Sorbonne Université
Licence de Sciences et Technologies
Mention Mathématiques
Année 2018–2019

Espaces vectoriels euclidiens et hermitiens, isométries affines (2M271)

par Laurent KOELBLEN et Patrick POLO

repris et revu par Marco MACULAN,
puis Yves COUDÈNE et Pierre-Antoine GUIHÉNEUF

Je tiens à remercier Laurent Koelblen, Patrick Polo et Marco Maculan pour nous avoir généreusement fourni les fichiers du désormais ancien LM270, le présent texte est à 99 % le leur.

pierre-Antoine Guihéneuf
Sorbonne Université
Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586 du CNRS)
http://webusers.imj-prg.fr/~pierre-antoine.guiheneuf/
pierre-antoine.guiheneuf@imj-prg.fr

TABLE DES MATIÈRES

1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques 1
1.0. Introduction 1
1.1. Formes bilinéaires 1
1.2. Formes quadratiques 6
1.3. Réduction d'une forme quadratique en « somme de carrés » 8

2. Espaces euclidiens et groupes orthogonaux O(n) 13
2.1. Espaces euclidiens. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Isométries 13
2.2. Endomorphismes auto-adjoints et théorème de diagonalisation simultanée 18
2.3. Orthogonalité. Orthonormalisation de Gram-Schmidt 22
2.4. Bases directes ou indirectes. Groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Étude de $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(3)$ 26
2.5. Appendice (†) : mesure des angles dans $\mathbb{R}^2$ 37
2.6. Appendice (†) : décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 39

3. Espaces affines, coniques et quadriques 41
3.1. Espaces affines réels 41
3.2. Barycentres et sous-espaces affines 45
3.3. Projections, symétries, points fixes 50
3.4. Espaces affines euclidiens 51
3.5. Coniques 55
3.6. Quadriques en dimension 3 61

4. Formes hermitiennes, espaces hilbertiens et groupes unitaires 65
4.0. Rappels sur les nombres complexes 65
4.1. Formes hermitiennes 65
4.2. Réduction en sommes de carrés de modules 71
4.3. Espaces hilbertiens. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Isométries 73
4.4. Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints et normaux 77
4.5. Forme normale des éléments de $\mathrm{O}(n)$ 80
4.6. Appendice (†) : espaces préhilbertiens réels ou complexes 83

CHAPITRE 1

FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES ET FORMES QUADRATIQUES

Résumé : Dans ce chapitre, on commence l'étude des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques, le cas le plus important étant sans doute celui du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$, qui sera étudié en détail dans le chapitre suivant. Dans le présent chapitre, on introduit les généralités concernant les formes bilinéaires symétriques : matrice dans une base, formule de changement de base, notion d'orthogonalité. Les résultats fondamentaux à retenir sont **??**, le théorème de Sylvester 1.3.9, et l'algorithme de réduction en « somme de carrés » 1.3.3.

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux.

1.0. Introduction

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, une forme bilinéaire ϕ sur V est un moyen d'associer à tout couple de vecteurs (v, w) un scalaire $\phi(v, w) \in \mathbb{R}$, qui dépend linéairement de v et de w. Un exemple typique est le produit scalaire usuel sur $V = \mathbb{R}^3$, dans ce cas, la fonction

$$v \mapsto \Phi(v) = \phi(v, v)$$

mesure la longueur du vecteur v ; on dit que Φ est une forme quadratique car son expression en fonction des coordonnées (x_1, x_2, x_3) de v dans une base arbitraire $\mathscr{B}$ de V est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3.

D'autres formes quadratiques apparaissent de façon naturelle. Par exemple, dans la théorie de la relativité on remplace l'espace $\mathbb{R}^3$ par l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique de Lorentz et Minkowski :

$$\Psi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

(noter que Ψ prend des valeurs > 0 et < 0 et qu'il existe des $v \in \mathbb{R}^4 - \{0\}$ tels que $\Psi(v) = 0$), elle correspond à la forme bilinéaire symétrique ψ sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}\right) = xx' + yy' + zz' - tt'.$$

Ceci conduit à étudier de façon générale, pour un espace vectoriel V de dimension finie n sur le corps $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les formes bilinéaires symétriques $V \times V \to k$ et les formes quadratiques associées.

1.1. Formes bilinéaires

Dans ce chapitre, on suppose que le corps de base k est $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***Définition 1.1.1* (Formes bilinéaires).** — Soit E un k-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie).

(1) Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\phi : E \times E \to k$ qui est linéaire en chaque variable, c.-à-d., pour tout $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda, \mu \in k$, on a :

$$\boxed{\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x, y) + \phi(x', y)} \qquad \boxed{\phi(x, \mu y + y') = \mu\phi(x, y) + \phi(x, y')}$$

[0] version du 19 février 2019

et donc $\boxed{\phi(\lambda x+x',\mu y+y')=\lambda\mu\phi(x,y)+\lambda\phi(x,y')+\mu\phi(x',y)+\phi(x',y').}$ On rappelle que les formes bilinéaires sur E forment un espace vectoriel, noté $\mathscr{L}_2(E,k)$.

(2) Une forme bilinéaire ϕ sur E est dite **symétrique** si pour tout $x,y\in E$ on a $\boxed{\phi(x,y)=\phi(y,x).}$ Les formes bilinéaires symétriques (en abrégé : **fbs**) sur E forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_2(E,k)$, qu'on notera $\boxed{\mathscr{S}_2(E,k).}$

Remarque 1.1.2. — Remarquons que, pour vérifier qu'une application $\phi : E\times E\to k$ est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de voir que ϕ est linéaire en la 1ère variable et vérifie $\phi(x,y)=\phi(y,x)$ (ces deux conditions entraînant la linéarité en la 2ème variable).

Exemple 1.1.3. — Considérons l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^2$ et notons e_1,e_2 la base canonique. Considérons les applications

$$\begin{aligned}
\phi_1\left(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2\right)&=x_1y_1+x_2y_2,\\
\phi_2\left(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2\right)&=x_1y_2+x_2y_1,\\
\phi_3\left(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2\right)&=x_1y_1,\\
\phi_4\left(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2\right)&=x_1y_2,\\
\phi_5\left(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2\right)&=x_1^2.
\end{aligned}$$

Elles sont toutes bilinéaires sauf la dernière. Les formes ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont symétriques, mais ϕ_4, ne l'est pas.

Exemple 1.1.4. — Considérons $I=[0,1]$ l'intervalle unitaire et $E=\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continue sur I à valeurs réelles. Pour toute fonction $f,g\in E$ on pose

$$\phi(f,g):=\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

L'application $\phi\colon E\times E\to\mathbb{R}$ ainsi définie est bilinéaire.

Désormais, on suppose E de dimension finie n.

***Définition 1.1.5* (Matrices symétriques et alternées)**. — Soit $A\in M_n(k)$ une matrice.

On dit que A est **symétrique** si $\boxed{{}^tA=A.}$ Ces matrices forment un sous-espace vectoriel de $M_n(k)$, qu'on note $\boxed{\mathrm{S}_n(k).}$

Lemme 1.1.6. — *On a* $\boxed{\dim\mathrm{S}_n(k)=n(n+1)/2.}$

Démonstration. — Notons N le nombre de coefficients qui sont strictement au-dessus de la diagonale ; c'est aussi le nombre de coefficients qui sont strictement en-dessous de la diagonale, et il y a n coefficients diagonaux. Donc $2N+n=n^2$, d'où $\boxed{N=n(n-1)/2.}$

Une matrice symétrique est déterminée par le choix de ses n coefficients diagonaux et de ses N coefficients au-dessus de la diagonale, d'où $\dim\mathrm{S}_n(k)=n+N=n(n+1)/2$. □

***Définition et théorème 1.1.7* (Matrice d'une fbs et changement de base)**

Soit E est un k-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

(1) *Soit ϕ une forme bilinéaire sur E. Pour tout i,j on pose $a_{ij}=\phi(e_i,e_j)$ et on considère la matrice $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Alors, pour tout $x_1,\dots,x_n\in k$ et tout $y_1,\dots,y_n\in k$ on a*

$$(*)\qquad \phi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,\phi(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,x_i\,y_j.$$

Donc, si l'on pose $X={}^t(x_1,\dots,x_n)$ et $Y={}^t(x_1,\dots,x_n)$ les vecteurs colonnes ci-dessus, on a la formule matricielle :

$$\boxed{\phi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)={}^tX\,A\,Y.}$$

En particulier, la matrice A détermine complètement la forme bilinéaire ϕ. On dit que A est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ et on la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$.

(2) *Réciproquement soit* $B \in M_n(k)$ *une matrice. Alors l'application* $\psi\colon E \times E \to k$ *définie pour tout* $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ *et tout* $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in k^n$*, par*

$$\boxed{\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = {}^tX\, B\, Y,}$$

est bilinéaire et vérifie $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi)$.

(3) *L'application* $\mu_{\mathscr{B}}\colon \mathscr{L}_2(E,k) \to M_n(k)$, $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ *est un isomorphisme de* k*-espaces vectoriels. De plus le sous-espace des fbs* $\mathscr{S}_2(E,k)$ *(resp. le sous-espaces des fba* $\mathscr{A}_2(E,k)$*) s'identifie à travers* $\mu_{\mathscr{B}}$ *au sous-espaces des matrices symétriques* $\mathrm{S}_n(k)$ *(resp. au sous-espace des matrices).*

(4) *Soient* $\mathscr{B}'$ *une autre base de* E *et* P *la matrice de passage* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$*. Alors*

$$(**) \qquad \boxed{A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = {}^tP\, A\, P.}$$

Terminologie 1.1.7.1. — On dit que $A, A' \in M_n(k)$ sont **congruentes** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $A' = {}^tPAP$.

Démonstration. — (1) Comme ϕ est bilinéaire, on a bien l'égalité $(*)$, qui montre que ϕ est déterminée par sa matrice, donc que l'application $\mu_{\mathscr{B}} : \mathscr{S}_2(E) \to \mathrm{S}_n(k)$, $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est *injective*. D'autre part, on voit que le scalaire $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, y_j \in k$ est égal au produit matriciel

$${}^tX\, A\, Y = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Démontrons que A est bien définie. En fait, supposons qu'on ait $\phi(X,Y) = {}^tX\, A'\, Y$ pour une certaine matrice $A' = (a'_{ij}) \in M_n(k)$. Comme e_i (resp. e_j) est le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème (resp. j-ème) qui vaut 1, on obtient que

$$a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = (0, \dots, 1, \dots, 0) B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a'_{ij},$$

d'où $A' = A$.

Démontrons que ϕ est complètement déterminée par A. Supposons que ϕ' soit une forme biliéaire telle que $A' := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi') = A$. En particulier, pour tout $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ on a

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = {}^tX\, A\, Y = {}^tX\, A'\, Y = \phi'\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right).$$

(2) Pour tout $B = (B_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{S}_n(k)$, l'application ψ est linéaire en les x_i, d'une part, et en les y_j, d'autre part, et elle donc bilinéaire. De plus, prenant $x_{i_0} = 1 = y_{j_0}$ et $x_i = 0 = y_j$ pour $i \neq i_0$ et $j \neq j_0$, on obtient $\phi_A(e_{i_0}, e_{j_0}) = a_{i_0, j_0}$ pour tout $i_0, j_0 = 1, \dots, n$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_A) = A$.

(3) Démontrons que l'application $\mu_{\mathscr{B}}$ est linéaire. En effet, si $\phi, \psi \in \mathscr{S}_2(E,k)$ et $s \in k$, alors $s\phi + \psi$ est la forme bilinéaire symétrique définie par $(s\phi + \psi)(u,v) = s\phi(u,v) + \psi(u,v)$ pour *tout* $u, v \in E$, donc *a fortiori* on a $(s\phi + \psi)(e_i, e_j) = s\phi(e_i, e_j) + \psi(e_i, e_j)$ pour tout i, j, d'où $\mu_{\mathscr{B}}(s\phi + \psi) = s\mu_{\mathscr{B}}(\phi) + \mu_{\mathscr{B}}(\psi)$. L'injectivité de $\mu_{\mathscr{B}}$ suit (1) et la surjectivité de (2) : l'application linéaire $\mu_{\mathscr{B}}$ est donc un isomorphisme.

Il est en outre clair que si ϕ est une fbs alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est symétrique. D'autre part, si $B = (b_{ij})$ est une matrice symétrique, pour tout $x_1, \dots, x_n \in k$ et tout $y_1, \dots, y_n \in k$ on a

$$\psi(y,x) = \psi\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{a_{ji}}_{=a_{ij}}\, y_j\, x_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, y_j = \psi(x,y),$$

et donc ψ est une forme bilinéaire symétrique. La vérification dans le cas des formes alternées est similaire et laissée au lecteur.

