Examen final, 22/05/2019

Durée : 3 heures. Notes et appareils électroniques interdits.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.
On considère la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$Q(x,y,z) = x^2 + 3\,y^2 + z^2 + 4\,x\,y + 4\,y\,z.$$

1. Donner la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2. Donner une base à la fois orthonormée pour le produit scalaire usuel et orthogonale pour Q.

3. Donner la signature et le rang de Q.

4. Calculer le noyau de Q. Est-il égal à son cône des vecteurs isotropes ?

5. On considère la quadrique $\mathcal{Q}_1$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{Q}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3\,y^2 + z^2 + 4\,x\,y + 4\,y\,z = 1\}.$$

Quelle est la nature de cette quadrique ? La dessiner.

Correction
1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Par théorème spectral, les sous-espaces propres de Q sont orthogonaux. On calcule les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique : $5, -1, 1$. Elles sont simples, donc oute base de diagonalisation est orthogonale. Des vecteurs propres de norme 1 associés sont

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne une BON diagonale pour Q.

3. Q est donc de signature $(2,1)$ et de rang : 3.

4. Puisque Q est de rang 3, on a $\ker Q = \{0\}$. Le cône isotrope contient par exemple $(-1,-1,0)$. Donc $\ker Q \neq C(Q)$.

5. On déduit de la signature de Q et du fait que le second membre est constant positif que Q_1 est une hyperboloide à une nappe.

Exercice 2.
Donner la matrice dans la base canonique des applications linéaires de $\mathbf{R}^3$ suivantes :

1. le demi-tour d'axe dirigé par le vecteur $(1,0,0)$,

2. la réflexion orthogonale relativement au plan $\mathcal{P}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}$,

3. la rotation d'axe dirigé par le vecteur $(1,0,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

4. l'antirotation d'axe dirigé par le vecteur $(0,1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, on considère une isométrie affine f dont l'ensemble des points fixes est exactement une droite affine. Alors f peut-elle être :

1. l'identité,
2. une translation de vecteur non nul,
3. un demi-tour,
4. une réflexion orthogonale,
5. une symétrie centrale,
6. une réflexion glissée,
7. une rotation d'angle différent de 0 et de π,
8. une antirotation d'angle différent de 0 et de π,
9. un vissage de vecteur de translation non nul et d'angle différent de 0 et de π ?

On reportera tous les numéros des réponses exactes en ordre croissant sur la copie.

Solution : 3, 7

Exercice 4.

1. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(2x + 3y - 4z)^2 \leq 29$; dans quel cas a-t-on $(2x + 3y - 4z)^2 = 29$?
2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + y + z)^2 \leq 13/12$; dans quel cas a-t-on $(x + y + z)^2 = 13/12$?

Solution

1. L'inégalité découle de Cauchy-Schwarz appliqué à (x,y,z) et $(2,3,-4)$. On a égalité si et seulement si $x^2+y^2+z^2=1$ et on a égalité dans Cauchy-Schwarz. Or on a égalité dans Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. On en déduit qu'on a égalité si et seulement si $(x,y,z)=\pm\frac{1}{\sqrt{29}}(2,3,-4)$.
2. Comme au-dessus, l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz appliqué aux vecteurs $(\sqrt{2}x,\sqrt{3}y,2z)$ et $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{3},1/2)$. On a égalité si et seulement si $2x^2+3y^2+4z^2=1$ et on a égalité dans Cauchy-Schwarz. Or on a égalité dans Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. On en déduit qu'on a égalité si et seulement si $(x,y,z)=\pm\frac{12}{\sqrt{61}}(1/2,1/3,1/4)$.

Exercice 5.
On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^4$, muni du produit scalaire usuel. On considère un vecteur $u_0\in\mathbf{R}^4\setminus\{0\}$.

1. Donner l'expression de la projection orthogonale d'un vecteur $x\in\mathbf{R}^4$ sur la droite $D=\mathrm{vect}(u_0)$.
2. En déduire l'expression de la projection orthogonale d'un vecteur $x\in\mathbf{R}^4$ sur le sous-espace vectoriel $E=D^\perp$.

Pour la suite de l'exercice, on choisit $u_0=(1,-1,2,2)\in\mathbf{R}^4$.

3. En déduire les images des vecteurs de la base canonique par la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $E=\mathrm{vect}(u_0)^\perp$.

Soient

$$v_1=\begin{pmatrix}9\\1\\-2\\-2\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\9\\2\\2\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

4. Montrer que les vecteurs (v_1,v_2,v_3) sont dans E.
5. Montrer que la famille (v_1,v_2,v_3) forme une base de E.
6. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à (v_1,v_2,v_3) pour exhiber une base orthogonale de E.

Correction

1. $p_D(x)=\frac{(x|u_0)}{\|u_0\|^2}u_0$
2. $p_{D^\perp}(x)=x-\frac{(x|u_0)}{\|u_0\|^2}u_0$
3. Simple calcul à l'aide de la formule précédente :

$$\begin{pmatrix}9/10\\1/10\\-1/5\\-1/5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1/10\\9/10\\1/5\\1/5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1/5\\1/5\\3/5\\-2/5\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1/5\\1/5\\-2/5\\3/5\end{pmatrix}.$$

4. On reconnaît des multiples des vecteurs précédents, qui sont dans E.
5. On montre que ces vecteurs forment une famille libre (i.e. de rang 3) par pivot de Gauss. On conclut en remarquant que la dimension de E vaut 3.
6. Après calcul, on obtient :

$$1/(3\sqrt{10})(9,1,-2,-2),\quad 1/(3\sqrt{2})(0,4,1,1)\quad 1/(\sqrt{2})(0,0,1,-1).$$