Feuille 0 : révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme échelonnée ? Sous forme échelonnée réduite ?

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&5&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&7\\0&2&2\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&7&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&3\\0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Faire la liste de toutes les matrices à coefficients réels de taille 2×2 qui sont échelonnées réduites.

Exercice 3. Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée réduite. En déduire leur rang.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&7\\2&-1&5\\-1&-3&-9\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&2&13\\1&-2&3&17\\-1&3&-3&-20\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&3&-2&0&-1\\-1&-1&1&3&1\\2&2&-1&2&2\\0&0&1&8&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1&3&3&3\\1&2&2&5&8\\1&0&-1&0&1\\1&1&-3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Traiter les problèmes suivants en les traduisant sous la forme d'un système d'équations linéaires et en les résolvant de deux manières différentes : par l'algorithme du pivot de Gauss, puis en utilisant les formules de Cramer.

a) Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Brigitte achète le livre de grammaire anglaise et un livre de physique pour 64 euros au total. Claude dépense 98 euros avec un livre d'algèbre linéaire et le livre de grammaire anglaise, tandis que Denise achète le livre d'algèbre linéaire et le livre de physique, pour 76 euros. Combien coûte chaque livre ?

b) *D'après l'Anthologie grecque de Metrodore, VIe siècle ap. J.-C.*
Fabrique-moi une couronne qui pèse 60 mines, faite d'or, de bronze, d'étain et de fer forgé. L'or et le bronze ensemble en feront les deux tiers, l'or et l'étain les trois quarts, l'or et le fer les trois cinquièmes. Dis-moi de combien d'or, d'étain, de bronze et de fer tu dois faire usage ?

c) *"Les neuf chapitres sur l'art mathématique", IIe siècle av. J.C.*
Supposons qu'1 directeur, 5 officiers secondaires et 10 laquais mangent 10 poulets ; 10 directeurs, 1 officier secondaire et 5 laquais mangent 8 poulets ; 5 directeurs, 10 officiers secondaires et 1 laquais mangent 6 poulets. On demande combien de poulets mangent respectivement un directeur, un officier secondaire et un laquais.

Exercice 5. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donné par les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Donner une équation paramétrique de ce sous-espace vectoriel et le décrire d'un point de vue géométrique.

Exercice 6. On considère le plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dirigé par les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 6)$. Donner une équation paramétrique de ce plan. À partir de ce paramétrage, obtenir une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 7. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3456 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 12 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 14 & 11 & 3 & 18 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$