EXPOSÉ XX

GROUPES RÉDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE 1
par M. Demazure

1. Systèmes élémentaires. Les groupes U_α et $U_{-\alpha}$ 35

Rappel 1.1. — Soit $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos, et soient G un S-groupe réductif de rang semi-simple 1, T un tore maximal (nécessairement déployé) de G. On a alors
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$
où α et $-\alpha$ sont les racines de G par rapport à T. De plus, il existe deux monomorphismes de groupes
$$p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\,S} \longrightarrow G \qquad \text{et} \qquad p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,S} \longrightarrow G$$
tels que
$$t\,p_\alpha(x)\,t^{-1} = p(\alpha(t)x) \qquad \text{et} \qquad t\,p_{-\alpha}(x)\,t^{-1} = p_{-\alpha}(\alpha(t)^{-1}x),$$
pour tout $S' \to S$ et tous $t \in T(S')$, $x \in \mathbb{G}_a(S')$, et que le morphisme
$$\mathbb{G}_{a,\,S} \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,\,S} \longrightarrow G,$$
défini par $(y, t, x) \mapsto p_{-\alpha}(y)\,t\,p_\alpha(x)$, soit radiciel et dominant (*Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3).

Comme l'application tangente à l'élément neutre est bijective, ce morphisme est également séparable, donc birationnel ; par le « Main Theorem » de Zariski (EGA III_1, 4.4.9), c'est donc une immersion ouverte.

Lemme 1.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* T *un tore de* G*,* Q *un sous-tore de* T*,* α *un caractère de* T *induisant sur* Q *un caractère non trivial sur chaque fibre. Soit* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,\,S} \to G$ *(resp.* $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,S} \to G$*) un morphisme de groupes normalisé par* T *avec le multiplicateur* α *(resp.* $-\alpha$*). Supposons que le morphisme* 36
$$u : \mathbb{G}_{a,\,S} \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,\,S} \longrightarrow G$$
défini ensemblistement par $u(y, t, x) = p_{-\alpha}(y)\,t\,p_\alpha(x)$ *soit une immersion ouverte. Soient enfin* q *un entier* $\geqslant 0$ *et*
$$p : \mathbb{G}_{a,\,S} \longrightarrow G$$

un morphisme de groupes tel que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $t \in \mathrm{Q}(\mathrm{S}')$, $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$ *on ait*
$$\mathrm{int}(t)^q\big(p(x)\big) = p(\alpha(t)x).$$
Il existe alors un unique $\nu \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ *tel que* $p(x) = p_\alpha(\nu\, x^q)$.

Soient en effet Ω l'image de u et $\mathrm{U} = p^{-1}(\Omega)$. C'est un ouvert de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle. Pour toute section t de Q, l'automorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par la multiplication par $\alpha(t)$ laisse fixe globalement U. On a $\mathrm{U} = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$; en effet, il suffit de le vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos k ; alors $\alpha : \mathrm{Q}(k) \to k^*$ est surjectif, ce qui prouve aussitôt $\mathrm{U}(k) \supset k^*$, donc $\mathrm{U} = \mathbb{G}_{a,\,k}$. Il existe donc trois morphismes
$$a : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}, \qquad b : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad c : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$
tels que
$$p(x) = p_{-\alpha}(a(x))\, b(x)\, p_\alpha(c(x)).$$
La condition sur p se traduit par
$$\begin{aligned} a(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^{-q}\, a(x),\\ b(\alpha(t)x) &= b(x),\\ c(\alpha(t)x) &= \alpha(t)^q\, c(x). \end{aligned}$$
37 Pour la même raison que précédemment, on a donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$,
$$a(zx) = z^{-q}a(x), \qquad b(zx) = b(x), \qquad c(zx) = z^q c(x),$$
donc
$$z^q a(z) = a(1), \qquad b(z) = b(1), \qquad c(z) = z^q c(1).$$
Comme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$, on a aussitôt pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:
$$\begin{aligned} x^q a(x) &= a(1) = a(0) = 0, && \text{d'où } a = 0,\\ c(x) &= x^q c(1) = \nu\, x^q, && \text{pour un } \nu \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}),\\ b(x) &= b(1) = b(0) = e, && \text{d'où } b = e, \end{aligned}$$
ce qui achève la démonstration.

Définition 1.3. — Soit S un schéma. On appelle S-*système élémentaire* un triplet $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ où

(i) G est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 2.7),
(ii) T est un tore maximal de G,
(iii) α est une racine de G par rapport à T (Exp. XIX 3.2).

On a donc une décomposition en somme directe (Exp. XIX 3.5) [(1)]
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$
$\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ étant localement libres de rang un.

(1) N.D.E. : de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules.

1.4. Si (G, T, α) est un S-système élémentaire, alors $(G_{S'}, T_{S'}, \alpha_{S'})$ est un S′-système élémentaire pour tout $S' \to S$. Si (G, T, α) est un S-système élémentaire, alors $(G, T, -\alpha)$ en est aussi un.

Si S est un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T, alors (Exp. XIX 3.9), (Z_α, T, α) est un S-système élémentaire. 38

Soit (G, T, α) un S-système élémentaire. Le module inversible $\mathfrak{g}^\alpha$ est muni canoniquement d'une structure de T-module. On a donc également une structure de T-module sur le fibré vectoriel $W(\mathfrak{g}^\alpha)$. D'autre part, les automorphismes intérieurs de T définissent sur G une structure de groupe à groupe d'opérateurs T.

Théorème 1.5. — *Soit* (G, T, α) *un* S*-système élémentaire.*

(i) *Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs* T

$$\exp : W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

qui induise sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$. [2]

Autrement dit, exp *est l'unique morphisme vérifiant les conditions suivantes : pour tout* $S' \to S$ *et tout* $t \in T(S')$, $X, X' \in W(\mathfrak{g}^\alpha)(S')$, *on a*

$$\begin{aligned} \exp(X + X') &= \exp(X)\exp(X'), \\ \operatorname{int}(t)\big(\exp(X)\big) &= \exp(\alpha(t)X), \\ \underline{\mathrm{Lie}}(\exp)(X) &= X. \end{aligned}$$

(ii) *Si on définit de même* (*dans le* S*-système élémentaire* $(G, T, -\alpha)$)

$$\exp : W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow G,$$

alors le morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{S}{\times} T \underset{S}{\times} W(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par $(Y, t, X) \mapsto \exp(Y) \cdot t \cdot \exp(X)$ *est une immersion ouverte.*

Supposons avoir démontré l'existence des morphismes exp demandés et démontrons les autres assertions du théorème. Prouvons d'abord (ii). Comme les deux membres sont de présentation finie et plats sur S, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos (SGA 1, I 5.7 et VIII 5.5). Soit alors $S = \operatorname{Spec} k$. Soient $x \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$. Il suffit de prouver que le morphisme 39

$$\mathbb{G}_{a,k} \underset{k}{\times} T \underset{k}{\times} \mathbb{G}_{a,k} \longrightarrow G \qquad (y, t, x) \mapsto \exp(yY)\, t\, \exp(xX)$$

est une immersion ouverte. Or d'après 1.1 et 1.2, il existe a, $b \in k$ tels que

$$\exp(yY) = p_{-\alpha}(ay) \qquad \text{et} \qquad \exp(xX) = p_\alpha(bx).$$

Comme $\exp : W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \to G$ induit un monomorphisme sur les algèbres de Lie, on a $a \neq 0$; de même $b \neq 0$ et on est ramené à 1.1.

(2) N.D.E. : On verra plus loin (Cor. 5.9) que exp est un isomorphisme de $W(\mathfrak{g}^\alpha)$ sur un sous-groupe *fermé* de G.

L'unicité du morphisme exp peut se démontrer localement sur S ; on se ramène alors au cas où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont libres, et on n'a plus qu'à appliquer 1.2 (avec $\mathrm{Q} = \mathrm{T}$ et $q = 1$).

Reste donc à prouver l'existence du morphisme exp demandé. Remarquons d'abord qu'en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate et de l'assertion d'unicité précédente, il suffit de démontrer cette existence *localement* sur S pour la topologie (fpqc). Par les raisonnements habituels utilisant la présentation finie, on se ramène au cas où S est noethérien, puis au cas où il est noethérien local. En vertu de la remarque précédente, on peut donc se contenter de prouver l'existence du morphisme exp cherché lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, A local noethérien complet à corps résiduel k algébriquement clos. Soit alors $p_0 : \mathbb{G}_{a,k} \to \mathrm{G}_k$ un monomorphisme de k-groupes normalisé par T_k avec le multiplicateur $\alpha_0 = \alpha \otimes_{\mathrm{A}} k$ (il en existe par 1.1). On sait (1.1 et 1.2) que le morphisme $\mathrm{T}_k \cdot_{\alpha_0} \mathbb{G}_{a,k} \to \mathrm{G}_k$ correspondant est une immersion, donc en particulier un monomorphisme. Admettons provisoirement les deux lemmes suivants :

40 ***Lemme 1.6***. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe de présentation finie,* T *un* S*-tore,* α *un caractère non trivial sur chaque fibre de* T*,* s_0 *un point de* S*. Soit*

$$f : \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de S*-groupes tel que* f_{s_0} *soit un monomorphisme et que la restriction de* f *à* T *soit un monomorphisme. Il existe un voisinage ouvert* U *de* s_0 *tel* $f|_{\mathrm{U}}$ *soit un monomorphisme.*

Lemme 1.7. — *Soient* A *un anneau local complet noethérien à corps résiduel* k *algébriquement clos,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* A*-système élémentaire,* $p_0 : \mathbb{G}_{a,k} \to \mathrm{G}_k$ *un morphisme de* k*-groupes normalisé par* T_k *avec le multiplicateur* $\alpha \otimes_{\mathrm{A}} k$*. Il existe un morphisme de groupes* $p : \mathbb{G}_{a,\mathrm{A}} \to \mathrm{G}$ *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*.*

Soit p le morphisme dont l'existence est affirmée par 1.7. Soit $f : \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ le morphisme correspondant. Il vérifie les hypothèses de 1.6, donc est un monomorphisme ; en particulier p est un monomorphisme. On conclut alors par Exp. XIX 4.9.

Démonstration de 1.6. Désignons par $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ la section unité. Comme f est non ramifié en $\varepsilon(s_0)$, il l'est en $\varepsilon(s)$ pour tous les s d'un voisinage ouvert U de s_0 ; $f|_{\mathrm{U}}$ est donc non ramifié (Exp. X 3.5), donc son noyau $\mathrm{Ker}(f)_{\mathrm{U}}$ non ramifié sur U. Pour prouver que $f|_{\mathrm{U}}$ est un monomorphisme, il suffit donc [3] de prouver que $\mathrm{Ker}(f)_{\mathrm{U}}$ est radiciel sur U, ce qui est une question ensembliste. On est donc ramené à prouver :

41 ***Lemme 1.8***. — *Soit* k *un corps algébriquement clos ; soit* N *un sous-groupe invariant de* $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,k}$ *(*α *caractère non trivial du tore* T*), étale sur* k *et tel que* $\mathrm{N} \cap \mathrm{T} = \{e\}$*. Alors* $\mathrm{N} = \{e\}$*.*

On a $\mathrm{int}(t')(t,x) = (t, \alpha(t')x)$. Si (t,x) est un point de N, avec $x \neq 0$, alors (t, zx) est aussi un point de N pour $z \in k^*$ et (t,x) n'est pas isolé, donc N n'est pas quasi-fini. On a donc ensemblistement $\mathrm{N} \subset \mathrm{T}$ et on a terminé.

[3] N.D.E. : selon EGA IV_4, 17.9.1.

Démonstration de 1.7. Soient $\mathfrak{m}$ le radical de A et $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$, $n \geqslant 0$. Montrons d'abord, par récurrence sur n, que p_0 peut se prolonger pour chaque n en un morphisme de S_n-groupes

$$p_n : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}_n} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}$$

normalisé par $\mathrm{T}_{\mathrm{S}_n}$ avec le multiplicateur α_n, les p_n vérifiant de plus la condition $p_{n+1} \times_{\mathrm{S}_{n+1}} \mathrm{S}_n = p_n$.

Soit $\mathrm{H} = \mathrm{T} \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. Le morphisme $\mathrm{H}_{\mathrm{S}_n} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}$ défini par p_n est noté f_n. Admettons le lemme suivant :

Lemme 1.9. — *Si* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *est un k-système élémentaire, k algébriquement clos, et si* $p : \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{G}$ *est un monomorphisme normalisé par* T *avec le multiplicateur α, on a*

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{T} \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}, \mathfrak{g}) = 0.$$

(*On fait opérer* $\mathrm{T} \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}$ *sur* $\mathfrak{g}$ *par l'intermédiaire du morphisme* $\mathrm{T} \cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{G}$ *défini par p, et de la représentation adjointe de* G).

Alors, en vertu de Exp. III 2.8, f_n se prolongera en un morphisme de S_{n+1}-groupes

$$f'_{n+1} : \mathrm{H}_{\mathrm{S}_{n+1}} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{S}_{n+1}}\,.$$

Or f'_{n+1} et l'immersion canonique de $\mathrm{T}_{\mathrm{S}_{n+1}}$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_{n+1}}$ ont même restriction à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}_n}$. **42**
Par Exp. III 2.5, il existe un élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_{n+1})$ tel que $g \times_{\mathrm{S}_{n+1}} \mathrm{S}_n = e$ et tel que $f_{n+1} = \mathrm{int}(g) \circ f'_{n+1}$ se restreigne à T_{n+1} suivant l'immersion canonique de T_{n+1}. Soit p_{n+1} la restriction de f_{n+1} à $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}_{n+1}}$. C'est un morphisme normalisé par $\mathrm{T}_{\mathrm{S}_{n+1}}$ avec le multiplicateur $\alpha_{\mathrm{S}_{n+1}}$, qui prolonge p_n.