(4) Soient $x, y \in E$, ils correspondent dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) à des vecteurs colonnes X, Y (resp. X', Y'). D'après la formule de changement de coordonnées, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$, d'où ${}^tX = {}^tX'\, {}^tP$, et donc :

$$\phi(x,y) = {}^tX\, A\, Y = {}^tX'\, {}^tPAP\, Y'$$

ce qui entraîne $A' = {}^tP\,A\,P$. Le théorème est démontré. □

Remarque 1.1.8. — On peut interptéter le fait que $\mu_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme en disant que *se donner une forme bilinéaire symétrique sur E « est la même chose » que se donner une matrice symétrique.*

Exemple 1.1.9. — Reprenons les notations de l'exemple 1.1.3. Si on désigne par $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

***Définition et proposition 1.1.10* (Rang et noyau d'une forme bilinéaire symétrique)**
Soit ϕ une forme bilinéaire sur un k-espace vectoriel E de dimension n et soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$.

(1) *On définit le* **rang** *de ϕ par* $\mathrm{rang}(\phi) = \mathrm{rang}(A)$ *; ceci ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$.*

(2) *Le* **noyau** *$N(\phi)$ de ϕ est défini par :*

$$N(\phi) = \{y \in E \mid \forall x \in E, \quad \phi(x, y) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E, égal à $\mathrm{Ker}(A)$. [1]

(3) *On dit que ϕ est* **non dégénérée** *si* $\mathrm{rang}(\phi) = \dim E$*, i.e. si sa matrice dans une (et donc dans* toute*) base de E est inversible. Ceci équivaut à dire que $N(\phi) = \{0\}$.*

Démonstration. — (1) Soient $\mathscr{B}'$ une autre base de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Comme P et ${}^tP$ sont inversibles (on a $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$), alors la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = {}^tPAP$ a même rang que A. Ceci prouve (1).

Prouvons (2). Soit $y \in E$, représenté dans la base $\mathscr{B}$ par le vecteur colonne Y. Si $AY = 0$, alors pour $x \in E$, représenté par le vecteur colonne X, on a

$$\phi(x, y) = {}^tX\,A\,Y = 0$$

et donc $y \in N(\phi)$. Réciproquement, supposons que $y \in N(\phi)$ et notons Z le vecteur colonne AY. Alors pour tout vecteur colonne X, on a $0 = {}^tX\,Z$. En prenant pour X le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1, on obtient que la i-ème coordonnée de Z est nulle. Donc $AY = Z$ est nul, i.e. $Y \in \mathrm{Ker}(A)$. Ceci prouve l'égalité $N(\phi) = \mathrm{Ker}(A)$; en particulier, $N(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de E. Ceci redémontre aussi que $\mathrm{rang}(A) = n - \dim N(\phi)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. Enfin, on a $\mathrm{rang}(A) = n$ si et seulement si $N(\phi) = \{0\}$, ce qui prouve l'équivalence énoncée dans (3). □

Attention, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ n'est **pas** la matrice d'un endomorphisme de E ; toutefois on a la proposition suivante.

Exemple 1.1.11. — Reprenons les notations de l'exemple 1.1.3. Le noyau de ϕ_1 et ϕ_2 est trivial et donc elles sont non-dégénérées. En revanche, ϕ_3 est dégénérée : en effet, on a $N(\phi_3) = \mathrm{Vect}(e_2)$.

Proposition 1.1.12. — *Soient E un k-espace vectoriel de dimension n et ϕ une forme bilinéaire sur E.*

(1) *Pour tout $y \in E$, l'application $\theta(y) : E \to k$ définie par $\theta(y)(x) = \phi(x, y)$ est linéaire, donc appartient à l'espace dual E^*.*

(2) *L'application $\theta : E \to E^*$, $y \mapsto \theta(y)$, est linéaire.*

(3) *Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, notant $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*, la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ *définie plus haut n'est autre que* $\mathrm{Mat}_{(\mathscr{B}^*, \mathscr{B})}(\theta)$.

(4) *On a $N(\phi) = \mathrm{Ker}(\theta)$. Par conséquent, ϕ est non dégénérée si et seulement si θ est un isomorphisme $E \xrightarrow{\sim} E^*$.*

Démonstration. — (1) résulte de la linéarité de ϕ en la 1ère variable : pour $y \in E$ fixé, l'application $x \mapsto \phi(x, y)$ est linéaire en x.

Montrons (2) : il faut voir que pour tout $y, y' \in E$ et $\mu \in k$, les formes linéaires $\theta(\mu y + y')$ et $\mu\theta(y) + \theta(y')$ sont égales, c.-à-d., prennent la même valeur sur tout $x \in E$. Or, par définition, pour tout $x \in E$ on a :

$$\theta(\mu y + y')(x) \overset{\text{déf}}{=\!=} \phi(x, \mu y + y') \qquad (\mu\theta(y) + \theta(y'))(x) \overset{\text{déf}}{=\!=} \mu\theta(y)(x) + \theta(y')(x) \overset{\text{déf}}{=\!=} \mu\phi(x, y) + \phi(x, y')$$

[1] Il est parfois noté $\mathrm{Ker}(\phi)$, mais on évitera cette notation, pour éviter la confusion avec le noyau d'une application linéaire.

donc l'égalité à vérifier se ramène à l'égalité :

$$\forall x \in E, \qquad \phi(x, \mu y + y') = \mu\phi(x,y) + \phi(x,y'),$$

qui est bien vérifiée, puisque ϕ est linéaire en la 2ème variable. Ceci prouve (2). Alors, on a

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{y_0 \in E \mid \theta(y_0) = 0\} = \{y_0 \in E \mid \phi(x, y_0) = 0, \quad \forall x \in E\} = N(\phi).$$

Comme $\dim E^* = n = \dim E$, on obtient donc les équivalences :

$$\phi \text{ non dégénérée } \Leftrightarrow N(\phi) = (0) \Leftrightarrow \theta \text{ est injectif } \Leftrightarrow \theta \text{ est un isomorphisme},$$

d'où (4). Enfin, soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*. Comme $\theta(e_j)(e_i) = \phi(e_i, e_j)$, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\theta(e_j) = \sum_{i=1}^n \phi(e_i, e_j)e_i^*$ et ceci prouve que $\mathrm{Mat}_{(\mathscr{B}^*,\mathscr{B})}(\theta) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, d'où (3). □

Exemple 1.1.13. — Reprenons les notations de l'exemple 1.1.3. Pour tout $i = 1, \dots, 4$ on note par $\theta_i \colon E \to E^*$ l'application associée par la proposition précédente à la forme bilinéaire ϕ_i. Si $e_1^*, e_2^* \in E^*$ est la base duale á la base canonique, on a

$$\begin{cases} \theta_1(e_1) = e_1^* \\ \theta_1(e_2) = e_2^* \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_2(e_1) = e_2^* \\ \theta_2(e_2) = e_1^* \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_3(e_1) = e_1^* \\ \theta_3(e_2) = 0 \end{cases}$$

Orthogonalité. —

Définition 1.1.14. — Soit ϕ une forme bilinéaire sur un k-espace vectoriel E.

(1) On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont **orthogonaux** (pour ϕ) si $\phi(x,y) = 0$. Plus généralement, on dit que deux sous-ensembles X, Y de E sont orthogonaux si l'on a $\phi(x,y) = 0$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. On notera $X \perp Y$ pour signifier que X et Y sont orthogonaux.

(2) Pour tout sous-ensemble Y de E, on définit son **orthogonal** (relativement à ϕ), noté $Y^{\perp\phi}$ ou simplement $Y^\perp$, par :

$$\boxed{Y^\perp = \{x \in E \mid \phi(x,y) = 0, \quad \forall y \in Y\}}$$

Exemple 1.1.15. — Reprenons les notations de l'exemple 1.1.3 et considérons $F = \mathrm{Vect}(e_1)$. Pour tout $i = 1, \dots, 4$ désignons par $F_i^\perp$ l'orthogonal à F par rapport à la forme bilinéaire ϕ_i. Avec ces notations, on a $F_1^\perp = \mathrm{Vect}(e_2)$, $F_2^\perp = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $F_3^\perp = E$.

***Proposition 1.1.1* (Orthogonalité)**. — *Soit ϕ une forme bilinéaire sur un k-espace vectoriel E. Pour tout sous-ensembles $Y \subset E$, l'orthogonal $Y^\perp$ est un* **sous-espace vectoriel** *de E (même si Y n'en est pas un). De plus, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\boxed{Y \subseteq Z \Longrightarrow Z^\perp \subseteq Y^\perp\,;}$

(2) $\boxed{Y^\perp = \mathrm{Vect}(Y)^\perp\,;}$

(3) *Si Y est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille génératrice de Y, alors*

$$\boxed{Y^\perp = \{f_1, \dots, f_p\}^\perp = \{x \in E \mid \phi(x, f_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p\}.}$$

En particulier, on a $N(\phi) = E^\perp = \{x \in E \mid \phi(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\}$.

Démonstration. — Soient $x, x' \in Y^\perp$ et $\lambda \in k$, alors on a, pour tout $y \in Y$, $\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x', y) = 0$, ce qui montre que $\lambda x + x' \in Y^\perp$. Donc $Y^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il est immédiat que si $Y \subseteq Z$, alors $Z^\perp \subseteq Y^\perp$ car si $x \in Z^\perp$ alors x est orthogonal à tout élément de Z, donc x est *a fortiori* orthogonal à tout élément de Y (puisque $Y \subseteq Z$), donc $x \in Y^\perp$.

Comme $Y \subseteq \mathrm{Vect}(Y)$, ceci donne déjà l'inclusion $\mathrm{Vect}(Y)^\perp \subseteq Y^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in Y^\perp$ et soit v un élément arbitraire de $\mathrm{Vect}(Y)$, par définition, v s'écrit comme une combinaison linéaire finie $v = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r$, avec $y_i \in Y$ et $\lambda_i \in k$; alors on a

$$\phi(x, v) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underbrace{\phi(x, y_i)}_{=0} = 0$$

et donc $x \in \mathrm{Vect}(Y)^\perp$. Ceci montre l'inclusion $Y^\perp \subseteq \mathrm{Vect}(Y)^\perp$, d'où l'égalité $\mathrm{Vect}(Y)^\perp = Y^\perp$. L'assertion (2) est démontrée. □

***Théorème 1.1.16* (Orthogonal d'un sous-espace)**. — *Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique ou alternée sur un k-espace vectoriel E de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors,*

(1) $\boxed{F \subseteq (F^\perp)^\perp}$ *et* $\boxed{\dim F^\perp \geq \dim E - \dim F.}$

(2) *Si ϕ est non dégénérée, on a* $\boxed{\dim F^\perp = \dim E - \dim F}$ *et* $\boxed{F = (F^\perp)^\perp.}$

(3) *Si $F \cap F^\perp = \{0\}$, alors* $\boxed{E = F \oplus F^\perp.}$

Démonstration. — Posons $r = \dim F$ et $n = \dim E$.

(1) Soit $f \in F$, pour tout $x \in F^\perp$ on a $\phi(f, x) = 0$, d'où $f \in (F^\perp)^\perp$. Ceci montre la première assertion. Prouvons la seconde.

Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ de E, et soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$, i.e. $a_{ij} = \phi(f_i, f_j)$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

D'après le point (2) de 1.1.1, $F^\perp$ est formé des vecteurs $v = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \in E$ tels que $\phi(f_i, v) = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. Comme $\phi(f_i, x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) = \sum_{j=1}^n x_j\, \phi(f_i, f_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\, x_j$, ceci équivaut à dire que le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire homogène :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 & + \cdots + & a_{1n}\, x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1r}\, x_1 & + \cdots + & a_{rn}\, x_n & = 0 \end{cases}$$

dont la matrice B est formée des r premières lignes de A. Comme l'espace des solutions du système est de dimension $n - \operatorname{rang}(B)$, on obtient :

$$\dim F^\perp = n - \operatorname{rang}(B) \ge n - r,$$

ce qui prouve la seconde assertion de (1).

(2) Supposons ϕ non dégénérée. Alors A est de rang n, i.e. ses lignes sont linéairement indépendantes, en particulier les r premières lignes le sont, donc la matrice B est de rang r, et donc $\dim F^\perp = n - r$. Remplaçant alors F par $F^\perp$, on obtient l'égalité $\dim(F^\perp)^\perp = n - (n - r) = r$, et par conséquent l'inclusion $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ est une égalité.

