# Analyse vectorielle, intégrales multiples

Partiel novembre 2018
Une heure et demie
*Documents et instruments électroniques interdits*

On rappelle la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

**Exercice 1 :** Expliciter les domaines de définition des fonctions suivantes et calculer leur différentielle totale :

a) $f(x, y, z) = (xy)^z$.

b) $f(x, y, z) = \tan(x^3 e^{yz})$.

*Solution de l'exercice* 1.

a) Le domaine de définition de $f(x, y, z) := (xy)^z = e^{z\ln(xy)}$ est l'ensemble

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy > 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)\}$$

car le logarithme est défini sur $]0, +\infty[$. Par les règles de calcul pour les différentielles, on obtient

$$\begin{aligned} df &= d(e^{z\ln(xy)}) \\ &= e^{z\ln(xy)} d(z\ln(xy)) \\ &= e^{z\ln(xy)}[zd\ln(xy) + \ln(xy)dz] \\ &= e^{z\ln(xy)}\left[z\frac{d(xy)}{xy} + \ln(xy)dz\right] \\ &= e^{z\ln(xy)}\left[z\frac{xdy + ydx}{xy} + \ln(xy)dz\right] \\ &= e^{z\ln(xy)}\left[z\frac{dx}{x} + z\frac{dy}{y} + \ln(xy)dz\right] \end{aligned}$$

b) Le domaine de définition de $f$ est $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^3 e^{yz} \in ] - \pi/2, \pi/2[ + 2\pi\mathbb{Z}\}$ car tan est définie sur $] - \pi/2, \pi/2[ + 2\pi\mathbb{Z}$. Par les règles de calcul pour les différentielles, et comme $d\tan(u) = (1 + \tan^2(u))du$, on obtient

$$\begin{aligned} df &= d(\tan(x^3 e^{yz})) \\ &= (1 + \tan^2(x^3 e^{yz}))d(x^3 e^{yz}) \\ &= (1 + \tan^2(x^3 e^{yz}))[3x^2 e^{yz}dx + x^3 z e^{yz}dy + x^3 y e^{yz}dz] \end{aligned}$$

**Exercice 2 :** Soit $f(x, y) = x^3 - 2x - y^2$.

a) Calculer la valeur de $f(x, y)$ au point $(2, 1)$.

b) Calculer la différentielle de $f$.

c) Evaluer le gradient de $f$ en $(2, 1)$.

d) Qu'en déduit-on pour la ligne de niveau 3 pour $f$, notée $L_3(f)$ ?

e) Montrer qu'il existe $\phi(x)$ définie et $C^1$ au voisinage de 2 telle que au voisinage de $(2, 1)$, on ait

$$y = \phi(x) \Leftrightarrow (x, y) \in L_3(f),$$

c'est à dire, qu'on peut paramétrer la ligne de niveau 3 par la variable $x$ au voisinage de $(2, 1)$.

*Solution de l'exercice* 2.

a) On a $f(2,1) = 8 - 4 - 1 = 3$.

b) La différentielle de $f$ est $df = (3x^2 - 2)dx - 2ydy$.

c) Le gradient de $f$ a les mêmes coordonnées que la différentielle donc

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(2,1) = (3 \cdot 2^2 - 2, -2 \cdot 1) = (10, -2).$$

d) La ligne de niveau 3 de $f$ passe par $(2,1)$ et sa tangente est orthogonale au vecteur $(10,-2)$, donc son vecteur directeur vérifie l'équation $10x - 2y = 0$ et sa tangente en $(2,1)$ a pour équation affine $10(x-2) - 2(y-1) = 0$.

e) Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2 \neq 0$ et comme $f$ est $\mathcal{C}^1$, le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\phi(x)$ définie et $C^1$ au voisinage de 2 telle que, au voisinage de $(2,1)$, on ait

$$y = \phi(x) \Leftrightarrow (x,y) \in L_3(f).$$

**Exercice 3 :** Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse paramétrée de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$x(t) = 2\cos(t), \; y(t) = 3\sin(t) \;\text{ avec } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Calculer un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t) = (x(t), y(t))$, puis un vecteur unitaire tangent.