On a donc construit un système cohérent (f_n) et il nous faut maintenant l'algébriser. Or on a :

Lemme 1.10. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})$, T *un* S*-tore, α un caractère non nul de* T, X *un* S*-schéma affine sur lequel* T *opère. Faisons opérer* T *sur* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ *par l'intermédiaire de α. Soit q un entier $\geqslant 0$, et soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ un système cohérent de morphismes*

$$f_n : \mathbb{G}^q_{a,\,\mathrm{S}_n} \longrightarrow \mathrm{X}_{\mathrm{S}_n}$$

d'objets à opérateurs $\mathrm{T}_{\mathrm{S}_n}$. *Il existe un unique morphisme d'objets à opérateurs* T

$$f : \mathbb{G}^q_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{X}$$

qui induise les f_n (comparer à Exp. IX 7.1).

Corollaire 1.11. — *Si* X *est un groupe à groupe d'opérateurs* T *et si les f_n sont des morphismes de groupes, f en est aussi un.*

Il suffit d'appliquer l'assertion d'unicité du lemme aux deux morphismes $\mathbb{G}^{2q}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{X}$ déduits de f à la manière habituelle.

Démonstration de 1.10. Supposons T déployé, ce qui d'ailleurs est le cas dans l'application de 1.10 à la démonstration de 1.5. On sait (Exp. I 4.7.3, remarque), que **43**
$\mathrm{X} \mapsto \mathscr{A}(\mathrm{X})$ réalise une équivalence de la catégorie des S-schémas affines munis d'une

opération de T et de la catégorie opposée à celle des S-algèbres graduées de type $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$.

On a donc des graduations

$$\mathrm{B} = \mathscr{A}(\mathrm{X}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathrm{B}_m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = \mathscr{A}(\mathbb{G}^q_{a,\,\mathrm{S}}) = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathrm{C}_m\,.$$

On voit aussitôt que chaque C_m est *libre de type fini* sur A. (En effet, on a $\mathrm{C}_m = 0$ si m n'est pas multiple de α, et si $m = d\,\alpha$, C_m est isomorphe au A-module des polynômes homogènes de degré d, à q variables). Posons

$$\widehat{\mathrm{B}}_m = \varprojlim_n \mathrm{B}_m \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})\,,$$
$$\widehat{\mathrm{C}}_m = \varprojlim_n \mathrm{C}_m \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^{n+1})\,,$$
$$\widehat{\mathrm{B}} = \textstyle\coprod_{m\in\mathrm{M}} \widehat{\mathrm{B}}_m, \qquad \widehat{\mathrm{C}} = \textstyle\coprod_{m\in\mathrm{M}} \widehat{\mathrm{C}}_m.$$

On a alors des morphismes canoniques d'algèbres graduées de type M

$$g_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \longrightarrow \widehat{\mathrm{B}} \qquad \text{et} \qquad g_{\mathrm{C}} : \mathrm{C} \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}.$$

Il résulte de la remarque faite plus haut que g_{C} est un *isomorphisme.* Se donner un système cohérent (f_n) comme dans l'énoncé est équivalent à se donner un morphisme de A-algèbres graduées

$$\widehat{\mathrm{F}} : \widehat{\mathrm{B}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}.$$

Trouver un morphisme f comme dans l'énoncé est équivalent à trouver un morphisme de A-algèbres graduées $\mathrm{F} : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "\mathrm{F}"] \arrow[d, "g_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{C} \arrow[d, "g_{\mathrm{C}}"] \\ \widehat{\mathrm{B}} \arrow[r, "\widehat{\mathrm{F}}"] & \widehat{\mathrm{C}}. \end{tikzcd}$$

Comme g_{C} est un isomorphisme, l'existence et l'unicité de F sont immédiates. Ceci prouve 1.10.

44 Pour achever la démonstration de 1.5, il ne reste donc qu'à prouver 1.9.

1.12. *Preuve de* 1.9. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Comme expliqué en 1.9, considérons $\mathfrak{g}$ comme un $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$-module. Il est clair que $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha}$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$, le quotient étant isomorphe à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ comme k-espace vectoriel et même comme T-module. Il est clair que $\mathbb{G}_{a,\,k}$ opère trivialement sur ce quotient qui est de dimension 1 (car tout morphisme de groupes de $\mathbb{G}_{a,\,k}$ dans $\mathbb{G}_{m,\,k}$ est trivial). De même $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est un sous-module de $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha}$, le quotient étant isomorphe à $\mathfrak{t}$ comme T-module, $\mathbb{G}_{a,\,k}$ y opérant trivialement. En résumé :

Lemme 1.13. — *Sous les conditions de* 1.9*,* $\mathfrak{g}$ *admet une suite de composition comme* $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$*-module dont les quotients successifs sont*

$$\mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^{\alpha},$$

considérés comme $(\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k})$*-modules grâce à la projection* $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{T}$.

On est donc ramené à calculer la cohomologie de $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}$ opérant par l'intermédiaire de la projection $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k} \to \mathrm{T}$ et du caractère β de T (ici $\beta = 0$, α ou $-\alpha$) sur $\mathrm{W}(k)$. [4] Notons $k[x_1,\dots,x_n]$ l'algèbre des polynômes sur k en n variables et $k_q[x_1,\dots,x_n]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré q.

Lemme 1.14. — *Avec les notations précédentes, on a* $\mathrm{H}^n(\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbb{G}_{a,\,k}, k) = \mathrm{H}^n(\mathrm{C}^*_{\alpha,\,\beta})$, *où le complexe* $\mathrm{C}^*_{\alpha,\,\beta}$ *est défini par* 45

$$\mathrm{C}^n_{\alpha,\,\beta} = \begin{cases} k_q[x_1,\dots,x_n] & \textit{si } \beta = q\alpha,\ \textit{avec } q\in\mathbb{N}^*;\\ 0 & \textit{sinon,}\end{cases}$$

et

$$\delta f(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) = f(x_2,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,\dots,x_ix_{i+1},\dots,x_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(x_1,\dots,x_n).$$

En effet, le foncteur $\mathrm{M}\mapsto \mathrm{H}^0(\mathrm{T},\mathrm{M})$ est exact sur la catégorie des T-modules (et les $\mathrm{H}^q(\mathrm{T},-)$ nuls), par Exp. I 5.3.2. Il en résulte, comme dans le cas habituel de la cohomologie des groupes, que $\mathrm{H}^n(\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbb{G}_{a\,k}, k)$ peut se calculer comme le n-ème groupe de cohomologie du complexe des cochaines de $\mathbb{G}_{a,\,k}$ dans k, invariantes par T, c'est-à-dire vérifiant

$$f\big(\alpha(t)x_1,\dots,\alpha(t)x_n\big) = \beta(t)f(x_1,\dots,x_n).$$

Cela donne bien le complexe annoncé.

Pour démontrer 1.9, il suffit donc de prouver que $\mathrm{H}^2(\mathrm{C}^*_{\alpha,\,\beta}) = 0$, pour $\beta = 0$, α, $-\alpha$, ce qui se fait immédiatement.

Remarque 1.15. — On peut calculer explicitement les groupes $\mathrm{H}^n(\mathrm{C}^*_{\alpha,\,\beta})$ pour $\beta = q\alpha$ (voir M. Lazard, Lois de groupes et analyseurs, Annales E.N.S., 1955). En particulier, on trouve $\mathrm{H}^n(\mathrm{C}^*_{\alpha,\,q\alpha}) = 0$ pour $n > q$.

Notations 1.16. — L'image de l'immersion canonique

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

sera notée Ω. C'est un ouvert de G contenant la section unité. L'image de

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}),\quad \text{resp. } \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}),\quad \text{resp. } \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T},\quad \text{resp. } \mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})$$

sera notée [5]

$$\mathrm{U}_{-\alpha},\quad \text{resp. } \mathrm{U}_{\alpha},\quad \text{resp. } \mathrm{U}_{-\alpha}\cdot\mathrm{T},\quad \text{resp. } \mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_{\alpha}.$$

Alors U_α (resp. $\mathrm{U}_{-\alpha}$) est un sous-groupe de G canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel et on a

$$\mathrm{int}(t)(x) = x^{\alpha(t)} \quad (\text{resp.}\quad x^{-\alpha(t)}),$$

[4] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[5] N.D.E. : On a remplacé $\mathrm{P}_{-\alpha}$ et P_α par $\mathrm{U}_{-\alpha}$ et U_α.

pour tous $S' \to S$, $t \in T(S')$, $x \in U_\alpha(S')$ (resp. $x \in U_{-\alpha}(S')$).

46 On a des isomorphismes canoniques

$$T \cdot U_\alpha \simeq T \cdot_\alpha U_\alpha \qquad \text{et} \qquad T \cdot U_{-\alpha} \simeq T \cdot_{-\alpha} U_{-\alpha}.$$

L'ouvert Ω est stable sous $\mathrm{int}(T)$: on a

$$\mathrm{int}(t')(y \cdot t \cdot x) = y^{-\alpha(t')} \cdot t \cdot x^{\alpha(t')}.$$

Corollaire 1.17. — *On a* $\mathscr{L}ie(U_\alpha/S) = \mathfrak{g}^\alpha$ *et* $\mathscr{L}ie(U_{-\alpha}/S) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$. *Les isomorphismes*

$$W(\mathfrak{g}^\alpha) \xrightarrow[\sim]{\exp} U_\alpha \qquad \textit{et} \qquad W(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \xrightarrow[\sim]{\exp} U_{-\alpha}$$

sont ceux de Exp. XIX 4.2.

Corollaire 1.18. — *L'ouvert* Ω *est* relativement schématiquement dense *dans* G (cf. XVIII, § 1).

Clair par Exp. XVIII, 1.3.

Corollaire 1.19. — *Le centre de* G *est* $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \mathrm{Ker}(\alpha)$. *C'est donc un sous-groupe fermé de* G*, de type multiplicatif et de type fini.*

La seconde assertion résulte de la première par Exp. IX 2.7. Prouvons donc celle-ci. L'automorphisme intérieur défini par une section de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ opère trivialement sur Ω (dernière formule de 1.16), donc sur G par 1.18. Réciproquement, si $g \in G(S)$ centralise G, alors il centralise T et U_α, donc est une section de T (Exp. XIX 2.8), qui annule α ; comme ceci se fait aussi après tout changement de base, on a bien $\underline{\mathrm{Centr}}(G) = \mathrm{Ker}(\alpha)$.

Corollaire 1.20. — *Pour qu'il existe un monomorphisme* $p_\alpha : \mathbb{G}_{a,S} \to G$ *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α*, il faut et il suffit que le* $\mathscr{O}_S$*-module* $\mathfrak{g}^\alpha$ *soit libre. Plus précisément, on a une bijection donnée par*

$$X_\alpha \mapsto \big(x \mapsto \exp(xX_\alpha)\big) \qquad \textit{et} \qquad p_\alpha \mapsto \mathscr{L}ie(p_\alpha)$$

entre $\Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et l'ensemble des monomorphismes* p_α *comme ci-dessus* (*qui est aussi l'ensemble des isomorphismes de schémas en groupes vectoriels* $\mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\sim} U_\alpha$). [6]

47 ***Corollaire 1.21***. — *Les sous-groupes* U_α *et* $U_{-\alpha}$ *de* G *ne commutent sur aucune fibre.*

En effet, si $(U_\alpha)_s$ et $(U_{-\alpha})_s$ commutent, Ω_s est un sous-groupe de G_s, donc $\Omega_s = G_s$ [7] et G_s est résoluble, ce qui contredit l'hypothèse que G_s est réductif de rang semi-simple 1.

[6] N.D.E. : En effet, d'une part, $\mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{a,S}) = \mathscr{O}_S$ et $\mathscr{L}ie(p_\alpha)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_S, \mathfrak{g}^\alpha) = \Gamma(S, \mathfrak{g}^\alpha)$.

[7] N.D.E. : d'après 1.18

2. Structure des systèmes élémentaires

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Il existe un morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathfrak{g}^{-\alpha} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}, \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle,$$

et un morphisme de S*-groupes*

$$\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

tels que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, et tous* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$*,* $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$ *on ait l'équivalence :*

$$\exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}) \in \Omega(\mathrm{S}') \Longleftrightarrow 1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}'),$$

et sous ces conditions on a la formule :

$$\boxed{(\mathrm{F}) \qquad \exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}) = \exp\left(\frac{\mathrm{Y}}{1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle}\right) \alpha^*(1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle) \exp\left(\frac{\mathrm{X}}{1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle}\right).}$$

De plus les morphismes $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$ *et* α^* *sont uniquement déterminés, le premier est un isomorphisme, donc met les modules* $\mathfrak{g}^{\alpha}$ *et* $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *en dualité, et on a* $\alpha \circ \alpha^* = 2$ (élévation au carré dans $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$).