(3) Supposons $F \cap F^\perp = \{0\}$ (sans supposer ϕ non dégénérée). Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe, et le sous-espace $F \oplus F^\perp$ de E est de dimension $d = r + \dim F^\perp$. D'après (1), on a $d \ge n$, d'où $E = F \oplus F^\perp$ (et $\dim F^\perp = n - r$). Ceci termine la preuve de (3) et du théorème. □

***Définition 1.1.17* (Restriction à un sous-espace).** — Soit ϕ une forme bilinéaire sur E, et soit F un sous-espace de E.

(1) On note ϕ_F la forme bilinéaire sur F obtenue en restreignant ϕ à $F \times F$, i.e. $\phi_F(x, y) = \phi(x, y)$ pour tout $x, y \in F$; on l'appelle la *restriction* de ϕ à F.

(2) On a $F \cap F^\perp = \{x \in F \mid \phi(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in F\} = N(\phi_F)$. Donc l'assertion (4) de 1.1.16 peut se récrire comme suit : « *si ϕ_F est non dégénérée, alors $E = F \oplus F^\perp$* ».

Remarque 1.1.17.1. — Attention, même si ϕ est non dégénérée, ϕ_F ne l'est pas nécessairement. Par exemple, soit ψ la forme bilinéaire symétrique ϕ_2 est non dégénérée. Cependant, on a $\phi_2(e_1, e_1) = 0 = \phi_2(e_2, e_2)$ donc pour $F = \mathbb{R}e_1$ (ou $\mathbb{R}e_2$), on a $(\phi_2)_F = 0$.

1.2. Formes quadratiques

***Définition 1.2.1* (Formes quadratiques).** — Soit E un k-espace vectoriel de dimension n. Une **forme quadratique** Q sur E est une fonction $E \to k$ de la forme $x \mapsto \phi(x, x)$, où ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

***Proposition 1.2.1* (Égalités de polarisation).** — *Comme $\phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + \phi(y, y) + 2\phi(x, y) = Q(x) + Q(y) + 2\phi(x, y)$, on a les égalités :*

$$(*) \qquad \boxed{\phi(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(Q(x + y) - Q(x - y)\big)}$$

qui montrent que : ϕ <u>est entièrement déterminée</u> par Q ; on dit que ϕ est la **forme polaire** *de Q.*

***Proposition 1.2.2* (Expressions en coordonnées).** — *On munit E d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.*

(1) *Si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ est la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ (i.e. $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$), on a $a_{ji} = a_{ij}$ puisque ϕ est symétrique. Alors pour tout $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ dans E, on a :*

$$Q(u) = \phi(\sum_i x_ie_i, \sum_j x_je_j) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}\, x_ix_j.$$

Donc $Q(u)$, considéré comme une fonction $Q(x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de u dans la base $\mathscr{B}$, est donné par :

$$(\star) \qquad \boxed{Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}\, x_ix_j}$$

on prendra garde au facteur 2 qui apparaît avant les « doubles produits » x_ix_j !

(2) *Réciproquement, si c'est Q qui est donnée par une formule explicite $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_i\, x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}\, x_ix_j$ (les x_i étant les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$), alors sa forme polaire ϕ est donnée par :*

$$(\star') \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in k^n, \qquad \phi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i=1}^n b_i\, x_iy_i + \sum_{1\le i<j\le n} \frac{b_{ij}}{2}\,(x_iy_j + x_jy_i)$$

et donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ a pour coefficients diagonaux les b_i, mais ses coefficients non diagonaux sont les $b_{ij}/2$.

***Définition 1.2.2* (Termes carrés et doubles produits).** — Dans la formule $(\star)$, les termes de la première somme $\sum_{i=1}^n a_{ii}\, x_i^2$ sont appelés **termes carrés** et ceux de la deuxième somme $\sum_{i<j} 2a_{ij}\, x_ix_j$ **double produits**.

***Définition 1.2.3* (Formes quadratiques équivalentes).** — On dit que deux formes quadratiques $Q : E \to k$ et $Q' : E' \to k$ sont **équivalentes** s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels[(2)] $f : E \to E'$ tel que $Q = Q' \circ f$. Cela est équivalent au fait que les matrices de Q et Q' sont congruentes.

***Définitions 1.2.4* (Rang et noyau d'une forme quadratique).** — Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie, Q une forme quadratique sur E, et ϕ sa forme polaire.

(1) On définit le rang et le noyau de Q par :

$$\boxed{\mathrm{rang}(Q) = \mathrm{rang}(\phi)} \qquad \boxed{N(Q) = N(\phi).}$$

(2) Attention ! $N(Q)$ n'est **pas** égal, en général, à l'ensemble $C(Q) = \{x \in E \mid Q(x) = 0\}$. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope** (pour Q) si $Q(x) = 0$, et l'ensemble $C(Q)$ des vecteurs isotropes s'appelle le **cône isotrope** de Q. Ce n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E, mais c'est un *cône*, i.e. il vérifie la propriété suivante : si $x \in C(Q)$ et $\lambda \in k$, alors $\lambda x \in C(Q)$.

Remarque 1.2.5. — On a toujours $\boxed{N(Q) \subseteq C(Q)}$ mais l'inclusion est en général stricte. Par exemple, dans le cas considéré en 1.1.17.1, on a $N(Q) = N(\psi) = \{0\}$ mais le cône isotrope est la réunion des deux droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$.

***Définition 1.2.6* (Bases orthogonales).** — Soit E un k-espace vectoriel de dimension n et soient ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E, et Q la forme quadratique associée. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E

a) On dit que $\mathscr{B}$ est une base **orthogonale** pour ϕ (ou pour Q) si l'on $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

b) Ceci équivaut à dire que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est **diagonale** ; si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, ceci équivaut encore à dire que $Q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1\, x_1^2 + \cdots + \lambda_n\, x_n^2$.

(2) Un *isomorphisme d'espaces vectoriels* est une bijection linéaire.

1.3. Réduction d'une forme quadratique en « somme de carrés »

Remarque 1.3.1. — Soit E un k-espace vectoriel de dimension n. D'après 1.2.1, *il revient au même* de se donner sur E une forme quadratique Q ou sa forme polaire ϕ.

Le langage des formes quadratiques permet d'être plus concis : si E est muni d'une base $\mathscr{B}$, et donc de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à cette base (par exemple, si $E = k^n$), on dira simplement, disons pour $n = 3$: « soit Q la forme quadratique $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$ », ce qui est plus rapide que d'écrire : soit ϕ la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\phi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = \\ ax_1y_1 + bx_2y_2 + cx_3y_3 + \frac{d}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{e}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{f}{2}(x_2y_3 + x_3y_2).$$

De même, le fait d'écrire une forme quadratique comme un polynôme (homogène) de degré 2 en les coordonnées x_i, i.e.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}\, x_i x_j$$

permet d'effectuer sur ce polynôme des opérations algébriques simples, qui équivalent à trouver une base orthogonale pour ϕ : c'est ce qu'on explique ci-dessous.

Définition 1.3.2. — Soient E un k-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique sur E et ϕ sa forme polaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans cette base, i.e. x_i désigne en fait la forme linéaire $f_i = e_i^*$ sur E.

(1) On dit que Q s'écrit dans la base $\mathscr{B}$ comme **somme de carrés de formes linéaires indépendantes** si l'expression de Q en fonction des coordonnées x_i est de la forme

$$Q = q_1\, x_1^2 + \cdots + q_n\, x_n^2.$$

D'après 1.2.1, ceci équivaut à dire que la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ est **diagonale**, avec les q_i pour coefficients diagonaux.

(2) Les formes linéaires $f_i = e_i^*$ sont linéairement indépendantes ($\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$), d'où la terminologie « somme de carrés de **formes linéaires indépendantes** ». En pratique, pour abréger on écrira souvent « somme de carrés », mais il est essentiel de s'assurer que les formes linéaires en question sont bien linéairement indépendantes (voir plus bas).

***Théorème 1.3.3* (Réduction d'une forme quadratique en somme de carrés ou algorithme de Gauss)**

Soient E un k-espace vectoriel de dimension n, et Q une forme quadratique sur E, donnée dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ par

$$(*) \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in k^n, \qquad Q(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \sum_i b_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j.$$

(1) *Par une suite d'opérations « élémentaires » (décrites dans la démonstration), on peut trouver un nouveau système de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ sur E, dans lequel Q s'écrit comme une somme de carrés, i.e. :*

$$(**) \qquad Q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

En particulier, $\mathscr{B}$ est une base orthogonale pour Q.

(2) *Le nombre de coefficients a_i non nuls est égal à $r = \mathrm{rang}(Q)$, et si $k = \mathbb{R}$, on note p (resp. q) le nombre de coefficients a_i qui sont > 0 (resp. < 0). Le couple (p, q) est appelé la* **signature** *de Q.*

(3) *De plus, $N(\phi)$ est le sous-espace vectoriel de E défini par les équations $y_i = 0$, pour i parcourant l'ensemble des $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_i \neq 0$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que si Q s'écrit sous la forme $(**)$ dans une base $\mathscr{B}'$, alors la matrice de sa forme polaire y est diagonale, avec les λ_i pour coefficients diagonaux, d'où les assertions (2) et (3) du théorème.

Il reste à donner une démonstration « algorithmique » de l'assertion (1). On procède par récurrence sur le nombre n de variables. Si $n = 1$ on a $Q(x_1e_1) = b_1x_1^2$, et $(**)$ est vérifié. On peut donc supposer $n > 1$ et le résultat démontré pour $n - 1$. Distinguons deux cas.

(a) Si dans l'écriture $(*)$ plus haut, il existe un coefficient « diagonal » b_i non nul, on peut supposer, quitte à changer l'ordre des coordonnées, que $b_1 \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_i b_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{i,j} x_i x_j \\
&= b_1 x_1^2 + x_1 \underbrace{\sum_{j\geq 2} b_{1,j} x_j}_{2b_1 A} + \underbrace{\sum_{i>1} b_i x_i^2 + \sum_{1<i<j} b_{i,j} x_i x_j}_{B} \\
&= b_1\big(x_1^2 + 2x_1 A\big) + B \\
&= b_1\big(x_1 + A\big)^2 - b_1 A^2 + B \\
&= \lambda_1 y_1^2 + Q',
\end{aligned}$$

avec $\lambda_1 = b_1$, $y_1 = x_1 + A$ et $Q'(x) = -b_1 A^2 + B$. La forme quadratique Q' ne dépend que des variables $x_2, \ldots, x_n$. Pour sa part, l'opération $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \cdots, x_n)$ est bien un changement de coordonnées, car sa matrice est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc inversible.

Par hypothèse de récurrence on peut faire un changement de coordonnées $(x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_2, \ldots, y_n)$ tel que $Q'(x_2, \ldots, x_n) = \lambda_2\, y_2^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2$ d'où,

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1\, y_1^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2,$$

ce qui prouve le résultat voulu dans ce cas.

(b) Supposons au contraire que **tous** les coefficients « diagonaux » b_i soient nuls. Si $Q = 0$, il n'y a rien à montrer ; sinon on peut supposer, quitte à changer l'ordre des coordonnées, que $b_{12} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_i b_{1,2} x_1 x_2 + x_1 \underbrace{\sum_{j\geq 3} b_{1,j} x_j}_{b_{1,2}A_1} + x_2 \underbrace{\sum_{j\geq 3} b_{2,j} x_j}_{b_{1,2}A_2} + \underbrace{\sum_{2<i<j} b_{i,j} x_i x_j}_{B} \\
&= b_{1,2}\big(x_1 x_2 + x_1 A_1 + x_2 A_2\big) + B \\
&= b_{1,2}\big(x_1 + A_2\big)\big(x_2 + A_1\big) - a_{1,2} A_1 A_2 + B \\
&= \lambda_1 \big(x_1 + A_2\big)\big(x_2 + A_1\big) + Q'.
\end{aligned}$$

On utilise alors un principe similaire aux formules de polarisation pour le premier terme, à savoir la formule $4XY = (X+Y)^2 - (X-Y)^2$:

$$Q(x) = \lambda_1 \left(\frac{x_1 + x_2 + A_1 + A_2}{2}\right)^2 - \lambda_1 \left(\frac{x_1 - x_2 + A_1 - A_2}{2}\right)^2 - a_{1,2} A_1 A_2 + B.$$

On pose alors $y_1 = (x_1 + x_2 + A_1 + A_2)/2$, $y_2 = (x_1 - x_2 + A_1 - A_2)/2$ et $y_i = x_i$ pour $i > 2$. L'application $(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, x_3 \ldots, x_n)$ est bien un changement de coordonnées, car sa matrice est de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 1 & -1 & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right)$$

et est donc de déterminant $-2 \neq 0$. Comme dans le premier cas, par hypothèse de récurrence on peut faire un changement de coordonnées $(x_3, \ldots, x_n) \mapsto (y_3, \ldots, y_n)$ tel que $Q'(x_3, \ldots, x_n) = \lambda_3\, y_3^2 + \cdots + \lambda_n\, y_3^2$ d'où, en posant $\lambda_2 = \lambda_1$,

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1\, y_1^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

□

Illustrons ceci par deux exemples : dans le premier n'apparaissent que des changements de coordonnées du type **(a)**.

