Feuille 3 : espaces euclidiens

Espaces euclidiens

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ composé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que l'expression suivante définit un produit scalaire sur cet espace :

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k).$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On se place sur l'espace $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k. Pour quelles valeurs de n l'expression suivante définit-elle un produit scalaire sur cet espace ?

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$

Exercice 2. On se place sur l'espace vectoriel $C^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'expression suivante définit une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\,dt.$$

À quelle condition sur h cette expression définit-elle un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$?

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 3 (question de cours)**.** Montrer que toute forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive notée $(|)$. La forme quadratique associée est notée $\|.\|^2$. Développer l'expression

$$\Big\| x\|y\| - \|x\|y \Big\|^2.$$

En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard, montrer

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 6. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^5$ muni du produit scalaire standard, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{|x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5|}{\sqrt{55}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 7. 1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 5z)^2 \leq 30$; dans quel cas a-t-on $(x + 2y + 5z)^2 = 30$?

2) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq \dfrac{17}{10}$; dans quel cas a-t-on $(x + y + z)^2 = \dfrac{17}{10}$?

Exercice 8. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, montrer que

$$\Big(\int_a^b |f(t)|\, dt \Big)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2\, dt\,.$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ? Indication : remarquer que $|f(t)|^2 = f(t)^2$.

Exercice 9. Soit P un polynôme défini sur $\mathbb{R}$. Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t)\, dt \right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2\, dt.$$

Peut-on avoir l'égalité ?

Exercice 10. Soit E un espace euclidien et $x, y, z \in E$. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à trois variables :

$$\|x\|^2 (y \mid z)^2 + \|y\|^2 (x \mid z)^2 + \|z\|^2 (x \mid y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 + 2(x \mid y)(y \mid z)(z \mid x).$$

On pourra commencer par le cas où x, y, z sont linéairement indépendants et s'intéresser au déterminant de la matrice du produit scalaire dans la base (x, y, z).

Exercice 11. Soit E un espace euclidien et ϕ une forme bilinéaire symétrique positive. Montrer que son cône des vecteurs isotropes coïncide avec son noyau.

Exercice 12. Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

On note $\|f\| = \sqrt{(f \mid f)}$ la norme euclidienne associée. Soit $e_0 \in V$ la fonction constante 1 et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $e_p \in V$ la fonction $t \mapsto \sqrt{2} \cos(2\pi p t)$. On admet que :

$$(*) \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad (e_p \mid e_q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f \in V$. Pour $q, n \in \mathbb{N}$, on pose $c_q(f) = (e_q \mid f)$ puis $S_n(f) = \sum_{q=0}^{n} c_q(f) e_q$ et $R_n(f) = f - S_n(f)$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(e_p \mid R_n(f)) = 0$ pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$.
2) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{n} c_p(f)^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t) dt.$$

3) En utilisant l'égalité $\cos(\theta) \cos(\varphi) = \dfrac{1}{2} \big(\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) \big)$, démontrer la formule $(*)$.

Réduction, diagonalisation

Exercice 13. Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Citer un théorème du cours assurant que A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A (pour calculer $P_A(X)$, on pourra faire des opérations sur les colonnes pour faire apparaître au moins un zéro), puis une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3. En déduire la signature de la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = -7x^2 + 8xy - 8xz + 5y^2 - 4yz + 5z^2.$$

Exercice 14. Diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 (très classique)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ la matrice symétrique dont tous les coefficients sont 1, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A puis en déduire la signature et le rang de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} 2\, x_i x_j.$$

2. Plus généralement, déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$:

$$Q_a(x_1, \dots, x_n) = a(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + \sum_{i<j} 2\, x_i x_j.$$

Bases orthonormées

Exercice 16. On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation cartésienne

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Quelle est sa dimension ? Construire une base orthonormée de E.

Exercice 17. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et on considère la droite vectorielle D dirigée par le vecteur de coordonnées $e_1 = (1, 1, 1)$.

– Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur soit e_1.

– Exprimer la projection orthogonale sur la droite D à l'aide de cette base.

– Donner la matrice de cette projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

2. $P = 1$, $Q = X$, $R = X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Groupe orthogonal

Exercice 19. 1. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour chacune des matrices de 1., décrire géométriquement l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ correspondante.

Exercice 20. Soit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A \in \mathrm{SO}(2)$ et calculer A^2. En déduire les caractéristiques géométriques de A.

Exercice 21. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ et soit

$$B = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p^2 - q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2 - p^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Montrer que $B \in O(2)$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel : $(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2$ si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

et on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique.

1. Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Donner une base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $f_1 \in D$ et écrire la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_D)$. Puis, en utilisant la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$, déterminer la matrice A de s_D dans la base canonique.
2. Soit n un vecteur non nul orthogonal à D. Citer une formule du cours exprimant, pour $x \in \mathbb{R}^2$ arbitraire, $s_D(x)$ en fonction de x et de n, puis en appliquant cette formule à e_1 et e_2, calculer directement $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s_D)$.

Exercice 23. Soient $(\ \mid\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et σ la symétrie orthogonale par rapport à P.
Citer une formule du cours exprimant $\sigma(x)$ en fonction de x et de n, où n est un vecteur $\neq 0$ orthogonal à P, puis en appliquant cette formule à e_1, e_2, e_3, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\sigma)$.