Vu les assertions d'unicité du théorème, il suffit de faire la démonstration localement 48
sur S. On peut donc supposer $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ libres sur S. Prenons alors $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$ et posons $p_{\alpha}(x) = \exp(x\mathrm{X})$, $p_{-\alpha}(y) = \exp(y\mathrm{Y})$, pour x, $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Par 1.5 et 1.21, il suffit de prouver :

Proposition 2.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe,* T *un tore de* G*,* α *un caractère de* T *non trivial sur chaque fibre,* $p_{\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *(resp.* $p_{-\alpha} : \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$*) un monomorphisme de groupes normalisé par* T *avec le multiplicateur* α *(resp.* $-\alpha$*). On suppose que :*

(i) *Le morphisme* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ *défini par* $(y, t, x) \mapsto p_{-\alpha}(y)\, t\, p_{\alpha}(x)$ *est une immersion ouverte. On note* Ω *son image.*

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* $(p_{\alpha})_s(\mathbb{G}_{a,\,\kappa(s)})$ *et* $(p_{-\alpha})_s(\mathbb{G}_{a,\,\kappa(s)})$ *ne commutent pas.*

Alors, il existe $a \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ *et* $\alpha^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$*, uniquement déterminés avec les propriétés suivantes : pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* x*,* $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$*, on a*

$$p_{\alpha}(x)\, p_{-\alpha}(y) \in \Omega(\mathrm{S}') \Longleftrightarrow 1 + axy \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}'),$$

et, sous cette condition, on a la formule

$$p_{\alpha}(x)\, p_{-\alpha}(y) = p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1 + axy}\right)\, \alpha^*(1 + axy)\, p_{\alpha}\left(\frac{x}{1 + axy}\right).$$

De plus, a *est inversible (i.e.* $a \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$*) et* $\alpha \circ \alpha^* = 2$*.*

Démonstration :

A) Considérons le morphisme
$$\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$
49 défini par $(x, y) \mapsto p_\alpha(x)\, p_{-\alpha}(y)$. Soit U l'image inverse de Ω par ce morphisme. C'est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant $0 \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} 0$. Il existe donc des morphismes de S-schémas, uniquement déterminés,
$$\mathrm{A} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{C} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$
$$\mathrm{B} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T}$$
vérifiant la relation ensembliste :
$$p_\alpha(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(\mathrm{A}(u, v))\ \mathrm{B}(u, v)\ p_\alpha(\mathrm{C}(u, v)).$$
On a immédiatement les relations
$$\mathrm{A}(0, v) = v, \quad \mathrm{A}(u, 0) = 0, \qquad \mathrm{C}(u, 0) = u, \quad \mathrm{C}(0, v) = 0,$$
$$\mathrm{B}(u, 0) = \mathrm{B}(0, v) = e.$$

Soit S′ un S-schéma séparé et soit $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ un point de T. Comme $\Omega_{\mathrm{S}'}$ est stable par $\mathrm{int}(t)$, alors, d'après la dernière formule de 1.16, $\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est stable sous l'automorphisme $(x, y) \mapsto (\alpha(t)x, \alpha(t)^{-1}y)$ de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}'}$, et on a les relations :
$$\mathrm{A}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \alpha(t)^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{C}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \alpha(t)\mathrm{C}(u, v),$$
$$\mathrm{B}\big(\alpha(t)u, \alpha(t)^{-1}v\big) = \mathrm{B}(u, v).$$
Comme α est fidèlement plat, on en déduit que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est stable par la transformation $(x, y) \mapsto (zx, z^{-1}y)$ et que l'on a
$$\mathrm{A}(zu, z^{-1}v) = z^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{C}(zu, z^{-1}v) = z\mathrm{C}(u, v),$$
$$\mathrm{B}(zu, z^{-1}v) = \mathrm{B}(u, v).$$
Supposons d'abord que v soit inversible ; faisant $z = v$, on en déduit que si (u, v) est une section de U, alors $(uv, 1)$ en est aussi une et que l'on a
$$\mathrm{A}(uv, 1) = v^{-1}\mathrm{A}(u, v), \qquad \mathrm{B}(uv, 1) = \mathrm{B}(u, v).$$
Soit alors V l'ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par [(8)]
$$(u, v) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}') \Longleftrightarrow (u, v),\ (uv, 1) \text{ et } (1, uv) \text{ appartiennent à } \mathrm{U}(\mathrm{S}').$$
50 Comme U est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ contenant $0 \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} 0$, alors V est un voisinage de la section nulle de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ et on vient de voir que les morphismes
$$(u, v) \mapsto \mathrm{A}(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto v\mathrm{A}(uv, 1)$$
$$\text{resp.} \quad (u, v) \mapsto \mathrm{B}(u, v) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto \mathrm{B}(uv, 1)$$
coïncident dans $\mathrm{V} \cap (\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$. Comme $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, ces morphismes coïncident donc dans V.

(8) N.D.E. : On a rajouté la condition : « $(1, uv) \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ ».

On sait que $A(0,1) = 1$, il en résulte qu'il existe un ouvert W_1 de $\mathbb{G}_{a,\,S}$ contenant la section nulle, tel que pour toute section x de W_1, $A(x,1)$ soit inversible ; posant $A(x,1)^{-1} = F(x)$, on obtient que si $(u,v) \in V(S')$ [9] et $uv \in W_1(S')$, $S' \to S$, alors $A(u,v) = vA(uv,1) = vF(uv)^{-1}$. Raisonnant de même pour C, on obtient qu'il existe un ouvert W_2 de $\mathbb{G}_{a,\,S}$ contenant la section nulle, et un élément E [10] de $\mathscr{O}(W_2)^{\times}$, tels que $C(u,v) = uC(1,uv) = uE(uv)^{-1}$, si $(u,v) \in V(S')$ et $uv \in W_2(S')$. Par conséquent, posant $W = W_1 \cap W_2$, on obtient :

Il existe un ouvert W de $\mathbb{G}_{a,\,S}$ contenant la section nulle, et des S-morphismes

$$\begin{array}{lll} F : W \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\,S} & , & F(0) = 1, \\ H : W \longrightarrow T & , & H(0) = e, \\ E : W \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\,S} & , & G(0) = 1, \end{array}$$

tels que si $(u,v) \in V(S')$ et $uv \in W(S')$, $S' \to S$, on ait

$$(+) \qquad p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}(vF(uv)^{-1})\, H(uv)\, p_{\alpha}(uE(uv)^{-1}).$$

B) Utilisons maintenant l'associativité de G pour écrire

$$p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v)\, p_{-\alpha}(w) = p_{\alpha}(u)\, p_{-\alpha}(v+w).$$

Il existe un ouvert L de $\mathbb{G}^3_{a,\,S}$, contenant la section unité tel que $(u,v,w) \in L(S')$ soit équivalent à

$$\begin{array}{ccc} (u,v) \in V(S'), & (uE(uv)^{-1}, w) \in V(S'), & (u, v+w) \in V(S'), \\ uv \in W(S'), & uwE(uv)^{-1} \in W(S'), & u(v+w) \in W(S'). \end{array}$$

Utilisant alors la formule (+), on écrit aussitôt pour $(u,v,w) \in L(S')$ les relations :

(1) $E(uv+uw) = E(uwE(uv)^{-1})E(uv)$, 51

(2) $H(uv+uw) = H(uwE(uv)^{-1})H(uv)$,

(3) $(v+w)F(uv+uw)^{-1} = \alpha(H(uv)^{-1})\, w\, F(uwE(uv)^{-1})^{-1} + vF(uv)^{-1}$.

Il est immédiat sur la définition de L que $(1,0,0) \in L(S)$. Considérons donc

$$L \bigcap \Big(1 \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,\,S} \underset{S}{\times} \mathbb{G}_{a,\,S} \Big) = 1 \underset{S}{\times} M\,;$$

M est un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\,S}$, contenant la section $(0,0)$, et pour $(v,w) \in M(S')$, on a $v, wE(v)^{-1}, v+w \in W(S')$ et

(1′) $E(v+w) = E(wE(v)^{-1})\, E(v)$,

(2′) $H(v+w) = H(wE(v)^{-1})\, H(v)$,

(3′) $(v+w)\, F(v+w)^{-1} = \alpha(H(v))^{-1}\, wF(wE(v)^{-1})^{-1} + vF(v)^{-1}$.

[9] N.D.E. : ici et dans la suite, on a remplacé $U(S')$ par $V(S')$.

[10] N.D.E. : On a noté E l'élément noté G dans l'original, puisque G désigne déjà le S-groupe considéré.

Considérons enfin le morphisme de M dans $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini ensemblistement par $(v,w)\mapsto(v,w\mathrm{E}(v)^{-1})$. [11] Il conserve la section $(0,0)$ et induit un isomorphisme de M sur un ouvert N de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ contenant la section nulle (l'isomorphisme inverse étant donné par $(x,y)\mapsto(x,y\mathrm{E}(x))$) [12]. On a donc prouvé l'assertion suivante :

Il existe un ouvert N de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle, tel que si $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, alors x,y et $x+y\mathrm{E}(x)$ [13] appartiennent à $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$ et :

$(1'')$ $\mathrm{E}(x+y\mathrm{E}(x))=\mathrm{E}(x)\mathrm{E}(y)$,

$(2'')$ $\mathrm{H}(x+y\mathrm{E}(x))=\mathrm{H}(x)\mathrm{H}(y)$,

$(3'')$ $(x+y\mathrm{E}(x))\,\mathrm{F}(x+y\mathrm{E}(x))^{-1}=x\mathrm{F}(x)^{-1}+r(\mathrm{H}(x))^{-1}\,y\mathrm{E}(x)\mathrm{F}(y)^{-1}$.

C) En raisonnant de même avec l'associativité à gauche, on démontre l'assertion suivante : [14]

Il existe un ouvert N′ de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$, contenant la section nulle, tel que si $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, alors x,y et $x+y\mathrm{F}(x)$ [15] appartiennent à $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$, et

52 $(4'')$ $\mathrm{F}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}(y)$,

$(5'')$ $\mathrm{H}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}(y)$,

$(6'')$ $(x+y\mathrm{F}(x))\,\mathrm{E}(x+y\mathrm{F}(x))^{-1}=x\mathrm{E}(x)^{-1}+\alpha(\mathrm{H}(x))^{-1}\,y\mathrm{F}(x)\mathrm{E}(y)^{-1}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre « l'équation fonctionnelle » $(1'')$.

Lemme 2.3. — *Soient* S *un schéma,* W *un ouvert de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ *contenant la section unité,* $\mathrm{F}:\mathrm{W}\to\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ *un* S*-morphisme. On suppose que* $\mathrm{F}(0)=1$ *et qu'il existe un ouvert* N *de* $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ *contenant la section nulle tel que pour* $(x,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}')$, x,y *et* $x+y\mathrm{F}(x)$ [15] *appartiennent à* $\mathrm{W}(\mathrm{S}')$ *et que l'on ait :*

$$\mathrm{F}(x+y\mathrm{F}(x))=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}(y). \tag{†}$$

(i) *Si* S *est le spectre d'un corps* k*, il existe* $a\in k$ *tel que* $\mathrm{F}(x)=1+ax$.

(ii) *Si* $a=\mathrm{F}'(0)\in\Gamma(\mathrm{S},\mathscr{O}_\mathrm{S})$ *est* inversible*, alors* $\mathrm{F}(x)=1+ax$.

En vertu des hypothèses, nous pouvons dériver l'équation donnée pour $x=0$ (resp. pour $y=0$) et nous trouvons que

$$\mathrm{F}'(y)\,(1+y\mathrm{F}'(0))=\mathrm{F}'(0)\,\mathrm{F}(y)\qquad\text{pour }(0,y)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}'), \tag{$*$}$$

resp.

$$\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}'(0)\qquad\text{pour }(x,0)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}').$$

Comme F prend ses valeurs dans $\mathbb{G}_m$, la seconde relation nous donne

$$\mathrm{F}'(x)=\mathrm{F}'(0)\qquad\text{pour }(x,0)\in\mathrm{N}(\mathrm{S}'); \tag{$*'$}$$

---

[11] N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

[12] N.D.E. : c.-à-d., on a fait le « changement de variables » $x=v$, $y=w\mathrm{E}(v)^{-1}$, soit $v=x$, $w=y\mathrm{E}(x)$.

[13] N.D.E. : On a corrigé $y\mathrm{E}(x)$ en $x+y\mathrm{E}(x)$.

[14] N.D.E. : c.-à-d., on écrit les égalités résultant de $p_\alpha(t)\,p_\alpha(u)\,p_{-\alpha}(v)=p_\alpha(t+u)\,p_{-\alpha}(v)$ et l'on fait $v=1$ et $x=u$, $t=y\mathrm{F}(u)$ (i.e. $y=t\mathrm{F}(u)^{-1}$).

[15] N.D.E. : On a corrigé $y\mathrm{F}(x)$ en $x+y\mathrm{F}(x)$.

d'où, par la première

$$F'(0)(1 + yF'(0)) = F'(0)F(y) \qquad \text{pour } (y,0),\ (0,y) \in N(S').$$

Si $a = F'(0)$ est inversible, cela nous donne **53**

$$F(y) = 1 + ay,$$

pour y section d'un ouvert de W contenant la section unité, donc schématiquement dense dans W, ce qui prouve (ii). Cela prouve aussi (i) lorsque $F'(0) \neq 0$.

Si $F'(0) = 0$, alors, d'après $(*')$, $F'(x) = 0$ lorsque x est « voisin de 0 », donc $F' = 0$ par densité schématique. Si k est de caractéristique 0, F est une fraction rationnelle à dérivée nulle, donc constante et égale à $F(0) = 1$.

Si k est de caractéristique p, et si F n'est pas constante, [16] il existe un entier $n > 0$ et une fraction rationnelle $F_1 \in k(X)$ tels que $F_1'(X) \neq 0$ et

$$F(X) = F_1(X^{p^n}) = F_1(X)^{p^n}.$$

Reportant dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$(\dagger_1) \qquad F_1(x + yF_1(x)^{p^n}) = F_1(x)F_1(y).$$

Dérivant pour $x = 0$, on trouve

$$(*_1) \qquad F_1'(y) = F_1'(0)F_1(y),$$

et dérivant $(\dagger_1)$ pour $y = 0$, on obtient

$$(*_1') \qquad F_1'(x)F_1(x)^{p^n} = F_1(x)F_1'(0).$$

Comme, par hypothèse, $F_1'(X)$ est un élément inversible de $k(X)$, on déduit de ces deux égalités que

$$F_1(X)^{p^n} = 1,$$

donc F_1 est une constante, contredisant l'hypothèse de départ. Ceci montre que F est constante, et égale à $1 = F(0)$.