b) Soit $\vec{V_1}$ le champ de vecteurs défini par $\vec{V_1}(x,y) = (x+y, y)$. Calculer le travail de $\vec{V_1}$ le long de la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ (on pourra intégrer la 1-forme différentielle correspondante).

c) Soit $\omega$ la 1-forme différentielle $(2xy + y\cos(x))dx + (x^2 + \sin(x))dy$. Trouver une primitive de $\omega$, c'est à dire une fonction $f$ telle que $df = \omega$.

d) Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \omega$.

*Solution de l'exercice* 3.

a) Un vecteur tangent au point $M(t)$ est donné par $\vec{V}(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t))$. Un vecteur unitaire tangent est donné par $\vec{U}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}}\vec{V}(t)$.

b) On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{V_1}(M) \cdot d\vec{M} &= \int_0^{2\pi} [(x(t) + y(t))x'(t) + y(t)y'(t)]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(2\cos(t) + 3\sin(t))(-2\sin(t)) + 3\sin(t)(3\cos(t))]dt \\
&= 5\int_0^{2\pi} \sin(t)d(\sin t) - 6\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt \\
&= 5\left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{2\pi} - 3\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2t)dt \\
&= 0 - 3[t - \sin(2t)/2]_0^{2\pi} \\
&= -6\pi
\end{aligned}$$

c) On doit avoir

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \omega = (2xy + y\cos(x))dx + (x^2 + \sin(x))dy.$$

On doit donc intégrer les deux équations $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y\cos(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \sin(x)$. On trouve $f = x^2y + y\sin(x) + c$ avec $c$ une constante réelle.

d) Comme la courbe est fermée, on a $M(0) = M(2\pi) = (2,0)$ pour $M(t) = (x(t), y(t))$, et l'intégrale est nulle car elle vaut

$$f(M(2\pi)) - f(M(0)) = f(2,0) - f(2,0) = 0$$

par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

**Exercice 4 :** Dessiner le domaine d'intégration des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur :

a) $\iint_D (3x+2y)dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 2x\}$.

b) $\iint_D xy^3 dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

*Solution de l'exercice* 4.

a) La droite $y = x-1$ est obtenue en décalant de 1 vers le bas de la droite $y = x$. Le domaine considéré est compris entre le graphe de deux fonctions sur un intervalle fixé, donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour écrire :

$$\begin{aligned}
\iint_D (3x+2y)dxdy &= \int_0^1 (\int_{x-1}^{2x} (3x+2y)dy)dx \\
&= \int_0^1 [3xy+y^2]_{y=x-1}^{2x} dx \\
&= \int_0^1 3x(2x)+4x^2-3x(x-1)-(x-1)^2 dx \\
&= \int_0^1 6x^2+4x^2-3x^2-x^2+3x+2x-1dx \\
&= \int_0^1 6x^2+5x-1dx \\
&= \left[6\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 \\
&= 2+5/2-1 \\
&= 7/2.
\end{aligned}$$

b) Le domaine $D$ est le demi-disque unité supérieur, et peut être décrit comme le domaine compris entre le graphe des fonctions 0 et $\sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[-1,1]$, c'est à dire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

On peut donc y appliquer le théorème de Fubini pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^3 dxdy &= \int_{-1}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^3 dy)dx \\
&= \int_{-1}^1 ([\frac{xy^4}{4}]_0^{\sqrt{1-x^2}})dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{x(1-x^2)^2}{4} dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 x-2x^3+x^5 dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}+x^6/6\right]_{-1}^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut aussi procéder par changement de variable en coordonnées polaires mais le calcul est alors nettement plus compliqué. On peut aussi observer directement que la fonction est impaire en $x$, et que si on découpe le demi-disque en deux quarts de disques, on obtient deux intégrales opposées, qui s'annulent (par le changement de variable $x \mapsto -x$).