Exemple 1.3.4. — Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique

$$Q = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

L'algorithme donne :

$$\begin{aligned} Q &= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{4} + x_2^2 \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2, \end{aligned}$$

qui est de signature $(2, 0)$.

Calcul d'une base othogonale. — À la fin de l'algorithme, on obtient un changement de base $Y = PX$, où $X = (x_1, \cdots, x_n)$ sont les anciennes variables, $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ les nouvelles, et P est la matrice de passage des anciennes variables vers les nouvelles (elle est donc inversible). La forme Q s'exprimait

$$Q(X) = {}^tXAX,$$

avec A symétrique, et s'écrit désormais sous la forme

$$Q(X) = {}^tYDY,$$

avec D diagonale, de coefficients les λ_i. On a donc, pour tout X,

$${}^tXAX = {}^tYDY = {}^t(PX)D(PX) = {}^tX({}^tPDP)Y,$$

ce qui implique que $A = {}^tPDP$ (on vient de redémontrer la formule de changement de base 1.1.7). Autrement dit, réduire une forme quadratique Q en somme de carrés revient à trouver une matrice diagonale congruente à la matrice de Q.

En coordonnées, si on écrit $P^{-1} = (e'_1, \cdots, e'_n)$, on obtient

$$Q(y_1e'_1 + \cdots + y_ne'_n) = Q(P^{-1}Y) = Q(X) = {}^tYDY = \lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2.$$

Exemple 1.3.5. — Reprenons l'exemple 1.3.4. On avait

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2,$$

par conséquent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Donc si on pose $e'_1 = (1, 0)$ et $e'_2 = (-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$, on obtient

$$Q(y_1e'_1 + y_2e'_2) = y_1^2 + y_2^2.$$

Exemple 1.3.6. — Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

On est dans le deuxième cas de l'algorithme (pas de terme carrés), on écrit donc

$$\begin{aligned} Q &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_3) - x_3^2 \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

La forme est donc de signature $(1, 2)$.

***Exemple 1.3.7* (Erreur à ne pas commettre !).** — Reprenons le calcul précédent. Il ne faut **pas** écrire que

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_3}{2}\right)^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + y_5^2 - y_6^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$, $y_3 = x_2 + x_3$, $y_4 = x_2 - x_3$, $y_5 = x_3 + x_1$, $y_6 = x_3 - x_1$, et conclure que la signature est (3,3) et le rang 6. Ceci est erroné (et la conclusion absurde !) : comme on part ici d'une forme quadratique Q en 3 variables, son rang est $r \leq 3$ et donc on doit obtenir à la fin une somme ayant **au plus** 3 termes. Or ici on en a écrit 6 ; l'erreur est que l'on n'a pas fait un vrai « changement de coordonnées », car on a introduit trop de formes linéaires, qui ne sont plus linéairement indépendantes !

Donc, pour ne pas se tromper dans ces calculs, il vaut mieux procéder pas à pas, en effectuant à chaque pas une transformation de type **(a)** ou **(b)**. Il ne faut pas effectuer plusieurs opérations en même temps !

La possibilité d'effectuer des réductions supplémentaires dans l'algorithme de Gauss dépend de propriétés « arithmétiques » de k, c.-à-d., de quels éléments de k sont des carrés. Lorsque $k = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, on peut donner des versions plus précises.

***Théorème 1.3.8* (Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$).** — *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, Q une forme quadratique sur E et ϕ sa forme polaire. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est la matrice diagonale de termes diagonaux $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, le nombre de 1 étant égal à $r = \mathrm{rang}(\phi)$; si l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, on a alors $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$.*

Démonstration. — Soit $r = \mathrm{rang}(\phi)$. D'après le théorème 1.3.3, il existe une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $Q(e_i) \neq 0$ pour $i \leq r$, et $Q(e_i) = 0$ pour $i > r$. Pour tout $i = 1, \dots, r$, soit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_i^2 = Q(e_i)$. Remplaçant e_i par e_i/λ_i, pour $i \leq r$, on obtient une base $\mathscr{B}$ ayant la propriété énoncée dans le théorème. □

On montre maintenant que la signature d'une forme quadratique, vue dans le théorème 1.3.3, ne dépend pas de base orthogonale choisie.

***Théorème 1.3.9* (Théorème d'inertie de Sylvester).** — *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique sur E et ϕ sa forme polaire.*

(1) *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour ϕ et soient p (resp. q) le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. < 0). Alors p et q ne dépendent pas de la base orthogonale choisie.*

(2) *Le couple (p, q) s'appelle la* **signature** *de Q (ou de ϕ) ; on a $\mathrm{rang}(\phi) = p + q$.*

(3) *De plus, on peut choisir $\mathscr{B}$ de sorte que la matrice diagonale $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ ait pour termes diagonaux $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, le nombre de 1 (resp. -1) étant p (resp. q).*

Démonstration. — Posons $r = \mathrm{rang}(\phi)$. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E orthogonales pour ϕ. Notons p (resp. p') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. $Q(f_i) > 0$) et q (resp. q') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) < 0$ (resp. $Q(f_i) < 0$). Alors

$$r = p + q = p' + q'$$

et il s'agit de montrer que $q = q'$ et $p = p'$. Quitte à renuméroter les éléments de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on peut supposer que

$$(\star) \qquad \begin{cases} Q(e_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \dots, p \\ Q(e_i) < 0 & \text{pour } i = p+1, \dots, p+q \\ Q(e_i) = 0 & \text{pour } i > p+q = r\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q(f_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \dots, p' \\ Q(f_i) < 0 & \text{pour } i = p'+1, \dots, p'+q' \\ Q(f_i) = 0 & \text{pour } i > p'+q' = r\,. \end{cases}$$

Notons P_+ le sous-espace de E engendré par les vecteurs e_i tels que $Q(e_i) \geq 0$. Ces vecteurs sont au nombre de $n - q$, donc $\dim P_+ = n - q$. Soit x un élément arbitraire de P_+, écrivons $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, avec $I = \{1, \dots, p\} \cup \{r+1, \dots, n\}$; alors, d'après $(\star)$, on obtient

$$(1) \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2\, Q(e_i) \geq 0.$$

D'autre part, soit P'_- le sous-espace de E engendré par les vecteurs f_j tels que $Q(f_j) < 0$. Ces vecteurs sont au nombre de q', donc $\dim P'_- = q'$. Soit y un élément non nul de P'_-, on peut écrire $y = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} y_j f_j$, avec au moins l'un des y_j non nul (car $y \neq 0$). Alors, d'après $(\star)$ à nouveau, on obtient

$$(2) \qquad Q(y) = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} y_j^2\, Q(f_j) < 0.$$

Par conséquent, on a $P_+ \cap P'_- = \{0\}$ et donc

$$n = \dim E \geq \dim P_+ + \dim P'_- = n - q + q'$$

d'où $q \geq q'$. Échangeant les rôles des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on obtient de même $q' \geq q$, d'où $q = q'$, et de même $p = p'$. Ceci prouve la première assertion du théorème.

Voyons la deuxième assertion. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ comme ci-dessus ; pour $i = 1, \dots, p+q$, notons $|Q(e_i)| > 0$ la valeur absolue de $Q(e_i)$. En remplaçant e_i par $e_i/\sqrt{|Q(e_i)|}$, pour $i = 1, \dots, p+q$, on obtient une base orthogonale ayant la propriété énoncée dans le théorème. □

CHAPITRE 2

ESPACES EUCLIDIENS ET GROUPES ORTHOGONAUX O(n)

Résumé : Ce chapitre constitue le coeur de la partie « géométrique » du cours. Dans la section 1, on introduit les espaces vectoriels euclidiens, dont le prototype est $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard, puis on démontre l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui assure que le produit scalaire donne naissance à une « norme euclidienne » (d'où une notion de « distance », cf. 2.1.5). On introduit ensuite le groupe $\mathrm{O}(n)$ des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Dans la section 2, on on démontre l'important théorème de diagonalisation simultanée 2.2.9. Dans la section 3, on introduit les projections et symétries orthogonales, ainsi que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Enfin, dans la section 4, on étudie en profondeur les isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. En résumé, ce chapitre contient beaucoup de résultats nouveaux et importants, qu'il faut essayer d'assimiler !

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux. Par ailleurs, des *compléments de cours*, pour les étudiants intéressés, sont donnés dans des appendices à la fin du chapitre ; ces passages n'interviendront pas dans les évaluations.

2.1. Espaces euclidiens. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Isométries

***Définitions 2.1.1* (Produits scalaires et espaces euclidiens).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie.

(1) Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée (i.e. $Q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$). On dit que Q (ou ϕ) est **définie positive** si l'on a :

(Déf. Pos.) $$\boxed{\forall x \in E - \{0\}, \quad Q(x) = \phi(x,x) > 0.}$$

Dans ce cas, on dit que ϕ est un **produit scalaire** et on note souvent $\phi(x,y) = (x \mid y)$.

Remarquons que si Q (ou ϕ) est définie positive, elle est <u>non-dégénérée</u> : en effet, si $x \in N(\phi)$, on a $0 = \phi(x,y)$ pour tout $y \in E$, en particulier $\phi(x,x) = 0$, d'où $x = 0$.

(2) Dans ce cas, on dit que : « E, *muni de* $(\ \mid\ )$ » (ou que : « *le couple* (E,ϕ) ») est un **espace euclidien**[1]. Pour abréger, on écrira souvent : « Soit E un espace euclidien », sans préciser le produit scalaire $(\ \mid\ )$, celui-ci étant sous-entendu.

Exemples 2.1.2. — (1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard :

$$(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \qquad \text{si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et de la forme quadratique associée $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, est un espace euclidien de dimension n. Pour ce produit scalaire, la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i \mid e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon.

---

[0] Version du 19 février 2019.

[1] En fait, on réserve d'habitude cette terminologie au cas où E est de dimension finie ; sinon on dit que E est un espace *préhilbertien réel* (voir l'explication de cette terminologie dans l'Appendice 4.6 à la fin du dernier chapitre). Nous n'utiliserons pas cette terminologie.

(2) L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,,$$

est un espace euclidien, qui n'est pas de dimension finie.

***Définition 2.1.3* (Familles et bases orthonormées).** — Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien.

(1) Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs est dite **orthonormée** si $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

(2) Supposons E de dimension n. Une **base orthonormée** est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est une famille orthonormée, i.e. qui vérifie $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

Dans la suite, on abrégera souvent « base orthonormée » en : b.o.n. ou BON.

Proposition 2.1.1. — *Toute famille orthonormée est libre. En particulier, si $\dim E = n$, toute famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de cardinal n est une base orthonormée de E.*

Démonstration. — Supposons qu'on ait une relation $0 = t_1 e_{i_1} + \cdots + t_p e_{i_p}$, avec $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts, et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Fixons un indice $r \in \{1, \dots, p\}$ et appliquons $(e_{i_r} \mid\ )$ à l'égalité précédente. Comme $(e_{i_r} \mid e_{i_s}) = 0$ pour $s \neq r$, on obtient $0 = t_r(e_{i_r} \mid e_{i_r}) = t_r$, d'où $t_r = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre. □

***Théorème 2.1.4* (Existence de b.o.n.).** — *Soit E un espace euclidien de dimension n. Alors E admet une base orthonormée.*

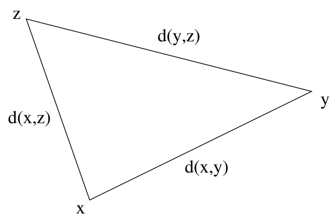
Démonstration. — D'après le théorème d'inertie de Sylvester 1.3.9, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthogonale (i.e. $(e_i \mid e_j) = 0$ pour $i \neq j$) et telle que $(e_i \mid e_i) \in \{1, -1, 0\}$; or comme $(\ \mid\ )$ est défini positif on a nécessairement $(e_i \mid e_i) = 1$, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. □

***Définition 2.1.5* (Normes).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **norme** $\|\cdot\|$ sur E est une application $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, on a $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ (où $|t|$ est la valeur absolue de t).
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$.