D) *Supposons que* S *soit le spectre d'un corps.* Si $F'(0) = 0$, alors $F = 1$. La formule $(5'')$ nous donne alors $H(x + y) = H(x)H(y)$, ce qui montre que H se prolonge en un morphisme de groupes $\mathbb{G}_{a,S} \to T$ (Exp. XVIII 2.3), qui est nécessairement constant de valeur e. D'autre part, d'après le lemme 2.3, on aura aussi $E(x) = 1 + bx$, pour un certain $b \in k$. Mais alors $(6'')$ donne, pour $(x,y) \in N(S')$,

$$(x + y)E(x + y)^{-1} = xE(x) + yE(y)^{-1},$$

donc, [17] d'après Exp. XVIII 2.3 à nouveau, $x \mapsto xE(x)^{-1}$ se prolonge en un morphisme de k-groupes $\mathbb{G}_{a,k} \to \mathbb{G}_{a,k}$, donc $x/(1 + bx) = cx$ pour un certain $c \in k$, d'où $b = 0$ (et $c = 1$).

Ceci montre que F, H, E sont constants de valeur $(1, e, 1)$, dans un voisinage de la section unité, donc partout, ce qui par (+) montre que U_α et $U_{-\alpha}$ commutent, contrairement à l'hypothèse (ii).

---

[16] N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

[17] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit. On peut aussi voir par un calcul direct que l'égalité précédente entraîne $0 = xyb(2 + (x + y)b)$, d'où $0 = b(2 + (x + y)b)$, et finalement $b = 0$.

54 *Si* S *est maintenant quelconque*, on a donc prouvé que $\mathrm{F}'(0)$ n'est nul sur aucune fibre, donc est inversible. Il en est évidemment de même pour $\mathrm{E}'(0)$, ce qui par le lemme 2.3, montre qu'il existe $a, b \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ tels que

$$(\diamondsuit_1) \qquad \mathrm{F}(x) = 1 + ax, \qquad \mathrm{E}(x) = 1 + bx, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathrm{W}(\mathrm{S}').$$

E) Le reste est maintenant facile. Reportant les résultats précédents dans $(3'')$, on trouve

$$y\,\alpha(\mathrm{H}(x))\,(1+ay) = y\Big(1 + ax + ay(1+bx)\Big)(1+bx).$$

Cette formule est valable pour toute section (x, y) de N. Mais comme $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}^2_{a,\mathrm{S}}$, on en déduit

$$(1+ay)\,\alpha(\mathrm{H}(x)) = \Big(1 + ax + ay(1+bx)\Big)(1+bx).$$

Faisant $y = 0$, cela donne $\alpha(\mathrm{H}(x)) = (1+ax)(1+bx)$. Reportant ceci dans l'égalité précédente, [18] on trouve

$$a^2xy = abxy.$$

Comme $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est schématiquement dense dans $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, on en déduit $a^2 = ab$, d'où, comme a est inversible,

$$(\diamondsuit_2) \qquad a = b \qquad \text{et} \qquad \alpha(\mathrm{H}(x)) = (1+ax)^2.$$

Comme a est inversible, $x \mapsto 1 + ax$ est un automorphisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$; on peut donc trouver un ouvert W' de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ contenant la section 1 et un morphisme

$$\mathrm{P} : \mathrm{W}' \longrightarrow \mathrm{T}$$

tel que $\mathrm{P}(1+ax) = \mathrm{H}(x)$. [19]

Reportant dans la relation $(2')$, on trouve aussitôt pour $(x, y) \in \mathrm{N}(\mathrm{S}')$,

$$\mathrm{P}(1 + ax + ay) = \mathrm{P}\left(\frac{1+ax+ay}{1+ax}\right)\mathrm{P}(1+ax),$$

ce qui prouve qu'il existe un voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ tel que l'on ait pour x et y dans ce voisinage $\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y) = \mathrm{P}(xy)$. En vertu de Exp. XVIII 2.3, il existe un morphisme de groupes

$$(\diamondsuit_3) \qquad \alpha^* : \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{T}$$

55 qui prolonge P. Comme $\alpha(\mathrm{H}(x)) = (1+ax)^2$ au voisinage de la section 0, on a $\alpha(\alpha^*(z)) = z^2$ au voisinage de la section 1, donc

$$(\diamondsuit_4) \qquad \alpha \circ \alpha^* = 2.$$

[18] N.D.E. : et tenant compte de ce que $1 + bx$ est inversible.
[19] N.D.E. : c.-à-d., on a fait le changement de variables $x' = 1 + ax$, soit $x = (x'-1)/a$.

F) [20] Rassemblant les résultats (+) et ($\diamondsuit_1$—$\diamondsuit_4$), on voit qu'il existe $a \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ et $\alpha^* \in \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}, \mathrm{T})$ tels que $\alpha \circ \alpha^* = 2$ et que, si $(u, v) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}')$ et $uv \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, alors $1 + auv$ est inversible et

$$p_\alpha(u)\, p_{-\alpha}(v) = p_{-\alpha}\left(\frac{v}{1+auv}\right)\ \alpha^*(1+auv)\ p_\alpha\left(\frac{u}{1+auv}\right).$$

Considérons l'ouvert V' de $\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}}$ défini par « $1 + auv$ inversible », i.e. $\mathrm{V}' = (\mathbb{G}^2_{a,\,\mathrm{S}})_f$ où $f(u, v) = 1 + auv$. Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de V' dans G qui coïncident dans un voisinage de la section 0, donc coïncident dans V'. La formule précédente est donc valable pour toute section (u, v) de V'. Il en résulte en particulier que $\mathrm{V}' \subset \mathrm{U}$, où U est l'ouvert introduit au début de **A)**.

Prouvons que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$. Revenant aux notations de **A)**, on a un morphisme

$$\mathrm{A} : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

qui, sur V', est défini par $\mathrm{A}(u, v) = v(1+auv)^{-1}$. Pour montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$, ce qui est une question ensembliste, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps k, donc à l'assertion évidente suivante : l'ensemble de définition de l'application rationnelle $\mathbb{G}^2_{a,\,k} \to \mathbb{G}_{a,\,k}$ définie par la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{Y}}{1 + a\mathrm{XY}}$ est l'ouvert défini par la fonction $1 + a\mathrm{XY}$.

G) On a donc démontré l'existence de a et de α^*, ainsi que les deux propriétés supplémentaires annoncées. Reste à prouver l'unicité. Soient donc a' et $\alpha^{*\prime}$, vérifiant 56
aussi les conditions exigées. Si $u, v \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}')^2$, on a aussitôt :

$$1 + auv \text{ inversible } \Rightarrow 1 + a'uv \text{ inversible et } \frac{v}{1+auv} = \frac{v}{1+a'uv}\,;$$

on a donc pour toute section u de $\mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$

$$1 + au \quad \text{inversible} \implies 1 + au = 1 + a'u,$$

ce qui prouve aussitôt $a = a'$.

Avec les mêmes notations, on a alors

$$1 + au \quad \text{inversible} \implies \alpha^*(1 + au) = \alpha^{*\prime}(1 + au),$$

donc également $\alpha^* = \alpha^{*\prime}$.

Corollaire 2.4. — *Soient* $\exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X})$ *et* $\exp(\mathrm{Y}')\, t' \exp(\mathrm{X}')$ *deux éléments de* $\Omega(\mathrm{S}')$. *Alors leur produit est dans* $\Omega(\mathrm{S}')$ *si et seulement si* $u = 1 + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}' \rangle$ *est inversible, et on a alors*

$$(\mathrm{F}')\quad \exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X}) \cdot \exp(\mathrm{Y}')\, t' \exp(\mathrm{X}') = \\ \exp(\mathrm{Y} + u^{-1}\alpha(t)^{-1}\mathrm{Y}') \cdot tt'\alpha^*(u) \cdot \exp(u^{-1}\alpha(t')^{-1}\mathrm{X} + \mathrm{X}').$$

[20] N.D.E. : On a légèrement modifié ce qui suit, car un ouvert V a déjà été introduit en **A)**.

Remarque 2.5. — On peut aussi écrire la formule (F) du théorème 2.1 sans faire intervenir les morphismes exp. En effet, transportant par ces morphismes la dualité $\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on obtient un accouplement canonique de fibrés vectoriels :

$$\mathrm{U}_{\alpha} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{U}_{-\alpha} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}},$$

que nous noterons encore $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On a donc

$$\langle \exp \mathrm{X}, \exp \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle.$$

Si $x \in \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{S}')$, $y \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$ et si $1 + \langle x, y\rangle \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, on a

$$\text{(F)} \qquad x \cdot y = y^{(1+\langle x,y\rangle)^{-1}} \cdot \alpha^*(1 + \langle x, y\rangle) \cdot x^{(1+\langle x,y\rangle)^{-1}}.$$

Corollaire 2.6. — *L'accouplement*

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$$

57 *définit un accouplement de fibrés principaux sous* $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}.$$

Cet accouplement sera noté $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$, *ou plus simplement* $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY}$.

Pour toute section $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$, *il existe donc une unique section* X^{-1} *de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$ *telle que* $\mathrm{XX}^{-1} = 1$. *On a* $(z\mathrm{X})^{-1} = z^{-1}\mathrm{X}^{-1}$. *Le morphisme*

$$s : \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \longrightarrow \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$$

ainsi défini est donc un isomorphisme de schémas, compatible avec l'isomorphisme $s : z \mapsto z^{-1}$ *sur les groupes d'opérateurs.*

Définition 2.6.1. — On dira que X et $s(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{-1}$ sont *appariés.*

Appliquons le corollaire 2.4 à $\mathrm{Y} = 0 = \mathrm{X}'$ et $\mathrm{Y}' = a\mathrm{X}^{-1}$, $a \in \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S})$. Alors $u = 1 + a$ et $u^{-1}\mathrm{Y}' = u^{-1}(u-1)\mathrm{X}^{-1} = (1-u^{-1})\mathrm{X}^{-1}$, d'où :

Corollaire 2.7. — *Soient* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$ *et* $u \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times}$. *On a*

$$\alpha^*(u) = \exp\big((u^{-1}-1)\mathrm{X}^{-1}\big)\exp(\mathrm{X})\exp\big((u-1)\mathrm{X}^{-1}\big)\exp(-u^{-1}\mathrm{X}).$$

Définition 2.8. — Le morphisme α^* est appelé la *coracine associée à la racine* α.

Remarque 2.9. — Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ est un S-système élémentaire, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, -\alpha)$ en est aussi un. On a donc par le théorème 2.1 une dualité entre $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{\alpha}$, et une coracine $(-\alpha)^*$. Prenant l'inverse de la formule (F), on prouve aussitôt

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{Y}, \mathrm{X}\rangle, \qquad (-\alpha)^* = -\alpha^*.$$

Passons maintenant à l'algèbre de Lie de G. La racine α et la coracine α^* définissent les formes linéaires

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\overline{\alpha}^*} \mathfrak{t} \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}.$$

58 On notera $\mathrm{H}_{\alpha} = \overline{\alpha}^*(1)$. On appelle $\overline{\alpha}$ la *racine infinitésimale* associée à α, et H_{α} la *coracine infinitésimale* correspondante.

Lemme 2.10. — *Soient* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{H} \in \mathrm{W}(\mathfrak{t})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y}, \mathrm{Y}' \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$. *On a*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Ad}(t)\mathrm{H} = \mathrm{H}, \qquad \mathrm{Ad}(t)\mathrm{X} = \alpha(t)\mathrm{X}, \qquad \mathrm{Ad}(t)\mathrm{Y} = \alpha(t)^{-1}\mathrm{Y}.$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\mathrm{H} = \mathrm{H} - \overline{\alpha}(\mathrm{H})\mathrm{X}, \qquad \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\mathrm{X}' = \mathrm{X}', \\ \qquad \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\mathrm{Y} = \mathrm{Y} + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \mathrm{H}_{\alpha} - \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \mathrm{X}. \end{cases}$$

$$\text{(2}'\text{)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{Y}))\mathrm{H} = \mathrm{H} + \overline{\alpha}(\mathrm{H})\mathrm{Y}, \qquad \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{Y}))\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}', \\ \qquad \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{Y}))\mathrm{X} = \mathrm{X} + \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \mathrm{H}_{-\alpha} - \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \mathrm{Y}. \end{cases}$$

$$\text{(3)} \qquad [\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \overline{\alpha}(\mathrm{H})\mathrm{X}, \qquad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -\overline{\alpha}(\mathrm{H})\mathrm{Y}, \qquad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle \mathrm{H}_{\alpha}.$$

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{H}_{-\alpha} = -\mathrm{H}_{\alpha}.$$

$$\text{(5)} \qquad \overline{\alpha}(\mathrm{H}_{\alpha}) = 2.$$

Le démonstration de ces différentes formules est soit triviale, soit conséquence immédiate de la formule (F) de 2.1.

Corollaire 2.11. — *Supposons* H_{α} *non nul sur toute fibre* (ce qui est en particulier le cas si 2 est inversible sur S, par (5)). *Alors* $\mathrm{X}_{\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}$ *et* $\mathrm{X}_{-\alpha} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}$ *sont appariés si et seulement si* $[\mathrm{X}_{\alpha}, \mathrm{X}_{-\alpha}] = \mathrm{H}_{\alpha}$.

