Feuille 2 : dualité, formes quadratiques

Exercice 1. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbf{R}^3$.

- Montrer qu'il existe trois formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbf{R}^3$ telles que pour tout i, j,

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

- Calculer les coordonnées de l_1, l_2, l_3 dans la base de l'espace des formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$e_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1, \quad e_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2, \quad e_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

La base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est appelée base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ tandis que la base (l_1, l_2, l_3) est la base duale de (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2. Soit l_1, l_2, l_3 les formes linéaires sur $\mathbf{R}^3$ données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad l_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3, \quad l_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_3.$$

Trouver trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que

$$l_i(v_j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad l_i(v_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Exercice 3. On se place sur $\mathbf{R}^3$ muni de la forme bilinéaire donnée par le produit scalaire standard :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

– Quelle est la dimension de E ?

– Construire une base de E, qu'on notera (e_1, e_2).

– On considère la restriction de φ à E. Calculer sa matrice dans la base (e_1, e_2).

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel et l_1, l_2 deux formes linéaires non nulles et non proportionnelles définies sur E. On pose pour tout $x \in E$,

$$Q(x) = l_1(x)\, l_2(x).$$

– Montrer que Q est une forme quadratique sur E en explicitant la forme bilinéaire associée.

– En déduire le noyau et le rang de Q.

– On se place sur $E = \mathbf{R}^3$ et on considère les formes linéaires l_1 et l_2 données par

$$l_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3, \quad l_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2.$$

Donner les coordonnées de l_1 et l_2 dans la base canonique du dual de $\mathbf{R}^3$ sous forme de vecteurs lignes et calculer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 5. Soit E un espace de dimension finie n et Q une forme quadratique sur Q. On choisit une base $(e_1, ...e_n)$ de E et on note A la matrice de Q dans cette base.

- Le déterminant de A dépend-il de la base choisie ?

- Montrer que son signe ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 6. On se donne trois réels a, b, $c \in \mathbf{R}$ et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Considérons la forme quadratique Q définie sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$.

- Donner l'expression de Q en coordonnées.

- Montrer que le signe de Δ ne dépend que de la signature de Q (cf exercice précédent).

- Montrer que la forme quadratique est non dégénérée si et seulement si Δ est non nul.

- Calculer le signe de Δ pour chacune des valeurs possibles de la signature.

- En déduire que Δ est strictement positif si et seulement si la signature vaut $(1, 1)$.