Remarque. L'inégalité précédente est nommée **inégalité triangulaire**, pour la raison suivante. Si on pose $d(x,y) = \|y - x\|$, pour tout $x, y \in E$, alors, compte-tenu de (1) et (2) ci-dessus, (3) équivaut à dire (en posant $u = y - x$, $v = z - y$) que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une **distance** sur E, i.e. vérifie :

(1′) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(2′) $d(x,y) = d(y,x)$.
(3′) Inégalité triangulaire : pour tout $x, y, z \in E$, on a : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



***Théorème 2.1.6* (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)**

Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien et soit $Q(x) = (x \mid x)$ la forme quadratique associée.

(1) *On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\text{(CS)} \qquad \boxed{\forall x, y \in E, \quad (x \mid y)^2 \leq Q(x)Q(y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

(2) *Par conséquent, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, appelée la* **norme euclidienne** *associée à $(\ \mid\ )$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se récrit comme suit (où dans le terme de gauche $|\cdot|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$) :*

$$\text{(CS)} \qquad \boxed{\forall x, y \in E, \quad |(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.}$$

Démonstration. — Vous avez normalement déjà vu une preuve de cette inégalité dans le module 2M216. Voici une autre preuve.

Si les vecteurs x et y sont liés, alors on a l'égalité $(x \mid y)^2 = Q(x)Q(y)$, simplement parce qu'on peut alors écrire $x = \lambda y$ (ou le contraire si $y = 0$), et donc $(x \mid y)^2 = (\lambda y \mid y)^2 = \lambda^2 (y \mid y)^2 = \lambda^2 Q(y)^4 = Q(\lambda y)^2 Q(y)^2 = Q(x)^2 Q(y)^2$.

Si ces vecteurs forment une famille libre, on se place dans le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{vect}(x, y) \subset E$. On considère alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \phi(x,x) & \phi(x,y) \\ \phi(y,x) & \phi(y,y) \end{pmatrix},$$

qui est la matrice de la forme ϕ associée à $Q_{|F}$ dans la base (x, y) de F. Le théorème 1.3.9 affirme que A peut être diagonalisée, et que les coefficients diagonaux de la matrice diagonale associée sont tous égaux à 1, car $Q_{|F}$ est définie positive. On peut donc écrire $A = {}^tPI_nP$, où P est la matrice de passage de la base (x, y) dans une base de diagonalisation de la forme $Q_{|F}$. On a donc $\text{dét}(A) = \text{dét}(P)^2 > 0$. Le calcul de ce déterminant en fonction des coordonnées de A donne alors

$$\phi(x,x)\phi(y,y) - \phi(x,y)\phi(y,x) = \text{dét}(P)^2 > 0, \tag{1}$$

soit

$$\phi(x,y)^2 < Q(x)Q(y).$$

Cela démontre le premier point du théorème.

Prouvons maintenant que $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E. Comme $(\ \mid\ )$ est défini positif, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $|t| = \sqrt{t^2}$ et donc

$$\|t\,x\| = \sqrt{t^2\,(x \mid x)} = |t| \cdot \|x\|.$$

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,;$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x \mid y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. □

Remarque 2.1.7. — Si on reprend l'égalité (1) dans le cas où Q est le produit scalaire canonique, on retombe sur

$$(x|y)^2 + \text{dét}(x,y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2.$$

Rappelons que la quantité $\text{dét}(x, y)$ a une interprétation géométrique : c'est l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs x et y.

Récrivons certaines conséquences de l'égalité $(x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (y \mid y) + 2(x \mid y)$ en utilisant la norme $\|\cdot\|$ (ou plutôt son carré) :

Proposition 2.1.8 **(Pythagore, parallélogramme et médiane, polarisation)**

Soit E un espace euclidien, et soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\ \mid\ )$. On a les égalités suivantes :

(Pythagore) $\quad \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 \quad$ si $x_1, \ldots, x_n$ sont orthogonaux

(Parallélogramme/Médiane) $\quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(Polarisation) $\quad 4(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

Démonstration. — L'égalité de Pythagore est immédiate si $n = 2$, et dans ce cas on a même la réciproque : si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ alors $(x_1 \mid x_2) = 0$. L'égalité pour n vecteurs orthogonaux s'obtient par récurrence sur n. On prendra garde que la réciproque est fausse pour $n \geq 3$: prendre par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien les vecteurs $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 + e_2$, $x_3 = e_2 - e_1$.

Les deux autres égalités s'obtiennent en ajoutant (resp. soustrayant) les égalités :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y \mid x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y) \\ \|x - y\|^2 &= (x - y \mid x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y) \end{aligned}$$

□

Remarques 2.1.8.1. — La deuxième égalité s'appelle « identité du parallélogramme », car elle exprime que dans le parallélograme construit sur les vecteurs x et y, la somme des carrés des longueurs des quatre côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales (qui sont $x+y$ et $x-y$). Elle s'appelle aussi « identité de la médiane », car dans le triangle construit sur les vecteurs x et y, la « médiane » joignant 0 au milieu du côté $x-y$ est $(x+y)/2$, et l'on a donc une formule exprimant (le carré de) la longueur de la médiane en fonction de la longeur des côtés :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4}\ .$$

Enfin, la dernière égalité est appelée « identité de polarisation », car elle exprime en fonction de la forme quadratique $Q(x) = \|x\|^2$ le produit scalaire, qui est la « forme polaire » de Q. On l'a déjà rencontrée dans le Chap. 4 sous la forme $4\phi(x,y) = Q(x+y) - Q(x-y)$.

Avant d'introduire la définition suivante, rappelons que la fonction cosinus induit une **bijection de** $[0,\pi]$ **sur** $[-1,1]$ (on a $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, et cos est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$).

***Définition 2.1.9* (Angle non orienté de deux vecteurs non nuls).** — Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace euclidien et soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soient u,v deux vecteurs non nuls. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|(u \mid v)| \le \|u\|\cdot\|v\| \qquad \text{d'où} \qquad -1 \le \frac{(u \mid v)}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1$$

donc il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{(u \mid v)}{\|u\|\cdot\|v\|}}$ i.e. $\boxed{(u \mid v) = \cos(\theta)\,\|u\|\cdot\|v\|.}$ On appelle θ **l'angle non-orienté** des vecteurs u et v, il ne change pas si l'on échange u et v.

***Définition et proposition 2.1.10* (Isométries vectorielles).** — *Soient E,F deux espaces euclidiens de même dimension n, notons $(\ |\ )_E$ et $\|\cdot\|_E$ (resp. $(\ |\ )_F$ et $\|\cdot\|_F$) le produit scalaire et la norme euclidienne sur E (resp. F). Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

  (a) *f préserve la norme :* $\boxed{\forall x \in E, \quad \|x\|_E = \|f(x)\|_F}$

  (b) *f préserve le produit scalaire :* $\boxed{\forall x,y \in E, \quad (x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F}$

  (c) *Pour toute b.o.n. $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, la famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une b.o.n. de F.*

  (d) *Il existe une b.o.n. $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ soit une b.o.n. de F.*

(2) *Sous ces conditions, on dit que f est une* **isométrie** *vectorielle de E sur F*

(3) *Dans ce cas, f est bijective, et son inverse f^{-1} est aussi une isométrie.*

Démonstration. — Supposons que f préserve la norme, et soient $x,y \in E$. Alors $\|x+y\|_E^2 = \|f(x+y)\|_F^2 = \|f(x)+f(y)\|_F^2$, et le premier (resp. dernier) membre égale :

$$\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2(x \mid y)_E, \qquad \text{resp.} \qquad \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2(f(x) \mid f(y))_F$$

et comme $\|x\|_E^2 = \|f(x)\|_F^2$ et $\|y\|_E^2 = \|f(y)\|_F^2$, on obtient que $(x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F$. Ceci prouve que (a) $\Rightarrow$ (b).

Les implications (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) sont évidentes, montrons que (d) $\Rightarrow$ (a). Supposons (d) vérifiée. Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ dans E, on a $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$ et, comme $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ sont des b.o.n., on obtient

$$\|x\|_E^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|f(x)\|_F^2$$

donc (a) est vérifiée. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons (3). Soit $f : E \to F$ une isométrie, et soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E. Comme $f(\mathscr{B})$ est une b.o.n. (donc une base) de F, alors f est bijective. Son inverse f^{-1} envoie la b.o.n. $f(\mathscr{B}) = (f(e_1),\dots,f(e_n))$ de F sur la b.o.n. $\mathscr{B}$ de E, donc f^{-1} est une isométrie. Ceci prouve (3). La proposition est démontrée. □

Terminologie 2.1.10.1. — On a introduit la terminologie isométrie « vectorielle » pour pouvoir faire plus tard la distinction avec la notion d'isométrie « affine », qu'on introduira lorsqu'on étudiera les espaces et applications affines.

Dans la suite de ce chapitre, comme on ne considère que des applications linéaires, on dira simplement « isométrie » au lieu de « isométrie vectorielle ».

Définition et corollaire 2.1.11. — (1) *On dit que deux espaces euclidiens E et E' sont* **isométriques** *s'il existe une isométrie $f : E \xrightarrow{\sim} E'$.*

(2) *Tout espace euclidien E de dimension n est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire standard. D'après le théorème 2.1.4, E admet une b.o.n. $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Alors l'application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to E$ définie par $u(e_i) = f_i$, pour $i = 1, \dots, n$, est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ sur E. $\square$

Définition et proposition 2.1.12. — *On note* $\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$. *C'est un* sous-groupe *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, appelé le* **groupe orthogonal**.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que l'ensemble $O(n)$ est bien un groupe. Rappelons que l'égalité ${}^tAA = I_n$ entraîne que A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$. Donc $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et, si $A \in \mathrm{O}(n)$, son inverse $B = A^{-1} = {}^tA$ vérifie $B^{-1} = A = {}^tB$, donc appartient aussi à $\mathrm{O}(n)$. De plus, pour tout $A, B \in \mathrm{O}(n)$, on a l'égalité ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBB = I_n$, donc $AB \in \mathrm{O}(n)$. $\square$

Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $(X \mid Y) = {}^tXY$, i.e. la matrice de $(\ \mid\ )$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice identité I_n. Donc une matrice arbitraire $A \in M_n(\mathbb{R})$ préserve le produit scalaire si et seulement si, on a, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$ {}^tXY = (X \mid Y) = (AX \mid AY) = {}^tX\,({}^tAA)\,Y $$

ce qui équivaut à dire que ${}^tAA = I_n$ (cf. 1.1.7). Ceci montre que $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$.

De plus, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (i.e. C_i est le vecteur $Ae_i \in \mathbb{R}^n$). Remarquons que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tAA$ est le produit matriciel de la i-ème ligne de ${}^tA$, i.e. de ${}^tC_i$, par la colonne C_j, c.-à-d., on a $({}^tAA)_{ij} = (Ae_i \mid Ae_j)$, donc la condition ${}^tAA = I_n$ équivaut aussi à dire que les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. Tenant compte de la proposition 2.1.10, on obtient donc les caractérisations suivantes de $\mathrm{O}(n)$, chacune étant utile :

Proposition 2.1.13 **(Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$).** — *On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard $(\ \mid\ )$ et l'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors $\mathrm{O}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$; il est caractérisé par* chacune *des égalités suivantes :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (AX \mid AY) = (X \mid Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|AX\| = \|X\|, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Af_1, \dots, Af_n) \textit{ est une b.o.n., pour } \underline{\textit{toute}} \textit{ b.o.n. } (f_1, \dots, f_n)\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Ae_1, \dots, Ae_n) \textit{ est une b.o.n., où } (e_1, \dots, e_n) \textit{ est la base canonique de } \mathbb{R}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \textit{les colonnes de } A \textit{ sont de norme } 1 \textit{ et deux à deux orthogonales}\}
\end{aligned}
$$

Les éléments de $\mathrm{O}(n)$ *sont parfois appelés «* endomorphismes orthogonaux *» (mais voir la remarque* 2.3.2.2 *plus bas).*

Remarque 2.1.14. — Il existe *d'autres* groupes orthogonaux (qui ne sont isomorphes à aucun $\mathrm{O}(n)$). Soient p, q des entiers ≥ 1 et soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{p+q}$ définie par $\phi(X, Y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{q} x_i y_i$, i.e. la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$ est $J = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0}_{p,q} \\ \hline \mathbf{0}_{q,p} & -I_q \end{array}\right)$. Cette forme bilinéaire symétrique est de signature (p, q) (notons que d'après le théorème 1.3.9 d'inertie de Sylvester, toute forme bilinéaire symétrique est équivalente à une telle forme ϕ). Alors

$$ \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAJA = J\} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \phi(AX, AY) = \phi(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n\} $$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathrm{O}(p, q)$. On ne considérera pas ces groupes dans ce cours.