2.12. Soit $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ un S-système élémentaire. Nous savons (1.19) que le centre de G est $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(\alpha)$, groupe de type multiplicatif et de type fini. Si Q est un sous-groupe de type multiplicatif de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$, le quotient G/Q est affine sur S (Exp. IX 2.5), lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9.2) à fibres connexes et réductives de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 1.8). 59

Posons $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Q}$, c'est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 ; $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Q}$ en est un tore maximal. L'ouvert $\mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$ de G est stable par Q et on voit aussitôt que le quotient est isomorphe à $\mathrm{U}_{-\alpha} \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{T}/\mathrm{Q}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}_{\alpha}$. Si on note α' le caractère de T' induit par α, il en résulte que le morphisme dérivé du morphisme canonique $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ induit des isomorphismes

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{-\alpha'}.$$

En particulier, α' est une racine de G' par rapport à T'. Donc, notant α/Q le caractère $\mathrm{T}/\mathrm{Q} \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ induit par α, on a :

Lemme 2.13. — *Si* Q *est un sous-groupe de type multiplicatif de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$, *alors*

$$(\mathrm{G}/\mathrm{Q}, \mathrm{T}/\mathrm{Q}, \alpha/\mathrm{Q})$$

est un système élémentaire.

Lemme 2.14. — *Sous les conditions précédentes, les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha}) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \arrow[l, "\exp"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] \\
\mathrm{W}(\mathfrak{g}'^{\alpha'}) \arrow[r, "\exp"] & \mathrm{G}' & \mathrm{W}(\mathfrak{g}'^{-\alpha'}) \arrow[l, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^{\alpha} \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{can}"', "\wr"] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathfrak{g}'^{\alpha'} \otimes \mathfrak{g}'^{-\alpha'} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}_{\mathrm{S}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{T} \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\mathrm{can}"] & \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[ur, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\alpha'^*"'] & & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \\
& \mathrm{T}' \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd} .$$

3. Le groupe de Weyl

60 ***Notations 3.0***. — [21] Si $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ est un S-système élémentaire, on notera

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{W} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T},$$

(cf. Exp. XIX 6.3) ; N est un sous-groupe fermé de G, lisse sur S. On notera $\mathrm{N}^{\times} = \mathrm{N} - \mathrm{T}$ le sous-schéma ouvert de N induit sur le complémentaire de T. [22] Notons R le tore maximal (unique) de $\mathrm{Ker}(\alpha)$, et T′ l'image de $\alpha^* : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, qui est un sous-tore de dimension 1 de T.

Le morphisme

$$\mathrm{T}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{T}$$

induit par le produit dans T est surjectif (donc fidèlement plat) ; en effet, on est ramené à le vérifier sur les fibres géométriques, et cela résulte aussitôt de la formule $\alpha \circ \alpha^* = 2$.

Théorème 3.1. — *Avec les notations précédentes :*

(i) W *est isomorphe au groupe constant* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$.

---

[21] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.0, pour des références ultérieures.

[22] N.D.E. : On a remplacé Q par la notation $\mathrm{N}^{\times}$, plus suggestive.

(ii) $N^{\times}$ *est un fibré principal homogène localement trivial sous* T*, à gauche par la loi* $(t,q) \mapsto tq$ *(resp. à droite par la loi* $(q,t) \mapsto qt$*).*

(iii) *On a la formule*

$$\mathrm{int}(w)t = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})$$

pour $w \in N^{\times}(S')$*,* $t \in T(S')$*,* $S' \to S$*. Dans la décomposition* $T_{S'} = T'_{S'} \cdot R_{S'}$*,* $\mathrm{int}(w)$ *induit l'identité sur* $R_{S'}$ *et la symétrie sur* $T'_{S'}$*. On a les relations* 61

$$\alpha \circ \mathrm{int}(w) = \alpha^{-1}, \qquad \mathrm{int}(w) \circ \alpha^* = (\alpha^*)^{-1}.$$

(iv) *Pour* $X \in W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(S')$*,* $S' \to S$*, posons*

$$w_{\alpha}(X) = \exp(X)\exp(-X^{-1})\exp(X).$$

Alors $w_{\alpha}(X) \in N^{\times}(S')$ *et le morphisme* $w_{\alpha} : W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times} \to N^{\times}$ *ainsi défini vérifie*

$$w_{\alpha}(zX) = \alpha^*(z)\, w_{\alpha}(X) = w_{\alpha}(X)\, \alpha^*(z)^{-1},$$

pour $z \in \mathbb{G}_m(S')$*,* $X \in W(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(S')$*,* $S' \to S$*.*

(v) *On a la relation*

$$w_{\alpha}(X)\, w_{\alpha}(Y) = w_{\alpha}(-XY^{-1}).$$

En particulier,

$$w_{\alpha}(X)^2 = \alpha^*(-1) \in {}_2T(S) \cap \underline{\mathrm{Centr}}(G)(S),$$
$$w_{\alpha}(X)^{-1} = w_{\alpha}(-X) = \alpha^*(-1)\, w_{\alpha}(X).$$

(vi) *Si on définit de même pour* $Y \in W(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(S')$*,*

$$w_{-\alpha}(Y) = \exp(Y)\exp(-Y^{-1})\exp(Y),$$

on a (en plus des formules analogues aux précédentes)

$$w_{-\alpha}(X^{-1}) = w_{\alpha}(X)^{-1} = w_{\alpha}(-X),$$
$$w_{\alpha}(X)\, w_{-\alpha}(Y) = \alpha^*(XY).$$

Démonstration. (i) a déjà été vu en Exp. XIX 2.4 ; il en résulte aussitôt que $N^{\times}$ est bien un fibré principal homogène sous T pour les lois définies dans (ii) ; le fait qu'il soit localement trivial [(23)] résulte notamment de (iv). 62

Démontrons (iii) ; si $w \in N^{\times}(S)$, il est clair que $\alpha \circ \mathrm{int}(w)$ est une racine de G par rapport à T, qui est donc localement égale à α où $-\alpha$; comme sur chaque fibre c'est $-\alpha$ (*Bible*, 12-05, démonstration du cor. à la prop. 1), on a $\alpha \circ \mathrm{int}(w) = -\alpha$. Par transport de structure, on en déduit

$$-\alpha^* = \mathrm{int}(w)^{-1} \circ \alpha^* = \mathrm{int}(w) \circ \alpha^*,$$

car $\mathrm{int}(w)^2 = \mathrm{int}(w^2)$ et w^2 est une section de T. Donc $\mathrm{int}(w)$ induit la symétrie sur T′ ; comme R est central, $\mathrm{int}(w)$ induit l'identité sur R. La formule de (iii) définit un morphisme $T \to T$ qui vérifie les mêmes propriétés, donc coïncide avec $\mathrm{int}(w)$.

[(23)] N.D.E. : pour la topologie de Zariski.

Démontrons (iv). On a successivement

$$\begin{aligned} w_\alpha(\mathrm{X})\, t\, w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X})\, t\, \exp(-\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}^{-1})\exp(-\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}-\alpha(t)\mathrm{X})\exp(\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}^{-1})\exp(-\alpha(t)\mathrm{X})\, t. \end{aligned}$$

Par application de la formule (F), on a

$$\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp\big((1-\alpha(t))\mathrm{X}\big) = \exp\big((\alpha(t)^{-1}-1)\mathrm{X}\big)\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\,\exp\big(-\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}^{-1}\big).$$

Reportant dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))\, t &= \exp\big(\alpha(t)^{-1}\mathrm{X}\big)\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\,\exp(-\alpha(t)\mathrm{X})\, t \\ &= \exp(a\mathrm{X})\,\alpha^*(\alpha(t)^{-1})\, t, \end{aligned}$$

où

$$a = \alpha(t)^{-1} - (\alpha\circ\alpha^*)(\alpha(t)^{-1})\,\alpha(t),$$

mais $\alpha\circ\alpha^* = 2$, ce qui donne aussitôt $a=0$ et $w_\alpha(\mathrm{X}) \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$.

Prouvons maintenant la seconde assertion de (iv). On a [(24)]

$$\begin{aligned} \alpha^*(z)\, w_\alpha(\mathrm{X}) &= \exp(z^2\mathrm{X})\exp(-z^{-2}\mathrm{X}^{-1})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp\big((z^2-z)\mathrm{X}\big)\exp(-z^{-2}\mathrm{X}^{-1})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp(-z^{-1}\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(z)^{-1}\exp((z^3-z^2)\mathrm{X})\exp(z^2\mathrm{X})\,\alpha^*(z) \\ &= \exp(z\mathrm{X})\exp(-z^{-1}\mathrm{X}^{-1})\exp(z\mathrm{X}) = w_\alpha(z\mathrm{X}). \end{aligned}$$

63 Prouvons (v). En vertu du résultat précédent, la première formule de (v) résulte aussitôt de la seconde ; prouvons celle-ci :

$$\begin{aligned} w_\alpha(\mathrm{X})^2 &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(2\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(-1)\exp(-2\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}) \\ &= \exp(\mathrm{X})\,\alpha^*(-1)\exp(-\mathrm{X}) = \alpha^*(-1), \end{aligned}$$

car $\alpha(\alpha^*(-1)) = (-1)^2 = 1$, ce qui prouve que $\alpha^*(-1) \in \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$.

Prouvons enfin (vi). La première assertion est un cas particulier de la seconde, démontrons celle-ci. Les deux membres de cette formule définissent des morphismes de $\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$ dans G. Pour prouver qu'ils coïncident, il suffit de le faire sur un ouvert non vide sur chaque fibre (Exp. XVIII 1.4) ; il suffit donc de vérifier la

(24) N.D.E. : La première égalité découle de 1.5 (i) qui, combiné avec l'égalité $\alpha\circ\alpha^* = 2$, donne les formules

$$(\dagger)\qquad \alpha^*(z)\,\exp(\mathrm{X})\,\alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^2\mathrm{X}), \qquad \alpha^*(z)\exp(\mathrm{X}^{-1})\,\alpha^*(z)^{-1} = \exp(z^{-2}\mathrm{X}),$$

la troisième égalité découle de la formule (F), et la quatrième de (†), à nouveau. Enfin, un calcul analogue montre que $w_\alpha(\mathrm{X})\,\alpha^*(z^{-1}) = w_\alpha(z\mathrm{X})$.

relation lorsque $1 + \mathrm{XY}$ est inversible. On a alors successivement :

$$w_\alpha(\mathrm{X})\, w_{-\alpha}(\mathrm{Y}) = \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp(\mathrm{X})\exp(\mathrm{Y})\exp(-\mathrm{Y}^{-1})\exp(\mathrm{Y})$$
$$= \exp(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}^{-1})\exp\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{XY}}\right)\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(-\mathrm{Y}^{-1})\exp(\mathrm{Y})$$
$$= \exp(\mathrm{X})\exp\left(\frac{-\mathrm{X}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})$$
$$= \exp(-\mathrm{X}^{-2}\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*\left(\frac{\mathrm{XY}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{X}+\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*(1+\mathrm{XY})\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})$$
$$= \exp(-\mathrm{X}^{-2}\mathrm{Y}^{-1})\,\alpha^*(\mathrm{XY})\exp\left(\frac{\mathrm{Y}^{-1}+\mathrm{X}}{(1+\mathrm{XY})^2}\right)\exp\left(\frac{-\mathrm{Y}^{-1}}{1+\mathrm{XY}}\right)\exp(\mathrm{Y})$$
$$= \alpha^*(\mathrm{XY})\exp(-\mathrm{Y})\exp(\mathrm{Y}) = \alpha^*(\mathrm{XY}).$$

Corollaire 3.2. — *Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Pour tout $w \in \mathrm{G(S)}$, les conditions suivantes sont équivalentes :* 64

(i) $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S})$,

(ii) *on a* $\mathrm{int}(w) \circ n\alpha^* = -n\alpha^*$ (on rappelle que $(n\alpha^*)(z) = \alpha^*(z)^n$).

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) (assertion (iii) du théorème 3.1) ; réciproquement, on peut supposer que $\mathrm{N}^\times$ possède une section et on est ramené à prouver :

Lemme 3.3. — *On a* $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(n\alpha^*) = \mathrm{T}$ *pour* $n \neq 0$.

En effet, l'image T' de $n\alpha^*$ est un sous-tore de G. Il en résulte (Exp. XIX 2.8) que $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(n\alpha^*)$ est un sous-groupe réductif de G, contenant T. Comme sur chaque fibre on a $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) \neq \mathrm{G}_{\overline{s}}$, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) = \mathrm{T}_{\overline{s}}$ (Exp. XIX 1.6.3 [(25)]), donc $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(n\alpha^*) = \mathrm{T}$, car il s'agit de sous-groupes lisses de G.

Remarque 3.4. — La construction de w_α et le fait que $w_\alpha(\mathrm{X})$ normalise T ne s'appuient que sur la formule (F). En particulier, si G est un S-groupe vérifiant les conditions de 2.2, $\underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ est différent de T sur chaque fibre. Il en résulte que si G est un S-groupe affine à fibres connexes vérifiant les conditions de 2.2, il est *réductif* de rang semi-simple 1. En effet, il est lisse au voisinage de la section unité, donc lisse et on peut appliquer le critère de Exp. XIX 1.11.

