs G est S-pur.

Proposition 9.2. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes de présentation finie,* S*-plat et* S*-pur, qui opère sur un* S*-schéma* X *de présentation finie. Alors le foncteur* X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X*, de présentation finie sur* S.

En effet, soit a dans X(S) et soit H le sous-schéma en groupes de G, fixateur de a. Alors a est fixe sous G si et seulement si H = G. Or le sous-foncteur C de S des coïncidences (de façon précise, si T est un S–schéma, $C(T) = \{\varnothing\}$ si $H \times_S T \to G \times_S T$ est bijectif, et $C(T) = \varnothing$ sinon) de H avec G est représentable par un sous-schéma fermé de S, défini par un faisceau d'idéaux de type fini ([G-R], 4.1.1). On applique ce résultat avec S = X en prenant pour a le point de X universel (i.e. l'identité dans $X(X) = \mathrm{Hom}_S(X, X)$).

9.3. Obstruction infinitésimale. — Sous l'hypothèse que G est un S-schéma en groupes plat de présentation finie qui opère (à gauche) sur un S-préschéma lisse X, nous allons maintenant étudier la lissité formelle du foncteur X^G.

On suppose ici que S est muni d'un sous-schéma fermé S_0 défini par un faisceaux d'idéaux quasi-cohérents $\mathscr{I}$ de carré nul. On note $j : S_0 \to S$, $G_0 = G \times_S S_0$, $X_0 = X \times_S S_0$.

Soit ε_0 un point de $X^G(S_0)$ qui se relève en un point de X(S). Nous allons étudier l'obstruction à relever ε_0 en un point de $X^G(S)$. Puisque X est lisse, on sait que les relèvements de ε_0 à X(S) forment un espace principal homogène trivial pour le sous le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\varepsilon_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{I})$$

(III.0.2, 0.3). On pose alors

$$L_0 = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\varepsilon_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{I}),$$

c'est un $\mathscr{O}_{S_0}$-module. En outre, vu que ε_0 est fixe sous G, L_0 est naturellement un G_0-$\mathscr{O}_{S_0}$-module. On note $\rho_0 : G_0 \to \mathrm{Aut}_{S_0}(L_0)$ (resp. $\rho : G \to \mathrm{Aut}_S(j_*L_0)$) la représentation associée.

Lemme 9.4. — *Il existe une certaine classe* $c(\varepsilon_0) \in H^1(G, j_*L_0) \cong H^1(G_0, L_0)$*, définie canoniquement par* ε_0*, telle que* ε_0 *se relève à* $X^G(S)$ *si et seulement si* $c(\varepsilon_0) = 0$.

L'adjonction $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_0, \mathrm{L}_0)$ est celle du lemme III.1.1.2. Nous allons travailler avec le petit site fppf sur S. Pour tout schéma T plat et de présentation finie sur S, on note $\mathrm{G}_\mathrm{T} = \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{T}$, $\mathrm{X}_\mathrm{T} = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{T}$ les objets correspondants sur T. Considérons le faisceau A sur le petit site fppf de S tel que, pour tout T plat et de présentation finie sur S on ait :

$$\mathrm{A}(\mathrm{T}) = \Big\{ \text{ ensemble des relèvements de } \varepsilon_0 \times_\mathrm{S} \mathrm{T} \text{ dans } \mathrm{X}(\mathrm{T}) \Big\}.$$

Vu que la formation de L_0 commute aux changements de bases plats, les considérations précédentes indiquent que A(T) est un espace principal homogène trivial sous le groupe abélien $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}, j_*\mathrm{L}_0)$. Toujours du fait que ε_0 est fixe, pour tout T plat et de présentation finie sur S, et tout g dans G(T), g agit par automorphismes affines sur A(T), de façon compatible avec l'action de G sur $j_*\mathrm{L}_0$. C'est-à-dire :

$$g(a_\mathrm{T} + v) = g(a_\mathrm{T}) \,+\, \rho(g)(v), \;\; v \in \mathrm{H}^1(\mathrm{T}, j_*\mathrm{L}_0).$$

Comme G est plat de type fini on peut appliquer ces considérations en prenant T = G et pour g le point universel id_G de G. On obtient ainsi une action du faisceau fppf G sur A.

Soit a un relèvement de ε_0 dans X(S). On note $g^\sharp$ le point universel de G et on définit $v^\sharp \in \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0)$ par

$$\rho(g^\sharp)(v^\sharp) = g^\sharp\,.a_\mathrm{G} - a_\mathrm{G}.$$

Pour tout S-préschéma Y, on pose $z(\mathrm{Y}) : \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Y}, j_*\mathrm{L}_0)$, $g \mapsto v^\sharp(g)$. Ceci définit le 1-cocycle z dans $\mathrm{Z}^1(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ (exposé I, § 5).