2.2. Endomorphismes auto-adjoints et théorème de diagonalisation simultanée

Commençons par introduire l'adjoint dans le cas général d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, même si on se limitera dans la suite au cas euclidien.

***Théorème et définition 2.2.1* (Adjoint d'un endomorphisme).** — *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E,* **non dégénérée**. *Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$(1) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)).}$$

Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, si l'on note $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a

$$(2) \qquad \boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = J^{-1}\,{}^tA\,J.}$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe u^* vérifiant (1) et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*)$. Soient $x, y \in E$ arbitraires, et notons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs colonnes des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Alors on a

$${}^tX\,{}^tAJY = \phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)) = {}^tXJA^*Y$$

d'où ${}^tAJ = JA^*$ et donc, puisque J est inversible (car ϕ non-dégénérée), $A^* = J^{-1}\,{}^tA\,J$. Ceci montre que u^*, s'il existe, vérifie (2) et est donc unique.

Réciproquement, si l'on note u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A^* = J^{-1}\,{}^tA\,J$, alors pour tout x, y on a :

$$\phi(x, u^*(y)) = {}^tXJA^*Y = {}^tX\,{}^tA\,JY = \phi(u(x), y)$$

donc u^* vérifie (1). Ceci prouve l'existence, et le théorème est démontré. $\square$

Remarque 2.2.2. — Il résulte de la formule (2) (ou directement de la définition (1)) que, pour tout $u, v \in \mathrm{End}(E)$ et $s, t \in \mathbb{R}$, on a $(su + tv)^* = su^* + tv^*$, i.e. l'application $\mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, $u \mapsto u^*$ est linéaire.

Remarquons aussi que si ϕ est un produit scalaire et si $\mathscr{B}$ est une b.o.n., alors la matrice de ϕ dans $\mathscr{B}$ est $J = I_n$. On peut donc énoncer le théorème dans le cas euclidien sous la forme suivante.

***Théorème 2.2.3* (Adjoint d'un endomorphisme dans le cas euclidien)**

Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace **euclidien** *de dimension n. Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$(*) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)).}$$

Pour toute **b.o.n.** *$\mathscr{B}$ de E, si l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a*

$$(**) \qquad \boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^tA.}$$

***Définition 2.2.4* (Endomorphismes auto-adjoints).** — Soit E un espace **euclidien** de dimension n. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est **auto-adjoint** (ou symétrique) s'il vérifie $u^* = u$. Ceci équivaut à dire que, pour toute b.o.n. $\mathscr{B}$ de E, la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est **symétrique**.

***Proposition 2.2.5* (Endomorphismes auto-adjoints et formes bilinéaires symétriques)**

Soit E muni de $(\ |\ )$ un espace **euclidien** *de dimension n et soit ϕ une autre forme bilinéaire symétrique (arbitraire) sur E. Alors il existe un unique $u \in \mathrm{End}(E)$ auto-adjoint pour $(\ |\ )$ tel que :*

$$(\dagger) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{\phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).}$$

Pour toute **b.o.n.** *$\mathscr{B}$ de E, on a*

$$(\ddagger) \qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi).}$$

Démonstration. — Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n. de E et $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, on a ${}^tS = S$. Pour $x, y \in E$, notons $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. S'il existe u vérifiant $(\dagger)$, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors l'égalité

$${}^tXSY = \phi(x, y) = (x \mid u(y)) = {}^tXAY$$

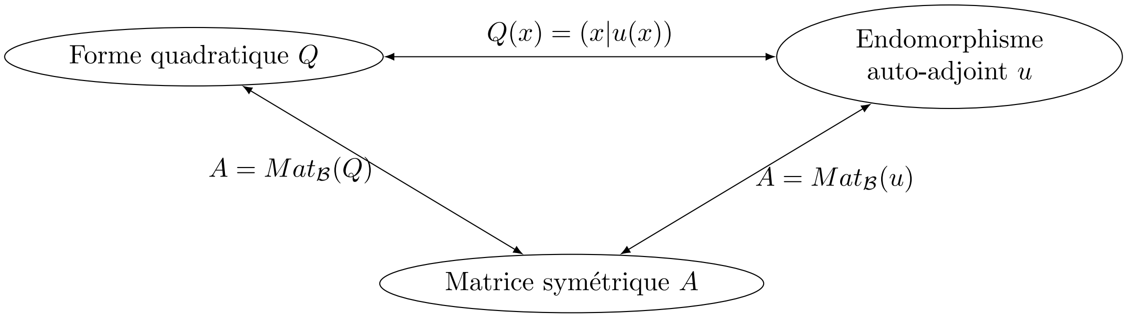
entraîne $A = S$. Ceci montre que u, s'il existe, vérifie $(\ddagger)$ et est donc unique.

Réciproquement, si l'on note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est S, alors pour tout x, y on a :

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= {}^tXSY = (x \mid u(y)) \\ &= {}^tX\,{}^tSY = (u(x) \mid y)\end{aligned}$$

donc u vérifie (†). Ceci prouve l'existence, et la proposition est démontrée. □

En résumé, si on se fixe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et une base $\mathcal{B}$ de E, orthonormée pour ce produit scalaire, on a les correspondances suivantes :



On peut énoncer maintenant le théorème spectral, aussi appelé “théorème de diagonalisation simultanée”.

***Théorème 2.2.6* (Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints)**
Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien de dimension n, et u un endomorphisme auto-adjoint. Alors, u est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Par conséquent, il existe une b.o.n. de E formée de vecteurs propres de u.

***Corollaire 2.2.7* (Diagonalisation des matrices symétriques réelles)**
Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors S est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

Le point le plus difficile de la démonstration est la proposition suivante :

***Proposition 2.2.8* (Existence d'une valeur propre réelle).** — *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$* **symétrique**. *Alors A admet au moins une valeur propre réelle.*

Admettons pour le moment cette proposition et démontrons le théorème, par récurrence sur $n = \dim E$. C'est ok si $n = 1$, donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour $n-1$. D'après la proposition, u admet au moins une valeur propre réelle λ_1, soit f_1 un vecteur propre associé, qu'on peut supposer de norme 1 (quitte à remplacer f_1 par $\dfrac{1}{\|f_1\|}f_1$). Montrons que $E_1 = (\mathbb{R}f_1)^\perp$ est stable par u : pour tout $x \in E_1$, on a :

$$(u(x) \mid f_1) = (x \mid u^*(f_1)) = (x \mid u(f_1)) = (x \mid \lambda_1 f_1) = \lambda_1(x \mid f_1) = 0,$$

donc $u(x) \in E_1$. La restriction u_1 de u à E_1 est encore auto-adjointe, puisque pour tout $x, y \in E_1$ on a :

$$(u_1(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (x \mid u_1(y)).$$

Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une b.o.n. $\mathscr{C} = (f_2, \ldots, f_n)$ de E_1 formée de vecteurs propres de u_1, donc de u. Alors, $\mathscr{B} = \{f_1\} \cup \mathscr{C}$ est une b.o.n. de E formée de vecteurs propres de u. Ceci prouve la première assertion du théorème.

Le fait que les espaces propres soient deux à deux orthogonaux peut se déduire de la démonstration précédente, mais il est plus simple de le voir directement. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres distinctes de u et soient $x \in V_\lambda$ et $y \in V_\mu$; alors

$$\lambda(x \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = \mu(x \mid y)$$

et comme $\lambda \neq \mu$ ceci entraîne $(x \mid y) = 0$. Ceci prouve le théorème, modulo la démonstration de la proposition 2.2.8. □

Démonstration de la proposition 2.2.8. — On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et l'on considère la **sphère unité** :

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}\,;$$

celle-ci est **compacte**. D'autre part, la fonction

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (Ax \mid x)$$

est **continue**, car c'est un polynôme de degré 2 en les coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Par conséquent, f atteint un maximum λ en un point x_0 de S^{n-1}, i.e. on a :

$$\forall x \in S^{n-1}, \qquad (Ax \mid x) \leq \lambda = (Ax_0 \mid x_0).$$

Alors, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $\dfrac{1}{\|x\|} x \in S^{n-1}$, d'où

$$\left(\frac{Ax}{\|x\|} \mid \frac{x}{\|x\|}\right) \leq \lambda$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \qquad (Ax \mid x) \leq \lambda\,(x \mid x). \tag{1}$$

Fixons $v \in \mathbb{R}^n$ et soit $t \in \mathbb{R}$ variable. On a, d'une part :

$$f(x_0 + tv) = \big(A(x_0 + tv) \mid A(x_0 + tv)\big) = (Ax_0 \mid x_0) + t(Ax_0 \mid v) + t(Av \mid x_0) + t^2(Av \mid v)$$

et comme $(Av \mid x_0) = (v \mid {}^tAx_0) = (v \mid Ax_0) = (Ax_0 \mid v)$, ceci se récrit :

$$f(x_0 + tv) = (Ax_0 \mid x_0) + 2t(Ax_0 \mid v) + t^2(Av \mid v). \tag{2}$$

D'autre part, on a :

$$\lambda\,(x_0 + tv \mid x_0 + tv) = \lambda \underbrace{(x_0 \mid x_0)}_{=1} + 2t(\lambda x_0 \mid v) + t^2(\lambda v \mid v).$$

D'après (1), et tenant compte de l'égalité $\lambda = (Ax_0 \mid x_0)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2t(Ax_0 - \lambda x_0 \mid v) + t^2(Av - \lambda v \mid v) \leq 0.$$

On a donc un trinôme du second degré en t, toujours négatif et qui s'annule pour $t = 0$. On en déduit que son discriminant réduit $\Delta' = (Ax_0 - \lambda x_0 \mid v)^2$ est nul, donc :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad (Ax_0 - \lambda x_0 \mid v) = 0$$

et donc $Ax_0 - \lambda x_0 = 0$, i.e. $Ax_0 = \lambda x_0$. Ceci prouve que x_0 est un vecteur propre pour λ. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.2.8 et du théorème 2.2.6. □

***Théorème 2.2.9* (Réduction simultanée).** — *Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien de dimension n, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi) = A$.*

Alors il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** *pour $(\ \mid\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$ pour $i = 1, \dots, n$, et l'on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Remarque 2.2.9.1. — Ce théorème est appelé « théorème de **réduction simultanée** » ou « de **diagonalisation simultanée** » car la base $\mathscr{B}$ donnée par l'énoncé est à la fois **orthonormée** pour $(\ \mid\ )$ et **orthogonale** pour ϕ. En d'autres termes, si l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur x arbitraire, la base $\mathscr{B}$ **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

Démonstration. — Notons u l'endomorphisme auto-adjoint tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid (u(y)),$$

cf. Proposition 2.2.5. D'après le théorème 2.2.6, il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour $(\ \mid\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, pour tout i. Alors, pour tout i, j on a :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i(f_i \mid f_j) = \lambda_j(f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

ce qui montre que $\mathscr{B}$ est une base **orthogonale** pour ϕ. De plus, comme $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormées, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice diagonale de l'énoncé égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. □

Répétons la version matricielle du théorème précédent :

Corollaire 2.2.10 **(Réduction simultanée des matrices symétriques réelles)**
Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tS = S$. Il existe $P \in O(n)$ telle que $P^{-1}SP = {}^tPSP$ soit diagonale.