3.5. Avant d'énoncer le théorème suivant, faisons quelques remarques. Nous identifions comme d'habitude $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ à $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes -1}$. De même, nous identifierons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha)$ à $(\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}$ et donc 65

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha}), \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)) \simeq \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times.$$

Si $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{Ad}(w)$ permute $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ (3.1, (iii)), donc définit un isomorphisme :

$$a_\alpha(w) : \mathfrak{g}^{-\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\alpha,$$

(25) N.D.E. : L'hypothèse $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) \neq \mathrm{G}_{\overline{s}}$ entraîne que $\dim \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(n\alpha^*_{\overline{s}}) - \dim \mathrm{T}_{\overline{s}} < 2$, or cette différence est paire, d'après *loc. cit.*

que nous identifierons donc à une section $a_\alpha(w) \in \Gamma(\mathrm{S}, (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2})^\times$. Cette construction est compatible avec le changement de base et définit donc un morphisme

$$a_\alpha : \mathrm{N}^\times \longrightarrow \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times,$$

tel que $a_\alpha(w)\mathrm{Y} = \mathrm{Ad}(w)\mathrm{Y}$ pour tous $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha})^\times$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Théorème 3.6. — (i) *On a*

$$\mathrm{int}(w)\exp(\mathrm{Y}) = \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y})$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $w \in \mathrm{N}^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$.

(ii) *On a*

$$a_\alpha(tw) = \alpha(t)\, a_\alpha(w), \qquad a_\alpha(wt) = \alpha(t)^{-1}\, a_\alpha(w).$$

(iii) *Si on définit de même* $a_{-\alpha} : \mathrm{N}^\times \to \mathrm{W}((\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes 2})^\times$, *on a*

$$a_{-\alpha}(w) = a_\alpha(w)^{-1}. \qquad {}^{(26)}$$

(iv) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *on a*

$$a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X})) = -\mathrm{X}^2.$$

66 L'assertion (i) est triviale, par la caractérisation des morphismes exp donnée en 1.5. L'assertion (ii) est immédiate, ainsi que (iii). Prouvons (iv) : soient $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$, $\mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)$; on a par définition [27]

$$a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X}))^{-1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{Ad}(w_\alpha(\mathrm{X}))(\mathrm{Z}) = \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\,\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{X}^{-1}))\,\mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))(\mathrm{Z}).$$

Appliquant les formules (2′) et (2) du lemme 2.10, ainsi que les égalités $\mathrm{H}_{-\alpha} = -\mathrm{H}_\alpha$, $\overline{\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = 2$ (*loc. cit.* (4) et (5)) et $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}\rangle = 1$ (2.6), on obtient que le terme de droite égale, successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\,\mathrm{Ad}(\exp(-\mathrm{X}^{-1}))(\mathrm{Z}) &= \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{X}))\big(\mathrm{Z} + \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle(\mathrm{H}_\alpha - \mathrm{X}^{-1})\big)\\ &= \mathrm{Z} + \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle(\mathrm{H}_\alpha - 2\mathrm{X} - \mathrm{X}^{-1} - \mathrm{H}_\alpha + \mathrm{X})\\ &= \mathrm{Z} - \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X} - \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}^{-1}.\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Z} = \langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}$ et $\langle \mathrm{X}^{-1}, \mathrm{Z}\rangle\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^{-2}\mathrm{Z}$, donc ceci montre que $a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X}))^{-1} = -\mathrm{X}^{-2}$, d'où $a_\alpha(w_\alpha(\mathrm{X})) = -\mathrm{X}^2$.

Corollaire 3.7. — *On a en particulier*

$$\mathrm{int}(w_\alpha(\mathrm{X}))\exp(\mathrm{X}) = \exp(-\mathrm{X}^{-1}),$$

d'où (*par la définition de* $w_\alpha(\mathrm{X})$) :

$$w_\alpha(\mathrm{X})\exp(\mathrm{X})\,w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} = \exp(-\mathrm{X})\,w_\alpha(\mathrm{X})\exp(-\mathrm{X}),$$

soit, par un calcul immédiat

$$\big(w_\alpha(\mathrm{X})\exp(\mathrm{X})\big)^3 = e.$$

Corollaire 3.8. — *Soient* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^\alpha)^\times$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. *Alors* $w_\alpha(\mathrm{X})$ *est l'unique section* $w \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *qui vérifie*

[26] N.D.E. : c.-à-d., $a_{-\alpha}(w)$ et $a_{-\alpha}(w)$ sont *appariés*, cf. 2.6.1.
[27] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(i) $\mathrm{int}(w) \circ n\alpha^* = -n\alpha^*$.

(ii) $(w \exp(\mathrm{X}))^3 = e$.

On sait que $w_\alpha(\mathrm{X})$ vérifie bien ces conditions. Réciproquement, soit $w \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ **67**
vérifiant (i) et (ii). Par 3.2 et 3.1 (ii), on sait qu'il existe $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$ tel que $w = w_\alpha(\mathrm{X})\, t$. Posons $u = \exp(\mathrm{X})$. On a alors

$$w\, u\, w^{-1} = w_\alpha(\mathrm{X})\, t \exp(\mathrm{X})\, t^{-1}\, w_\alpha(\mathrm{X})^{-1} = \exp(-\alpha(t)\mathrm{X}^{-1}),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} u^{-1} w\, u^{-1} &= \exp(-\mathrm{X})\, w_\alpha(\mathrm{X})\, t \exp(-\mathrm{X}) \\ &= \exp(-\mathrm{X})\, w_\alpha(\mathrm{X}) \exp(-\mathrm{X}) \exp(\mathrm{X} - \alpha(t)\mathrm{X})\, t \\ &= \exp(-\mathrm{X}^{-1}) \exp\big(\mathrm{X} - \alpha(t)\mathrm{X}\big)\, t = \exp(-\mathrm{X}^{-1})\, t \exp(\mathrm{H}). \end{aligned}$$

Or $(wu)^3 = e \Leftrightarrow w\, u\, w^{-1} = u^{-1} w\, u^{-1}$; comparant les deux décompositions de cet élément sur $\mathrm{U}_{-\alpha} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_\alpha$, on en tire $t = e$.

Remarque 3.9. — On peut résumer un certain nombre des résultats de ce numéro par le diagramme suivant de fibrés principaux homogènes (à gauche)

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times \xrightarrow{w_\alpha} \mathrm{N}^\times \xrightarrow{a_\alpha} \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes 2}\big)^\times$$

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}\ .$$

Remarquons que a_α *est fidèlement plat* (α l'étant) et que w_α est un *monomorphisme* si et seulement si α^* est un *monomorphisme.* Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les diagrammes correspondants pour les structures de fibrés principaux à droite, ainsi que les diagrammes du même genre pour la racine $-\alpha$, et d'étudier les relations entre ces différents diagrammes.

Lemme 3.10. — *Soient* S *un schéma,* q *un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *définisse un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$*,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *et* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \alpha')$ *deux* S*-systèmes élémentaires,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ **68**
un morphisme de S*-groupes. Soient*

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

un isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules et*

$$h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

l'isomorphisme contragrédient. Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$*, on suppose :*

$$f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q)).$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(\alpha^*(z)) = \alpha'^*(z)^q$.

(ii) $f(w_\alpha(\mathrm{Z})) = w_{\alpha'}(h(\mathrm{Z}^q))$.

(iii) $f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q))$.

(Chaque condition doit se lire : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $z \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Z} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)^\times(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$, on a ...).

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) par 3.8, (ii) $\Rightarrow$ (iii) par 3.7, (iii) $\Rightarrow$ (i) par 2.7.

Proposition 3.11. — *Soient* S *un schéma,* $a \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, *tel que* $x \mapsto x^q$ *définisse un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *et* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \alpha')$ *deux* S*-systèmes élémentaires,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* S*-groupes. Les conditions suivantes sur* f *sont équivalentes :*

(i) *La restriction de* f *à* T *se factorise en un morphisme* $f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_{\mathrm{T}}"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "q"'] \\ \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha'^*"] & \mathrm{T}' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}. \end{tikzcd}$$

69 (ii) *Il existe un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules* (unique)

$$h : (\mathfrak{g}^{\alpha})^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'}$$

tel que $f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q))$, $f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^{\vee}(\mathrm{Y}^q))$ *pour tous* $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (*il en résulte que* f *vérifie également les conditions équivalentes de* 3.10).

On a (ii) $\Rightarrow$ (i). En effet, par 3.10, la condition (ii) entraîne $f \circ \alpha^* = q\,\alpha'^*$ donc, par 3.3, $f|_{\mathrm{T}}$ se factorise par T′. Reste à prouver $\alpha'(f(t)) = \alpha(t)^q$, ce qui résulte aussitôt du fait que f induit un morphisme de groupes $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha} \to \mathrm{T}' \cdot \mathrm{U}_{\alpha'}$.

Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha})$, $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha})$. Posons $p_+(x) = f(\exp(x\mathrm{X}))$ et $p_-(x) = f(\exp(y\mathrm{Y}))$, ce sont des morphismes de groupes

$$p_+,\ p_- : \quad \mathbb{G}_{a,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(\alpha'^*(z))^q(p_+(x)) &= \operatorname{int}\big((f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z))\big)\big(f(\exp(x\mathrm{X}))\big) \\ &= f\big(\operatorname{int}(\alpha^*(z))(\exp(x\mathrm{X}))\big) \\ &= f(\exp(z^2 x\mathrm{X})) = p_+(z^2 x). \end{aligned}$$

Appliquant le lemme 1.2 (avec $\mathrm{Q} = \alpha'^*(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$), on en déduit qu'il existe une section $\mathrm{X}' \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{\alpha'})$ telle que

$$f(\exp(x\mathrm{X})) = p_+(x) = \exp(x^q\mathrm{X}').$$

De même, il existe une section $\mathrm{Y}' \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathfrak{g}^{-\alpha'})$ telle que

$$f(\exp(y\mathrm{Y})) = \exp(y^q\mathrm{Y}').$$

Écrivant maintenant que f est un morphisme de groupes, donc qu'il respecte la formule (F), on obtient aussitôt

$$\mathrm{X}^q\mathrm{Y}^q = (\mathrm{X}\mathrm{Y})^q = \mathrm{X}'\mathrm{Y}'.$$

70 On en conclut aisément que $\mathrm{X}^q \mapsto \mathrm{X}'$ et $\mathrm{Y}^q \mapsto \mathrm{Y}'$ définissent des isomorphismes h et $h^{\vee}$ comme annoncé.

Proposition 3.12. — *Soient* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S-*système élémentaire,* $w \in \mathrm{Q}(\mathrm{S})$, *posons*

$$\Omega_0 = \Omega \cap \mathrm{int}(w^{-1})(\Omega).$$

Soit d *la fonction sur* Ω *définie par*

$$d(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \alpha(t)^{-1} + \mathrm{XY}.$$

Alors $\Omega_0 = \Omega_d$ *et on a pour* $\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X}) \in \Omega_0(\mathrm{S}')$ *la formule suivante* (*on pose* $z = d(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X}))$:

$$(\star) \qquad \mathrm{int}(w)(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \exp(z^{-1} a_\alpha(w)^{-1}\mathrm{X}) \cdot t\, \alpha^*(z) \cdot \exp(z^{-1} a_\alpha(w)\mathrm{Y}).$$

De plus, on a $d \circ \mathrm{int}(w) = d^{-1}$.

En effet, on a aussitôt [(28)]

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(w)(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) &= \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y}) \cdot t\alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \cdot \exp(a_\alpha(w)^{-1}\mathrm{X})\\ &= \exp(a_\alpha(w)\mathrm{Y}) \cdot \exp(\alpha(t) a_\alpha(w)^{-1}\mathrm{X}) \cdot t\alpha^*(\alpha(t)^{-1}).\end{aligned}$$

D'après 2.1, c'est une section de Ω si et seulement si $1 + \alpha(t)\mathrm{XY}$ est inversible, ce qui prouve bien l'égalité $\Omega_0 = \Omega_d$; appliquant ensuite la formule (F) de *loc. cit.*, on en déduit par un calcul immédiat la formule $(\star)$ annoncée. Enfin, il résulte de $(\star)$ que l'on a

$$(d \circ \mathrm{int}(w))(\exp(\mathrm{Y}) \cdot t \cdot \exp(\mathrm{X})) = \alpha(t\alpha^*(z))^{-1} + z^{-2}\mathrm{XY} = z^{-2}(\alpha(t)^{-1} + \mathrm{XY}) = z^{-1},$$

d'où la dernière assertion.

N. B. On remarquera que la fonction d est indépendante du choix de w.

4. Le théorème d'isomorphisme

Théorème 4.1. — *Soient* S *un schéma,* $q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomor-* 71
phisme de $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *et* $(\mathrm{G}', \mathrm{T}', \alpha')$ *deux* S-*systèmes élémentaires. Soient*

$$h : (\mathfrak{g}^\alpha)^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{\alpha'} \qquad \text{et} \qquad h^\vee : (\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\otimes q} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{-\alpha'}$$

deux isomorphismes contragrédients l'un de l'autre. Soit $f_\mathrm{T} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *un morphisme de* S-*groupes rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[d, "\alpha'^*"] \\ \mathrm{T} \arrow[r, "f_\mathrm{T}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{T}' \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \arrow[r, "q"] & \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}. \end{tikzcd}$$

(28) N.D.E. : On a corrigé l'original en échangeant $a_\alpha(w)$ et $a_\alpha(w)^{-1}$, et l'on a détaillé la preuve de l'égalité $d \circ \mathrm{int}(w) = d^{-1}$.

Il existe un unique *morphisme de* S*-groupes* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *qui prolonge* f_{T} *et vérifie*

$$f(\exp(\mathrm{X})) = \exp(h(\mathrm{X}^q))$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha)(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *De plus, ce morphisme vérifie aussi*

$$f(\exp(\mathrm{Y})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q)) \quad \textit{et} \quad f(w_\alpha(\mathrm{Z})) = w_\alpha(h(\mathrm{Z}^q)),$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tous* $\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^{-\alpha})$, $\mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathfrak{g}^\alpha)^\times$.

