TD 1
Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront figurer dans les évaluations.

Exercice 1. Déterminer, parmi les applications suivantes, quelles sont les applications bilinéaires sur l'espace vectoriel E spécifié.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 + x_1y_2$;
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_2 + x_1)y_2$;
4. $E = M_n(\mathbb{R})$, $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
5. $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles,
$$\phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \qquad \text{pour tout } f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$
6. $E = \mathbb{R}^2$, $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_2 + x_1)y_2$;
7. $E = \mathbb{R}^2$,
$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \text{dét} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
Pour les formes bilinéaires suivantes, écrire leur matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et déterminer si elles sont symétriques, leur rang et leur noyau :

1. $\phi_1(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$;
2. $\phi_2(x, y) = x_1y_2$;
3. $\phi_3(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$;
4. $\phi_4(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$;
5. $\phi_5(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$;
6. $\phi_6(x, y) = x_1y_1$;
7. $\phi_7(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;
8. $\phi_8(x, y) = x_1y_1 - \dfrac{3}{2}x_1y_2 - \dfrac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$.

Étant donnée une forme symétrique ϕ parmi les précédentes, déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, x) = 0\}$ et le comparer avec le noyau.

Exercice 3. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$, pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice S de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et montrer que ϕ est non dégénérée.
2. Déterminer la forme quadratique q associée à ϕ.

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note D_a la droite d'équation $x_2 = ax_1$, engendrée par le vecteur $v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$. On note D_∞ la droite « verticale » $x_1 = 0$, engendrée par $v_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $D_a^\perp$ (resp. $D_\infty^\perp$) l'orthogonal de D_a pour ϕ. Calculer $D_a^\perp$ pour $a \in \mathbb{R}^*$, ainsi que $D_0^\perp$ et $D_\infty^\perp$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, dans quels cas a-t-on $\mathbb{R}^2 = D_a \oplus D_a^\perp$?

Exercice 4. On considère les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$q_0(x,y,z) = x^2+y^2+xz, \quad q_1(x,y,z) = 2x^2+6xy-2xz+y^2+4yz-3z^2, \quad q_2(x,y,z) = xy+3xz.$$

1. Pour chacune d'elles, écrire la matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire symétrique associée, et déterminer son rang et son noyau :
2. Décomposer q_0, q_1 et q_2 en somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et déterminer pour chacune la signature et le rang.

Exercice 5. Soient ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont les suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles, écrivez la forme quadratique associée $q_i(x_1, x_2, x_3)$ puis écrivez q_i comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminez la signature et le rang de q_i.

Exercice 6. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit q la forme quadratique associée. Exprimez $q(x_1, \ldots, x_5)$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Écrivez q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. Déterminez la signature et le rang de q.

Exercice 7. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^5$ définie par

$$q(x,y,z,t,u) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 2xy + 4xz - 4xt + 4yz - 4yt - 5zt + 2zu + tu.$$

1. Écrire q comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes et déterminer la signature et le rang de q.
2. Existe-t-il un vecteur non-nul (x,y,z,t,u) tel que $q(x,y,z,t,u) = 0$?

Idem pour la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 4z^2 + t^2 + 4xz - 2xt - 3zt - yz + 2yt.$$