Corollaire 2.2.11 **(Calculs de signature)**. — *Soient Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, ϕ sa forme polaire, A la matrice de ϕ dans la base canonique. Alors la signature de Q est donnée par le nombre de valeurs propres de A qui sont > 0 (resp. < 0).*

Exemple 2.2.12. — Illustrons ce qui précède par l'exemple suivant. Soient $n \geq 2$ et Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = 2\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

La matrice de sa forme polaire est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

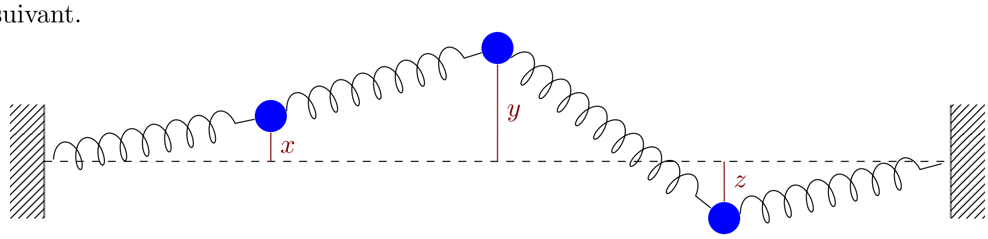
(tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls). On remarque que la matrice $A + I_n$ est de rang 1, donc l'espace propre $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_n)$ est de dimension $n-1$. Donc -1 est une racine de multiplicité $\geq n-1$ du polynôme caractéristique $P_A(X)$. Comme $0 = \mathrm{Tr}(A)$ est la somme des racines (dans $\mathbb{C}$) de $P_A(X)$, la dernière racine λ vérifie $\lambda + (n-1)(-1) = 0$, d'où $\lambda = n-1$. Donc, d'après le théorème 2.2.9, il existe $P \in O(n)$ tel que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

il y a donc $n-1$ valeurs propres égales à -1, et une seule valeur propre > 0 (égale à $n-1$), donc la signature de Q est $(1, n-1)$.

Remarque 2.2.13. — Pour des applications géométriques du théorème 2.2.9, voir l'étude des coniques et quadriques dans le chapitre suivant.

Exemple 2.2.14. — On considère le problème suivant : trois masses identiques sont fixées aux abscisses 1, 2 et 3 et se meuvent verticalement. Entre deux masses successives on met un ressort de constante de raideur 1 et de longueur au repos 1. On ajoute deux autres ressorts, un à gauche et un à droite, attachés respectivement au point $(0,0)$ et à la première masse, et au point $(4,0)$ et à la dernière masse, comme sur le dessin suivant.



On appelle $x(t)$ l'ordonnée du premier point au temps t, $y(t)$ celle du deuxième et $z(t)$ celle du troisième. On veut obtenir les équations du mouvement des trois masses, c'est à dire expliciter la fonction $f = (x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ en fonction de conditions initiales.

L'application de la seconde loi de Newton (par exemple) conduit à :

$$\begin{cases} x''(t) & = & -2x(t) + y(t) \\ y''(t) & = & x(t) - 2y(t) + z(t) \\ z''(t) & = & y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

ce qui se réécrit de manière matricielle :

$$f''(t) = Af(t) \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R}).$$

Cette équation différentielle se résoud en réduisant la matrice A.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = (X+2)(X+2-\sqrt{2})(X+2+\sqrt{2}),$$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -2-\sqrt{2}$. L'algorithme du pivot de Gauss permet de trouver des vecteurs propres associés :

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $P = (v_1\ v_2\ v_3)$ la matrice de passage associée. Par le théorème spectral, les vecteurs v_i sont deux à deux orthogonaux, et ils sont de plus de norme 1 ; la matrice P est donc orthogonale. On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$, avec D la matrice diagonale avec pour coefficients λ_1, λ_2 et λ_3.

Si on note $V = P^{-1}f$, alors l'équation différentielle initiale se réécrit $V''(t) = DV(t)$. On a réduit l'étude à celle de trois équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants du type $y'' = \lambda_i y$, avec $\lambda_i < 0$, dont les solutions sont du type

$$y(t) = \mu_1 \cos(\sqrt{-\lambda_i}t) + \mu_2 \sin(\sqrt{-\lambda_i}t).$$

Si on se fixe une condition initiale du type $f(0) = (0,1,0)$ et $f'(0) = (0,0,0)$, on obtient la forme générale de $f(t)$: la condition initiale s'exprime dans la base des v_i par la formule

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Orthogonalité. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

***Définition 2.3.1* (Sous-espaces d'un espace euclidien)**. — Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction $(\ \mid\ )_F$ de $(\ \mid\ )$ à F (cf. 1.1.17) est un produit scalaire sur F, puisque $(x \mid x)_F = (x \mid x) > 0$ pour tout $x \in F - \{0\}$. Donc F muni de $(\ \mid\ )_F$ est un espace euclidien.

***Théorème et définition 2.3.2* (Projection orthogonale sur un sous-espace)**

Soit E, muni de $(\ \mid\ )$, un espace euclidien (pas nécessairement de dimension finie). Soit F un sous-espace de dimension finie r et soit $F^\perp$ son orthogonal pour $(\ \mid\ )$.

(1) *On a* $\boxed{E = F \oplus F^\perp.}$ *Cette décomposition en somme directe permet de définir le projecteur $\pi_F : E \to E$, d'image F et de noyau $F^\perp$, et le projecteur $\pi_{F^\perp} : E \to E$, d'image $F^\perp$ et de noyau F. Alors, pour tout $x \in E$, on a*

$$\boxed{x = \pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x)}$$

et π_F (resp. $\pi_{F^\perp}$) s'appelle la **projection orthogonale** *sur F (resp. sur $F^\perp$).*

(2) *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base* **orthonormée** *de F. Alors* $\boxed{\pi_F(v) = (v \mid e_1)e_1 + \cdots + (v \mid e_r)e_r}$ *pour tout $v \in E$.*

(3) *On a* $\boxed{(F^\perp)^\perp = F}$.

Remarques 2.3.2.1. — (a) On a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$ car si $x \in F \cap F^\perp$ alors $(x \mid x) = 0$ d'où $x = 0$.

(b) Par conséquent, si E est de dimension finie n, l'égalité $E = F \oplus F^\perp$ découle de 1.1.16. Toutefois, la démonstration donnée ci-dessous ne suppose pas E de dimension finie et permet, par exemple, de démontrer l'inégalité de Bessel pour les coefficients de Fourier d'une fonction continue $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ (voir par exemple le Devoir du 6/4/2012 et son corrigé).

Démonstration. — On va démontrer en même temps les assertions (1) et (2). Comme $(\ \mid\ )_F$ est définie positive et comme $\dim(F) = r < \infty$, alors F possède une base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$, d'après le théorème 2.1.4. Pour tout $v \in E$, posons provisoirement

$$p(v) = (v \mid e_1)\, e_1 + \cdots + (v \mid e_r)\, e_r \in F$$

et $q(v) = v - p(v)$. Alors, $v = p(v) + q(v)$. D'autre part, pour $j = 1, \dots, r$, on a

$$(q(v) \mid e_j) = (v \mid e_j) - \sum_{i=1}^{r} (v \mid e_i)\, \underbrace{(e_i \mid e_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j \\ =0 \text{ si } i\neq j}} = 0,$$

d'où $q(v) \in F^{\perp}$. Comme $v = p(v) + q(v)$, ceci montre que $E = F + F^{\perp}$.

De plus, comme on l'a déjà remarqué plus haut, si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $(x \mid x) = 0$, d'où $x = 0$. On a donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $E = F + F^{\perp}$, d'où $E = F \oplus F^{\perp}$. Ceci prouve (1).

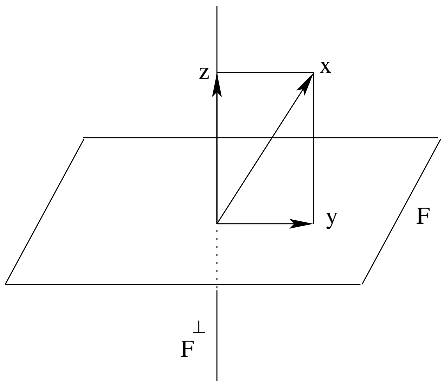
Alors tout $v \in E$ s'écrit de façon unique $v = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$, et l'on a $x = \pi_F(v)$ et $y = \pi_{F^{\perp}}(v)$. Comme $v = p(v) + q(v)$, on a donc

$$\pi_F(v) = p(v) = \sum_{i=1}^{r} (v \mid e_i) e_i,$$

ce qui prouve (2).

Prouvons (3). Pour tout $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$, on a $0 = (x \mid y) = (y \mid x)$. Fixant $x \in F$ et faisant varier y dans $G = F^{\perp}$, ceci montre que $x \in G^{\perp}$, d'où l'inclusion $F \subset G^{\perp}$. Réciproquement, soit $v \in G^{\perp}$. Comme $E = F \oplus F^{\perp}$, on peut écrire $v = x + y$ avec $y \in G = F^{\perp}$ et $x \in F$. Alors $y = v - x \in G \cap G^{\perp}$, donc $0 = (y \mid y)$ d'où $y = 0$ et donc $v = x \in F$. Ceci montre que $F = G^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp}$. Le théorème est démontré. $\square$

Dans la figure qui suit, on a $y = \pi_F(x)$ et $z = \pi_{F^{\perp}}(x)$:



Remarque 2.3.2.2. — Attention à la terminologie ! Si $F \neq E$, la projection orthogonale π_F n'est **pas une isométrie** (car une isométrie est injective, or $\mathrm{Ker}(\pi_F) = F^{\perp}$ est non nul, sauf si $F = E$), donc n'est **pas** un « endomorphisme orthogonal » de E (cf. 2.1.13).

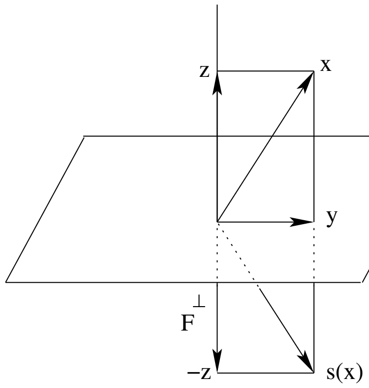
Définition et proposition 2.3.3 **(Symétries orthogonales)**. — *Soient E un espace euclidien de dimension n et F un sous-espace de dimension r.*

(1) *La* **symétrie orthogonale** *s_F par rapport à F est définie comme suit : pour tout $v \in E$, on a $v = \pi_F(v) + \pi_{F^{\perp}}(v)$ et l'on pose :*

$$(\star) \qquad \boxed{s_F(v) = \pi_F(v) - \pi_{F^{\perp}}(v) = v - 2\pi_{F^{\perp}}(v).}$$

Alors $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ et s_F est une isométrie de E.

(2) *Si $\mathscr{C}_+$ est une base de F et $\mathscr{C}_-$ une base de $F^{\perp}$, la matrice de s_F dans la base $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_-$ de E est* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right)$. *En particulier, on a* $\boxed{\text{dét}\, s_F = (-1)^{n-r}.}$



Démonstration. — D'après la définition, il est clair que $s_F^2 = \mathrm{id}_E$, donc s_F est bijective et égale à son inverse (i.e. s_F est **involutive**). Montrons que s_F est une isométrie. Comme $(\pi_F(v) \mid \pi_{F^\perp}(v)) = 0$, on a d'après l'égalité de Pythagore (cf. 2.1.8) :

$$\|v\|^2 = \|\pi_F(v)\|^2 + \|\pi_{F^\perp}(v)\|^2 = \|s_F(v)\|^2$$

et ceci prouve que s_F est une isométrie. Enfin, si si $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_-$ est comme dans la proposition, il est clair que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F)$ est comme indiquée. □

***Définition 2.3.4* (Réflexions orthogonales).** — Un cas particulier important de symétrie orthogonale est le suivant. Soit $v_0 \in E$, $v_0 \neq 0$, alors $H = (\mathbb{R}v_0)^\perp$ est appelé un **hyperplan** de E ; d'après le théorème 2.3.2 on a

$$E = \mathbb{R}v_0 \oplus H\,,$$

explicitement, si l'on pose $u_0 = \dfrac{1}{\|v_0\|}v_0$ alors $\|u_0\| = 1$ et tout $x \in E$ s'écrit de façon unique

$$x = (x \mid u_0)u_0 + \pi_H(x), \qquad \text{où} \qquad \pi_H(x) = x - (x \mid u_0)u_0\,,$$

donc

$$\boxed{\pi_{\mathbb{R}v_0}(x) = (x \mid u_0)u_0 = \frac{(x \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)}\, v_0.}$$

La symétrie orthogonale s_H par rapport à H s'appelle la **réflexion orthogonale** par rapport à l'hyperplan H ; d'après ce qui précède elle est donnée par la formule :

(2.3.4.1) $$\boxed{\forall x \in E, \qquad s_H(x) = x - 2\frac{(x \mid v_0)}{(v_0 \mid v_0)}\, v_0.}$$