Si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ prolonge f_{T}, alors $f \circ \alpha^* = (\alpha'^*)^q$. Si de plus f vérifie la seconde condition, alors il vérifie aussi les deux autres par 3.10. Il en résulte que f est déterminé sur Ω par la relation

$$f(\exp(\mathrm{Y})\, t \exp(\mathrm{X})) = \exp(h^\vee(\mathrm{Y}^q)) f_{\mathrm{T}}(t) \exp(h(\mathrm{X}^q)).$$

72 Comme Ω est schématiquement dense dans G, ceci démontre déjà l'unicité de f. Pour en prouver l'existence, il suffit, en vertu de Exp. XVIII 2.3, de prouver que la formule précédente définit un morphisme « génériquement multiplicatif » de Ω dans G'. Or, par 2.4, cela revient à vérifier que $\alpha' \circ f = \alpha^q$, ce qui résulte de ce que f prolonge f_{T}.

Scholie 4.2. — On peut aussi interpréter 4.1 de la façon suivante : on considère la catégorie $\mathscr{E}$ des S-systèmes élémentaires et la catégorie $\mathscr{D}$ des couples

$$(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\ ,\ \mathscr{L}),$$

où T est un tore, α et α^* des morphismes de groupes tels que $\alpha \circ \alpha^* = 2$, et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible (le lecteur précisera les morphismes des deux catégories envisagées). On définit un foncteur $\mathscr{E} \to \mathscr{D}$ par

$$(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha) \longmapsto (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\ ,\ \mathfrak{g}^\alpha).$$

Le théorème précédent dit que ce foncteur est *pleinement fidèle*. C'est en fait une équivalence de catégories comme on le verra au numéro suivant. On a déjà :

Corollaire 4.3. — *Si* $q = 1$ *et si* f_{T} *est un isomorphisme, alors* f *est un isomorphisme.*

Corollaire 4.4. — *Si* $q = 1$ *et si* f_{T} *est fidèlement plat de noyau* Q (cf. Exp. IX 2.7), *alors* f *est fidèlement plat* (*quasi-compact*) *de noyau* Q, *donc identifie* G' *à* G/Q.

En effet, si f_{T} est fidèlement plat de noyau Q, alors

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{T}} \circ \alpha') = \mathrm{Ker}(\alpha).$$

Introduisant le S-système élémentaire $(\mathrm{G}/\mathrm{Q}, \mathrm{T}/\mathrm{Q}, r/\mathrm{Q})$ de 2.13, on est ramené par 2.14 à prouver que f/Q induit un isomorphisme de G/Q sur G', ce qui résulte aussitôt de 4.3.

5. Exemples de systèmes élémentaires, applications

73

5.1. Soient S un schéma, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible. Considérons le groupe $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ sur S défini par

$$\mathrm{G}_{\mathscr{L}}(\mathrm{S}') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S}'), \begin{array}{c} b \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}') \\ c \in \mathrm{W}(\mathscr{L}^{-1})(\mathrm{S}') \end{array}, \ ad - bc \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S}') \right\}$$

muni de la loi de multiplication habituelle des matrices. Il est localement isomorphe à $\mathrm{GL}_{2,\,\mathrm{S}}$. C'est donc un S-schéma en groupes, affine et lisse sur S, à fibres connexes.

Remarque. — Soient $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}''$ deux faisceaux inversibles sur S, tels que $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}''^{-1}$. [29] Alors on a un isomorphisme de S-groupes :

$$\mathrm{G}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$$

défini comme suit : si x (resp. y) est une section de $\mathscr{L}'$ (resp. $\mathscr{L}''$) sur un ouvert V de S, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

5.2. On notera $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ défini par la relation $ad - bc = 1$. C'est aussi un S-schéma en groupes, affine et lisse sur S, à fibres connexes (isomorphe à $\mathrm{SL}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$ par l'isomorphisme précédent).

De même, considérons le morphisme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ défini par $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$. C'est un monomorphisme central ; par passage au quotient, on en déduit un groupe $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, lisse et affine sur S, à fibres connexes (cf. Exp. VIII 5.7)

On peut voir que, par passage au quotient à partir de l'isomorphisme de la remarque précédente, $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ s'identifie au groupe des automorphismes du fibré projectif $\mathbb{P}(\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}'')$ (cf. EGA , II 4.2.7). On notera i et p les morphismes canoniques 74

$$\mathrm{S}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{G}_{\mathscr{L}} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{P}_{\mathscr{L}} \ ;$$

i est une immersion fermée, p est fidèlement plat et affine.

5.3. Considérons les morphismes de groupes

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{G}} &: \mathbb{G}^2_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathscr{L}}, & t_{\mathrm{G}}(z, z') &= \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}; \\ t_{\mathrm{S}} &: \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, & t_{\mathrm{S}}(z) &= \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}; \\ t_{\mathrm{P}} &: \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathscr{L}}, & t_{\mathrm{P}}(z) &= p(t_{\mathrm{G}}(z, 1)). \end{aligned}$$

Ce sont des monomorphismes de groupes, qui définissent dans chaque groupe un tore (déployé) de codimension relative 2. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, soit

$$\mathrm{X} \in \Gamma(\overline{s}, \mathscr{L} \otimes \overline{s})^{\times};$$

[29] N.D.E. : On a corrigé $\mathscr{L}'' \otimes \mathscr{L}'^{-1}$ en $\mathscr{L}' \otimes \mathscr{L}''^{-1}$ et l'on a détaillé la phrase qui suit.

alors la section $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ \mathrm{X}^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{G}_{\mathscr{L},\overline{s}}$ normalise $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\overline{s}})$ et ne le centralise pas; on conclut alors de Exp. XIX 1.6 que $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ est *réductif,* de *rang semi-simple* 1, de *tore maximal* $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}})$.

On raisonne de même pour $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, et on voit que $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ (resp. $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$) est réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ (resp. $t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$).

5.4. En raisonnant comme d'habitude, on détermine aussitôt l'algèbre de Lie de ces différents groupes et l'opération adjointe du tore maximal choisi. Faisons-le pour $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$; c'est immédiat par Exp. II 4.8 : $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S})$ est l'algèbre de Lie des matrices ci-dessous :

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a \text{ et } d \text{ sections de } \mathscr{O}_{\mathrm{S}},\ b \text{ section de } \mathscr{L},\ c \text{ section de } \mathscr{L}^{-1} \right\}$$

avec le crochet habituel; on a

$$\mathrm{Ad}(t_{\mathrm{G}}(z,z')) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & zz'^{-1}b \\ z'z^{-1}c & d \end{pmatrix}.$$

75 Notons $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}_{\mathscr{L}}/\mathrm{S}) = \mathfrak{g}$. Soit $\alpha_{\mathrm{G}} : t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}}) \to \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ le caractère défini par

$$\alpha_{\mathrm{G}}(t_{\mathrm{G}}(z,z')) = zz'^{-1}.$$

On voit aussitôt sur la relation précédente que α_{G} est une racine de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ par rapport à $t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}})$ et que le morphisme

$$u : \mathscr{L} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad (\text{resp. } u_- : \mathscr{L}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{g})$$

défini par $u(\mathrm{X}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. $u_-(\mathrm{X}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{X} & 0 \end{smallmatrix}\right)$) est un isomorphisme de $\mathscr{L}$ sur $\mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (resp. de $\mathscr{L}^{-1}$ sur $\mathfrak{g}^{-\alpha_{\mathrm{G}}}$).

On a donc prouvé que $(\mathrm{G}, t_{\mathrm{G}}(\mathbb{G}^2_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{G}})$ est un S-*système élémentaire.*

Posant de même

$$\alpha_{\mathrm{S}}(t_{\mathrm{S}}(z)) = z^2, \qquad \alpha_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{P}}(z)) = z,$$

on démontre que $(\mathrm{S}_{\mathscr{L}}, t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{S}})$ et $(\mathrm{P}_{\mathscr{L}}, t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}), \alpha_{\mathrm{P}})$ sont des systèmes élémentaires, et on définit des isomorphismes de $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}^{-1}$) avec les facteurs directs correspondants des algèbres de Lie de $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$.

5.5. Posons $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a ainsi défini un morphisme

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha_{\mathrm{G}}}) \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathscr{L}}$$

qui induit sur les algèbres de Lie le morphisme canonique, donc est l'unique morphisme de ce type (1.5). De même, on pose $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Y} & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Effectuant le calcul explicite de la formule (F), on trouve

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Y} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{XY}, \qquad \alpha^*_{\mathrm{G}}(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^1 \end{pmatrix} = t_{\mathrm{G}}(z, z^{-1}).$$

[30] L'ouvert $\mathrm{N}^{\times} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}^{\times}$ (défini avant 3.1) est :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{G}}^{\times}(\mathrm{S}') = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} & 0 \end{pmatrix} \middle| \ \mathrm{P} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}'),\ \mathrm{Q} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(\mathrm{S}') \right\},$$

le morphisme $w_{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (cf. 3.1 (iv)) est donné, pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$, par

$$w_{\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

le morphisme $a_{\alpha_{\mathrm{G}}}$ (cf. 3.5) est donné par : **76**

$$\text{si} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_{\mathrm{G}}^{\times}(\mathrm{S}') \quad \text{alors} \quad a_{\alpha_{\mathrm{G}}}(w) = \mathrm{PQ}^{-1} \in \mathrm{W}\big((\mathfrak{g}^{\alpha})^{\otimes 2}\big)^{\times}(\mathrm{S}'),$$

c.-à-d., pour tout $\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{-\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$, on a $a_{\alpha_{\mathrm{G}}}(w)(\mathrm{Y}) = \mathrm{PQ}^{-1}\mathrm{Y} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S}')$.

5.6. Nous laissons au lecteur le soin de faire les mêmes calculs dans $\mathrm{S}_{\mathscr{L}}$ et $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$. On trouve la même formule de dualité et les coracines

$$\alpha_{\mathrm{S}}^{*}(z) = t_{\mathrm{S}}(z), \qquad \alpha_{\mathrm{P}}^{*}(z) = t_{\mathrm{P}}(z^2).$$

Notons p_{T} le morphisme induit par $p : \mathrm{G}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ sur $t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$, c.-à-d.

$$p_{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{S}}(z)) = t_{\mathrm{P}}(z^2).$$

On a donc le diagramme commutatif : [31]

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dlll, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{S}}^{*}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{P}}^{*}"'] \arrow[drrr, "2"] & & & \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[rr, "t_{\mathrm{S}}"] \arrow[drrr, "2"'] & & t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[rr, "p_{\mathrm{T}}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{S}}"] & & t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{P}}"'] & & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[ll, "t_{\mathrm{P}}"'] \arrow[dlll, "\mathrm{id}"] \\
& & & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} & & &
\end{tikzcd}$$

On reconnaît dans le partie centrale le diagramme commutatif de 4.1 [32] relatif au morphisme canonique $p \circ i : \mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$, qui induit un morphisme des S-systèmes élémentaires précédents.

---

[30] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
[31] N.D.E. : où t_{S} et t_{P} sont des *isomorphismes*.
[32] N.D.E. : avec $q = 1$.

5.7. Soit maintenant $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ un S-système élémentaire quelconque. Considérons le diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha^*"] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[dr, "2"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
 & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

77 Combinant les deux diagrammes précédents, on obtient un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{S}}^*"'] \arrow[d, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{P}}^*"] & \\
t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[r, "\alpha^*\circ t_{\mathrm{S}}^{-1}"] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{S}}"'] & \mathrm{T} \arrow[r, "t_{\mathrm{P}}\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & t_{\mathrm{P}}(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}) \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{P}}"] \\
 & \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Utilisant 4.1, on a donc :

Proposition 5.8. — *Soient* S *un schéma,* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Posons* $\mathscr{L} = \mathfrak{g}^{\alpha}$ *(et donc* $\mathscr{L}^{-1} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$*).*

(i) *Il existe un* unique *morphisme de groupes* $f : \mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{G}$ *qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(a) $f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix} = \alpha^*(z), \qquad f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X})\,;$

(b) $f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X}), \qquad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1\end{pmatrix} = \exp(\mathrm{Y})\,;$

(c) $f\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \exp(\mathrm{X}), \qquad f\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0\end{pmatrix} = w_{\alpha}(\mathrm{X}).$

(ii) *Il existe un* unique *morphisme de groupes* $g : \mathrm{G} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ *qui vérifie*

$$g(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad g(\exp(\mathrm{X})) = p\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{X} \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$g(\exp(\mathrm{Y})) = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{Y} & 1\end{pmatrix}, \qquad g(w_{\alpha}(\mathrm{X})) = p\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X} \\ -\mathrm{X}^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

Le morphisme g est fidèlement plat quasi-compact de noyau $\mathrm{Ker}(\alpha) = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ *et* $g \circ f$ *est le morphisme canonique* $\mathrm{S}_{\mathscr{L}} \to \mathrm{P}_{\mathscr{L}}$.

Remarquons que les conditions (b) de (i) donnent une description explicite de la dualité entre $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. 78

Corollaire 5.9. — *Soit* $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \alpha)$ *un* S*-système élémentaire. Les sous-groupes* $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$, $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha}$, U_{α} *et* $\mathrm{U}_{-\alpha}$ *sont* fermés.