Sa classe $c(\varepsilon_0)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, j_*\mathrm{L}_0)$ ne dépend pas du choix de a. En particulier, si ε_0 se relève à $\mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$, on a $c(\varepsilon_0) = 0$. Réciproquement, si $c(\varepsilon_0) = 0$, alors il existe $w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{S}, j_*\mathrm{L}_0)$ tel que $z(\mathrm{Y})(g) = g\,.w_\mathrm{Y} - w_\mathrm{Y}$ tout S–préschéma Y et tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{Y})$. En appliquant ceci à Y = G et à $g^\sharp$, on conclut que $a - w \in \mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$. On a donc établi que ε_0 se relève dans $\mathrm{X}^\mathrm{G}(\mathrm{S})$ si et seulement si $c(\varepsilon_0) = 0$.

Remarque 9.5. — Dans le cas où G est affine et plat de type fini sur S affine, on peut raffiner cette obstruction en une classe $\widetilde{c}(\varepsilon_0) \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{X}_0, \mathrm{L}_0)$ où $\mathrm{H}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{X}_0, \mathrm{L}_0)$ est le groupe de cohomologie G_0–équivariante défini par Wevers ([W], app. C). Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de supposer que ε_0 se relève à X(S).

9.6. Lissité des points fixes. —

Théorème 9.7. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes plat, de type fini sur une base noethérienne* S *qui opère sur un* S*-schéma lisse* X*. On suppose que* G *est* S*-pur, et pour tout point géométrique s au dessus de* S (*de corps résiduel algébriquement clos*), *on a*

$$\mathrm{H}^1\big(\mathrm{G}_s, (\Omega^1_{\mathrm{X}_s})^*\big) = 0.$$

Alors le foncteur X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X *lisse sur* S.

Montrons le théorème 9.7. On sait que X^G est représentable par un sous–schéma fermé de X de présentation finie sur S. On peut supposer S = Spec(A) local. Suivant le critère de lissité (SGA1 III.3.1.iii.bis), il suffit de vérifier la lissité formelle de X^G

pour $S' = \mathrm{Spec}(A')$ et le sous-schéma fermé $S'_0 = \mathrm{Spec}(A'/\mathscr{I}') = \mathrm{Spec}(A'_0)$, où A' est un anneau local artinien et $\mathscr{I}'$ un idéal de carré nul de A'. Par dévissage, on se ramène au cas où $\mathscr{I}'$ est annulé par l'idéal maximal de A'. En particulier, si k désigne le corps résiduel de A', $\mathscr{I}'$ est un k-espace vectoriel.

On se donne donc un élément $\varepsilon'_0 \in X^G(S'_0)$ que l'on souhaite relever à $X^G(S')$. On note alors $X' = X \times_S S'$, $G' = G \times_S S'$, $X'_0 = X \times_S S'_0$, $G'_0 = G \times_S S'_0$. Vu que S' est affine et que X' est lisse sur S', $\varepsilon'_0 \in X^G(S'_0)$ se relève à $X(S')$. Selon le lemme 9.4, la classe

$$c(\varepsilon_0) \in H^1(G'_0, L'_0)$$

est l'obstruction à relever ε'_0 dans $X^G(S')$, où $L'_0 = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_{S'_0}}(\varepsilon'^*_0(\Omega^1_{X'_0/S'_0}), \mathscr{I}')$. Vu que L'_0 est un k-espace vectoriel, on a un isomorphisme canonique $H^1(G'_0, L'_0) \xrightarrow{\sim} H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0)$. Il suffit de montrer que $H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) = 0$. Notant $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, on a un isomorphisme (IX.3.1 dans le cas affine, lemme 9.11 en général)

$$H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) \otimes_k \overline{k} \xrightarrow{\sim} H^1(G'_0 \times_{A'_0} \overline{k}, L'_0 \otimes_k \overline{k}).$$

On remarque alors que la représentation $L'_0 \otimes_k \overline{k}$ est une somme directe de $(\Omega^1_{X'_0 \times_k \overline{k}})^*$. Par hypothèse on a $H^1(G'_0 \times_{\overline{k}} A'_0, \big(\Omega^1_{X'_0 \times_k \overline{k}})^*\big) = 0$ ce qui implique $H^1(G'_0 \times_{A'_0} k, L'_0) = 0$.