Comme U_{α} est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$, il suffit de faire la vérification pour ce dernier. D'après le théorème de Noether (Exp. IV 5.3.1 et 6.4.1), il suffit de prouver que $(\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha})/\mathrm{Ker}(\alpha)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}(\alpha)$. En vertu de 5.8, on est donc ramené à prouver que le sous-groupe de $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ (ou de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$, ce qui revient au même en vertu d'une nouvelle application du théorème de Noether), défini par $c = 0$ est fermé, ce qui est trivial.

Par conséquent, les morphismes exp du théorème 1.5 (i) sont des immersions fermées.

N. B. Le corollaire résulte aussi de ce que $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{\alpha}$ et $\mathrm{T} \cdot \mathrm{U}_{-\alpha}$ sont des « sous-groupes de Borel » de G (cf. Exp. XII 7.10).

5.10. Soient $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible et

$$\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$$

un diagramme de groupes [33] tel que $\alpha \circ \alpha^* = 2$. Soient R le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $\mathrm{K} = \alpha^{*-1}(\mathrm{R})$. Alors, K est un sous-groupe de type multiplicatif de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$; en vertu de $\alpha \circ \alpha^* = 2$, c'est même un sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{2,\mathrm{S}}$. En particulier le morphisme

$$\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, \qquad z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

est central. On a donc un monomorphisme de groupes central : 79

$$\mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R} \times \mathrm{S}_{\mathscr{L}}, \qquad z \mapsto \left(\alpha^*(z), \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right).$$

Considérons le groupe $\mathrm{G} = (\mathrm{R} \times \mathrm{S}_{\mathscr{L}})/\mathrm{K}$ obtenu par passage au quotient. C'est un groupe affine et lisse sur S, à fibres connexes. Il est immédiat que la suite

$$1 \longrightarrow \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{R} \times t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \xrightarrow{u} \mathrm{T} \longrightarrow 1$$

où $u(x, t_{\mathrm{S}}(z)) = x\,\alpha^*(z)$ est exacte. L'image de $\mathrm{R} \times t_{\mathrm{S}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$ dans G est donc un tore T' isomorphe à T. On montre maintenant sans difficultés que si α' est le caractère de T' déduit de α par l'isomorphisme précédent, $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \alpha')$ est un S-système élémentaire, que $\mathfrak{g}^{\alpha'}$ est isomorphe à $\mathscr{L}$ et que α'^* est obtenu à partir de α^* par l'isomorphisme $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}'$. On a donc construit un S-système élémentaire $(\mathrm{G}, \mathrm{T}', \alpha')$ tel que l'objet

[33] N.D.E. : T étant un tore.

correspondant $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha'^*} \mathrm{T}' \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathfrak{g}^{\alpha'})$ de la catégorie $\mathscr{D}$ définie en 4.2 soit isomorphe à $(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathscr{L})$. On a donc prouvé le

Théorème 5.11. — *Dans les notations de* 4.2, *le foncteur*

$$(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha) \longmapsto (\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{T} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}\,,\ \mathfrak{g}^{\alpha})$$

est une équivalence de catégories *entre* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{D}$.

6. Générateurs et relations pour un système élémentaire

80 **6.1.** Soient S un schéma, $(\mathrm{G},\mathrm{T},\alpha)$ un S-système élémentaire. Soient $\mathrm{X} \in \mathrm{W}(\mathfrak{g}^{\alpha})^{\times}(\mathrm{S})$ et $u = \exp(\mathrm{X})$; on a vu en 3.8 que l'élément $w = w_{\alpha}(\mathrm{X})$ vérifie en particulier la relation

$$(w\,u)^3 = e.$$

[34] On note s_{α} l'automorphisme de T induit par $\mathrm{int}(w)$; d'après le théorème 3.1 (iii), pour tout $\mathrm{S}' \to$ et $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, on a

$$s_{\alpha}(t) = \mathrm{int}(w)(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}).$$

Théorème 6.2. — *Soit* H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf). *Soient*

$$f_{\mathrm{T}} : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}, \qquad f_{\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha} \longrightarrow \mathrm{H}$$

des morphismes de groupes et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$ *une section de* H. *Pour qu'il existe un morphisme de groupes* (*nécessairement unique*)

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$$

prolongeant f_{T} *et* f_{α} *et vérifiant* $f(w) = h$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, *tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ *et tout* $x \in \mathrm{U}_{\alpha}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f_{\mathrm{T}}(t)\, f_{\alpha}(x)\, f_{\mathrm{T}}(t)^{-1} = f_{\alpha}(t\,x\,t^{-1}) = f_{\alpha}(x^{\alpha(t)}). \tag{1}$$

(autrement dit, f_{T} *et* f_{α} *se prolongent en un morphisme de groupes du produit semi-direct* $\mathrm{T}\cdot\mathrm{U}_{\alpha}$ *dans* H).

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et tout* $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, *on a*

$$h\, f_{\mathrm{T}}(t)\, h^{-1} = f_{\mathrm{T}}(s_{\alpha}(t)) = f_{\mathrm{T}}(t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})). \tag{2}$$

81 (iii) *On a les deux relations dans* H(S) *:*

$$h^2 = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(-1)), \tag{3}$$

$$(h\, f_{\alpha}(u))^3 = e. \tag{4}$$

[34] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

Démonstration. Notons additivement U_α et $U_{-\alpha}$ et multiplicativement leur structure vectorielle. Si f vérifie les conditions de l'énoncé, on a nécessairement pour tout $y \in U_{-\alpha}(S')$,

$$f(y) = f(w^{-1}wyw^{-1}w) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

Soit donc $f_{-\alpha} : U_{-\alpha} \to H$ le morphisme défini par

$$(*_1) \qquad f_{-\alpha}(y) = hf_\alpha(w^{-1}yw)h^{-1}.$$

C'est un morphisme de groupes. D'autre part, f est déterminé sur la grosse cellule Ω par

$$f(y\,t\,x) = f_{-\alpha}(y)f_T(t)f_\alpha(x).$$

Cela montre l'unicité de f ; comme les conditions de l'énoncé sont manifestement nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

On a par (4)

$$hf_\alpha(u)h^{-1}h^2 = f_\alpha(-u)h^{-1}f_\alpha(-u).$$

Or, par (3) et (1), $h^2 = h^{-2}$ commute à $f_\alpha(-u)$, ce qui donne

$$hf_\alpha(u)h^{-1} = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Mais, par définition $hf_\alpha(u)h^{-1} = f_{-\alpha}(wuw^{-1})$; d'après 3.7, comme $u = \exp(X)$ et 82
$w = w_\alpha(X)$, on a

$$(*_2) \qquad w\,u\,w^{-1} = -\widetilde{u},$$

où $\widetilde{u}$ désigne l'élément apparié à u. On obtient donc :

$$(*_3) \qquad f_{-\alpha}(-\widetilde{u}) = f_\alpha(-u)hf_\alpha(-u).$$

Soit maintenant t une section de T sur un $S' \to S$ variable. Faisons opérer $\mathrm{int}(f_T(t))$ sur la formule précédente. On obtient au premier membre [35]

$$\begin{aligned} f_T(t)f_{-\alpha}(-\widetilde{u})f_T(t)^{-1} &= f_T(t)\,hf_\alpha(u)h^{-1}f_T(t)^{-1} \\ &= h\big(h^{-1}f_T(t)h\big)f_\alpha(u)\big(h^{-1}f_T(t)^{-1}h\big)h^{-1} \\ &= hf_T(s_\alpha(t))f_\alpha(u)f_T(s_\alpha(t))^{-1}h^{-1} = hf_\alpha\big(\alpha(s_\alpha(t))\,u\big)h^{-1} \end{aligned}$$

par (2) et (1) ; puis comme $s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1})$ et $\alpha \circ \alpha^* = 2$, ceci égale

$$hf_\alpha\big(\alpha(t)^{-1}u\big)h^{-1}.$$

Enfin, par $(*_1)$ et $(*_2)$ on a

$$hf_\alpha\big(\alpha(t)^{-1}u\big)h^{-1} = f_{-\alpha}\big(\alpha(t)^{-1}\,wuw^{-1}\big) = f_{-\alpha}\big(-\alpha(t)^{-1}\,\widetilde{u}\big).$$

Le second membre de $(*_3)$ donne

$$f_\alpha(-\alpha(t)u) \cdot f_T(t)hf_T(t)^{-1}h^{-1} \cdot h \cdot f_\alpha(-\alpha(t)u)$$

et comme $hf_T(t)^{-1}h^{-1} = f_T(s_\alpha(t^{-1})) = f_T\big(t \cdot \alpha^*(\alpha(t)\big)$, ceci égale

$$f_\alpha(-\alpha(t)u) \cdot f_T\big(\alpha^*(\alpha(t))\big) \cdot h \cdot f_\alpha(-\alpha(t)u).$$

[35] N.D.E. : On a corrigé ce qui suit.

Comparant les deux expressions obtenues, on obtient

$$f_{-\alpha}\big(-\alpha(t)^{-1}\widetilde{u}\big) = f_\alpha(-\alpha(t)u)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(\alpha(t))\big)\cdot h\cdot f_\alpha(-\alpha(t)u).$$

Comme $\alpha : \mathrm{T}\to\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est fidèlement plat et que H est un préfaisceau séparé, on peut remplacer $-\alpha(t)^{-1}$ par une section quelconque de $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ et on obtient le

Lemme 6.2.1. — *Pour tout* $z\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$, *on a*

$$f_{-\alpha}(z\widetilde{u}) = f_\alpha(z^{-1}u)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha^*(-z^{-1})\big)\cdot h\cdot f_\alpha(z^{-1}u).$$

83 Soient maintenant $x, y\in\mathbb{G}_a(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$; supposons y et $(1+xy)$ inversibles. Appliquant d'abord le lemme à $z=y$, on obtient [36]

$$f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) = f_\alpha\big((x+y^{-1})u\big)\cdot f_{\mathrm{T}}\big(\alpha(-y^{-1})\big)\cdot h\cdot f_\alpha(y^{-1}u)$$

Or $x+y^{-1} = y^{-1}(1+xy)$. Appliquant le lemme à $z=\dfrac{y}{1+xy}$, on trouve

$$f_\alpha((x+y^{-1})u) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,\widetilde{u}\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot h^{-1}\cdot f_{\mathrm{T}}\left(\alpha^*\left(\frac{-y}{1+xy}\right)\right).$$

Reportant ceci dans l'égalité précédente, on obtient

$$f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) = f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,u\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot h^{-1}\cdot f_{\mathrm{T}}\Big(\alpha^*(1+xy)^{-1}\Big)\cdot h\cdot f_\alpha(y^{-1}u).$$

Comme $h^{-1}f_{\mathrm{T}}(t)h = f_{\mathrm{T}}(s_\alpha(t))$ d'après (2) (noter que $s_\alpha^2=\mathrm{id}$) et comme $s_\alpha\circ\alpha^* = -\alpha^*$ (cf. 6.2.1), ceci égale

$$f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\,u\right) f_\alpha(-(x+y^{-1})u)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha(y^{-1}u)$$

Enfin, comme pour tous $x'\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$ et $z\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$ on a

$$f_\alpha(x')f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z)) = f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(z))f_\alpha(z^{-2}\,x'),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_\alpha(xu)f_{-\alpha}(y\widetilde{u}) &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\widetilde{u}\right)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha\left(\Big(\frac{-y^{-1}(1+xy)}{(1+xy)^2}+y^{-1}\Big)u\right)\\ &= f_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\widetilde{u}\right)\cdot f_{\mathrm{T}}(\alpha^*(1+xy))\cdot f_\alpha\left(\frac{x}{1+xy}u\right)\end{aligned}$$

On a donc prouvé :

Lemme 6.2.2. — *Soit* $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$. *Si* $a\in\mathrm{U}_\alpha(\mathrm{S}')$, $b\in\mathrm{U}^\times_{-\alpha}(\mathrm{S}')$, *et* $1+ab\in\mathbb{G}_m(\mathrm{S}')$, *on a*

$$f_\alpha(a)f_{-\alpha}(b) = f_{-\alpha}\left(\frac{b}{1+ab}\right) f_{\mathrm{T}}\Big(\alpha^*(1+ab)\Big)\, f_\alpha\left(\frac{a}{1+ab}\right).$$

[36] N.D.E. : On a détaillé les calculs qui suivent.

Par densité schématique, cette formule reste valable lorsque $b \in \mathrm{U}_{-\alpha}(\mathrm{S}')$, $1+ab$ étant toujours inversible. Considérons alors le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow \mathrm{H}$$

défini par $f(y\,t\,x) = f_{-\alpha}(y) f_{\mathrm{T}}(t) f_{\alpha}(x)$. **84**

Il résulte aussitôt de 6.2.2, de la condition 6.2 (i), et de la formule (F′) de 2.4, que si g, $g' \in \Omega(\mathrm{S}')$ et $gg' \in \Omega(\mathrm{S}')$, on a $f(gg') = f(g)f(g')$. Par Exp. XVIII 2.3 (iii) et 2.4 [37], il existe donc un morphisme de groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ prolongeant f. Notons-le aussi f ; il répond à la question ; il suffit de prouver, en effet, que $f(w_\alpha) = h$. Or $w_\alpha = u \cdot (-\widetilde{u}) \cdot u$, d'où, d'après $(*_3)$: [38]

$$f(w_\alpha) = f_\alpha(u) f_{-\alpha}(-\widetilde{u}) f_\alpha(u) = h.$$

Remarque 6.3. — Nous complèterons ces résultats en Exp. XXIII 3.5.

[37] N.D.E. : Noter que chaque fibre géométrique de G est connexe, par exemple d'après 1.1.

[38] N.D.E. : On a simplifié l'original en invoquant $(*_3)$.