Corollaire 9.8. — *Soit* G *un* S*-schéma en groupes plat, de présentation finie qui opère sur un* S*-schéma lisse* X *de présentation finie. On suppose que* G *admet une suite de composition dont les facteurs sont d'un des types suivants :*

(1) S*-schéma abélien* (*i.e.* G *est lisse sur* S *et ses fibres sont des variétés abéliennes*),

(2) S*-schéma en groupes de type multiplicatif,*

(3) S*-schéma en groupes fini, étale, de degré inversible sur* S*,*

(4) S*–groupe réductif si* S *est un* $\mathbb{Q}$*–schéma.*

Alors le foncteur X^G *des points fixes de* X *sous* G *est représentable par un sous-schéma fermé de* X*, de présentation finie, lisse sur* S.

En effet, si $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ est une suite exacte de S–groupes satisfaisant les hypothèses du théorème, le S–groupe G'' opère sur le foncteur $X^{G'}$ et le foncteur X^G n'est pas autre chose que celui des points fixes de $X^{G'}$ pour G''. Ainsi, on est ramené au cas d'un S–groupe d'un des quatre types ci-dessus. Par passage à la limite, on peut supposer S noethérien. On va vérifier le critère cohomologique énoncé ci-dessus pour une fibre G_s au dessus d'un point géométrique s de S et une représentation linéaire de dimension finie V de G_s.

Dans le cas d'un schéma abélien, toute application de G_s^n dans V est constante et par suite les $H^i(G_s, V)$ sont nuls pour $i > 0$.

Dans le cas d'un schéma en groupes de type multiplicatif, G_s est un groupe diagonalisable. Le théorème I.5.3.3 montre que les $H^i(G_s, V)$ sont nuls pour $i > 0$.

Dans les deux cas suivants, l'argument est le même puisqu'il repose sur la semi-simplicité des représentations linéaires de G_s. En effet dans le cas d'un S-schéma en groupes fini, étale, de degré inversible sur S, G_s est un groupe fini constant de degré inversible dans le corps résiduel $\kappa(s)$, il est bien connu que toute représentation linéaire de G_s est semi-simple.

Pour le cas réductif, le corps résiduel $\kappa(s)$ est supposé (algébriquement clos) de caractéristique nulle. On sait alors toute représentation linéaire de G_s est semi-simple (voir [T-Y], théorème 27.3.3).

Remarque 9.9. — Ceci s'applique en particulier au cas d'une action de G/S sur un S–schéma en groupes H lisse. Si G est un groupe de type multiplicatif agissant par tranformations intérieures sur H lisse et affine sur S, on retrouve alors le corollaire XI.5.3 énonçant la lissité du centralisateur de G dans H.

Remarque 9.10. — Dans le cas où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$ et G est un groupe algébrique linéairement réductif défini sur le corps algébriquement clos k, ce résultat est dû indépendamment à Fogarty ([F], theorem 5.4) et Iversen ([I], proposition 1.3).

La démonstration du théorème 9.7 utilise le lemme suivant bien connu dans le cas d'un schéma en groupes affine (IX.3.1).

Lemme 9.11. — *Soient* G *un schéma en groupes sur un schéma affine* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *et* $f : \mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}') \to \mathrm{S}$ *un morphisme plat. On pose* $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. *Alors pour tout* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*–module* M *quasi-cohérent, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{H}^i(\mathrm{G}',\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}') \qquad (i \geqslant 0).$$

Vu que les chaînes de degré $n \geqslant 1$ pour la cohomologie de Hochschild sont déterminées par leur valeur au point $(\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}) \in \mathrm{G}(\mathrm{G}) \times \cdots \mathrm{G}(\mathrm{G})$ on a un isomorphisme de A-modules $\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathrm{M}) \cong \Gamma(\mathrm{G}^n, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}^n})$. Le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathrm{M})$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\mathrm{L} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{G}, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{G}^2, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}^2}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{G}^3, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}^3}) \longrightarrow \cdots$$

Puisque A' est plat sur A, on a, d'après EGA IV_1, 1.7.21,

$$\Gamma(\mathrm{G}^n, \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathscr{O}_{\mathrm{G}^n}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{G}'^n, (\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}') \otimes_{\mathrm{A}'} \mathscr{O}_{\mathrm{G}'^n}).$$

Ceci entraîne l'assertion voulue en prenant la cohomologie.

Bibliographie

(13)

[Fo73] J. Fogarty, *Fixed point schemes*, Amer. J. Math. **95** (1973), 35-51.

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[Iv72] B. Iversen, *A fixed point formula for action of tori on algebraic varieties*, Invent. math. **16** (1972), 229-236.

(13) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[Ray72] M. Raynaud, *Flat modules in algebraic geometry*, Compositio Math. **24** (1972), 11-31.

[TY06] P. Tauvel, R. W. T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer-Verlag, 2006.

[We05] S. Wewers, *Formal deformation of curves with group scheme action*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 1105-1165.