Si $\dim E = n$ alors $\dim H = n-1$, et si $\mathscr{C}_+$ est une base de H, alors $\mathscr{B} = \mathscr{C}_+ \cup \{v_0\}$ est une base de E et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_H) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1,1} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n-1} & -1 \end{array}\right)$, d'où en particulier $\boxed{\text{dét}\, s_H = -1.}$

***Théorème 2.3.5* (Orthonormalisation de Gram-Schmidt).** — *Soit E un espace euclidien et soient $v_1, \dots, v_n$ linéairement indépendants dans E. Alors il existe une unique famille $(e_1, \dots, e_n)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout $i = 1, \dots, n$, $(e_1, \dots, e_i)$ est une base orthonormée de $V_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$.*

(2) *Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $(e_j \mid v_j) > 0$.*

Démonstration. — Pour $j = 1$, on cherche $e_1 = t_1 v_1$ tel que $1 = (e_1 \mid e_1) = t_1^2(v_1 \mid v_1)$ et $0 < (e_1 \mid v_1) = t_1(v_1 \mid v_1)$; la 1ère condition donne $t_1^2 = 1/(v_1 \mid v_1)$, et la 2ème condition, qui implique $t_1 > 0$, donne alors :

(1) $$t_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1.}$$

Pour $j = 2$, on cherche d'abord un vecteur $e_2' \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(e_1, v_2)$, donc de la forme $e_2' = v_2 + \lambda e_1$, vérifiant la condition :

$$0 = (e_2' \mid e_1) = (v_2 \mid e_1) + \lambda \underbrace{(e_1 \mid e_1)}_{=1} = (v_2 \mid e_1) + \lambda,$$

ce qui impose $\lambda = -(v_2 \mid e_1)$. Alors le vecteur

$$\boxed{e_2' = v_2 - (v_2 \mid e_1)e_1}$$

est orthogonal à e_1, et est $\neq 0$ puisque $v_2 \notin \mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}e_1$, donc la famille (e_1, e_2') est libre et forme une base de $V_2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

On a $v_2 = e_2' + (v_2 \mid e_1)e_1$ et, puisque $(e_2' \mid e_1) = 0$, l'égalité de Pythagore donne

$$\|v_2\|^2 = \|e_2'\|^2 + (v_2 \mid e_1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|e_2'\|^2 = \|v_2\|^2 - (v_2 \mid e_1)^2.}$$

Pour rendre e_2' unitaire (i.e. de norme 1), on le divise par sa norme, c.-à-d., on pose

$$\boxed{e_2 = \frac{1}{\|e_2'\|}e_2' = \frac{1}{\|e_2'\|}\big(v_2 - (v_2 \mid e_1)e_1\big)} \tag{2}$$

alors (e_1, e_2) est une b.o.n. de V_2, et d'après (2) ci-dessus on a $1 = (e_2 \mid e_2) = (e_2 \mid v_2)/\|e_2'\|$ donc $(e_2 \mid v_2) = \|e_2'\| > 0$. C'est bien le seul choix possible, car si $f_2 \in V_2$ est orthogonal à e_1 et unitaire, alors $f_2 = \pm e_2$, et la condition $(f_2 \mid v_2) > 0$ entraîne $f_2 = e_2$.

Pour $j = 3$, on cherche d'abord un vecteur $e_3' \in V_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3)$, donc de la forme $e_3' = v_3 + \mu_2 e_2 + \mu_1 e_1$, vérifiant les relations linéaires :

$$\begin{cases} 0 = (e_3' \mid e_1) = (v_3 \mid e_1) + \mu_1\,, \\ 0 = (e_3' \mid e_2) = (v_3 \mid e_2) + \mu_2 \end{cases}$$

(on a utilisé le fait que e_1, e_2 sont orthogonaux et unitaires), qui donnent $\mu_i = -(v_3 \mid e_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors le vecteur

$$\boxed{e_3' = v_3 - (v_3 \mid e_2)e_2 - (v_3 \mid e_1)e_1}$$

est orthogonal à $V_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et est $\neq 0$ puisque $v_3 \notin V_2$, donc la famille (e_1, e_2, e_3') est libre et forme une base de V_3. Comme e_1, e_2 et e_3' sont orthogonaux, l'égalité de Pythagore donne

$$\|v_3\|^2 = \|e_3'\|^2 + (v_3 \mid e_2)^2 + (v_3 \mid e_1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\|e_3'\|^2 = \|v_3\|^2 - (v_3 \mid e_2)^2 - (v_3 \mid e_1)^2.}$$

Pour rendre e_3' unitaire, on le divise par sa norme, c.-à-d., on pose

$$\boxed{e_3 = \frac{1}{\|e_3'\|}e_3' = \frac{1}{\|e_3'\|}\big(v_3 - (v_3 \mid e_2)e_2 - (v_3 \mid e_1)e_1\big)} \tag{3}$$

alors (e_1, e_2, e_3) est une b.o.n. de V_3, et d'après (3) ci-dessus on a $1 = (e_3 \mid e_3) = (e_3 \mid v_3)/\|e_3'\|$ donc $(e_3 \mid v_3) = \|e_3'\| > 0$. C'est bien le seul choix possible, car si $f_3 \in V_3$ est orthogonal à V_2 et unitaire, alors $f_3 = \pm e_3$, et la condition $(f_3 \mid v_3) > 0$ entraîne $f_3 = e_3$.

En répétant ce processus on construit par récurrence, de façon unique, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$; les formules explicites pour e_n' et e_n étant :

$$\boxed{e_n' = v_n - \sum_{i=1}^{n-1}(v_n \mid e_i)\,e_i} \qquad \boxed{\|e_n'\|^2 = \|v_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(v_n \mid e_i)^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{e_n = \frac{1}{\|e_n'\|}\,e_n'}$$

□

Remarques 2.3.5.1. — (1) Ce qui précède peut aussi s'exprimer, de façon abstraite, comme suit : l'orthogonal G_n de V_{n-1} dans V_n, i.e. $G_n = \{x \in V_n \mid (x \mid e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1\}$, est de dimension $n - (n-1) = 1$, et $\sum_{i=1}^{n-1}(v_n \mid e_i)\,e_i$ est la projection orthogonale de v_n sur V_{n-1} tandis que e_n' est la projection orthogonale de v_n sur G_n ; la droite $G_n = \mathbb{R}e_n'$ contient deux vecteurs de norme 1, à savoir $\pm e_n$, et e_n est déterminé par la condition $(e_n \mid v_n) = \|e_n'\| > 0$.

(2) La démonstration précédente fournit un algorithme pour calculer explicitement $e_1, \ldots, e_n$. Illustrons ceci par l'exemple suivant.

Exemple 2.3.5.2. — On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $1, X, X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On va noter (e_0, e_1, e_2) au lieu de (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée obtenue, afin d'avoir l'égalité $\deg(e_i) = i$. On a $(1 \mid 1) = 2$ donc on prend $e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors $(X \mid e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$ et $(X \mid X) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \dfrac{2}{3}$, d'où $e_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$.

Puis $(X^2 \mid e_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $(X^2 \mid e_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$, d'où $e_2' = X^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3} e_0$,

$$\|e_2'\|^2 = \int_{-1}^{1} t^4\,dt - \frac{2}{9} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 9} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\big(X^2 - \frac{1}{3}\big) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(\frac{3X^2-1}{2}\right).$$

2.4. Bases directes ou indirectes. Groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$. Étude de $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(3)$

Notation 2.4.0. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont deux bases de E, on note $\boxed{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}$ le déterminant de la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Définition et proposition 2.4.1 **(Orientations d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie)** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.*

(1) *On définit une relation d'équivalence $\sim$ dans l'ensemble des bases de E en posant :*

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \quad \textit{si} \quad \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

(2) *Il y a* **exactement deux** *classes d'équivalence.*

(3) *Chacune de ces classes est appelée une* **orientation** *de E, et « choisir une orientation de E », c'est choisir une base $\mathscr{B}_0$ et l'orientation « qui va avec », c.-à-d., toutes les bases $\mathscr{B}$ de E telles que $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$. Celles-ci sont appelées les bases (orientées)* **directes**, *les autres sont appelées les bases (orientées)* **indirectes**.

Démonstration. — (1) D'abord, on a $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, donc $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}$ (i.e. la relation $\sim$ est réflexive). Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E. Si $\mathscr{B}''$ est une troisième base de E, on a

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\cdot \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'').$$

Donc si $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$ sont > 0, il en est de même de $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$; ceci montre que la relation $\sim$ est transitive. De plus, prenant $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$, on obtient $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\,\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, d'où $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}$, donc si $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, il en est de même de $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$; ceci montre que la relation $\sim$ est symétrique. Donc $\sim$ est bien un relation d'équivalence, ce qui prouve (1).

Prouvons (2). Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, notons $\mathscr{C}_0 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$, c'est aussi une base de E, et $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}_0) = -1$, donc $\mathscr{B}_0 \not\sim \mathscr{C}_0$ donc il y a au moins deux classes d'équivalence.

En fait, ce sont les deux seules classes. En effet, soit $\mathscr{B}$ une base arbitraire ; si $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ alors $\mathscr{B}$ est dans la classe de $\mathscr{B}_0$, et si $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$ alors

$$\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{B}) = \underbrace{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{B}_0)}_{=-1}\cdot \underbrace{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})}_{<0} > 0$$

donc $\mathscr{B}$ est dans la classe de $\mathscr{C}_0$. La proposition est démontrée. □

Exemple 2.4.2 **(Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$).** — $\mathbb{R}^n$ est orienté par le choix de la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$; on dit que c'est l'**orientation canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite de cette section, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ et l'on note $\mathrm{O}(n)$ le groupe des isométries :

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\} \\ &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (Ax \mid Ay) = (x \mid y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

(voir 2.1.13 pour d'autres caractérisations de $\mathrm{O}(n)$).

Proposition 2.4.3. — *Soit $A \in \mathrm{O}(n)$. Alors :*

(1) $\boxed{\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \pm 1}$

(2) *Si A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm 1$.*

(3) *Les espaces propres $V_+ = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $V_- = \mathrm{Ker}(A + I_n)$ sont* **orthogonaux**, *c.-à-d., $(v_+ \mid v_-) = 0$ pour tout $v_+ \in V_+$, $v_- \in V_-$.*

Démonstration. — (1) On a $1 = \text{dét}(I_n) = \text{dét}({}^tAA) = \text{dét}({}^tA) \cdot \text{dét}(A)$, or on sait (cf. 2.1.1) que $\text{dét}({}^tA) = \text{dét}(A)$ d'où $\text{dét}(A)^2 = 1$ et donc $\text{dét}(A) = \pm 1$.

(2) Si A admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $v \neq 0$ un vecteur propre associé, alors

$$(v \mid v) = (Av \mid Av) = (\lambda v \mid \lambda v) = \lambda^2 (v \mid v).$$

Comme $(v \mid v) \neq 0$ (car > 0), ceci entraîne $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$.

(3) Soient $v_+ \in V_+$ et $v_- \in V_-$, alors

$$(v_+ \mid v_-) = (Av_+ \mid Av_-) = (v_+ \mid -v_-) = -(v_+ \mid v_-)$$

d'où $(v_+ \mid v_-) = 0$. □

***Définition 2.4.4* (Groupe SL_n).** — On rappelle qu'on note

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{dét}(A) \neq 0\},$$

on l'appelle le **G**roupe **L**inéaire (en anglais : **G**eneral **L**inear group). On appelle groupe **S**pécial **L**inéaire (en anglais : **S**pecial **L**inear group) le sous-groupe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{dét}(A) = 1\}.$$

(Ceci explique le S dans la notation $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \text{dét}(A) = 1\}$ introduite ci-dessous.)

***Définition 2.4.5* (Groupe $\mathrm{SO}(n)$).** — (1) On pose $\boxed{\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \text{dét}(A) = 1\},}$ c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé le groupe **spécial orthogonal**. On le note aussi parfois $\mathrm{O}^+(n)$. Les éléments de $\mathrm{SO}(n)$ s'appellent les isométries **directes** de $\mathbb{R}^n$.

(2) On pose aussi : $\boxed{\mathrm{O}^-(n) = \{A \in O(n) \mid \text{dét}(A) = -1\},}$ ce n'est **pas** un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ (car si $A, B \in \mathrm{O}^-(n)$ alors $\text{dét}(AB) = 1$ donc $AB \in \mathrm{SO}(n)$), mais d'après la proposition précédente, on a

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \mathrm{O}^-(n). \qquad \text{(réunion disjointe)}.$$

(3) Pour tout $\sigma \in \mathrm{O}^-(n)$, l'application $f \mapsto f\sigma$ est une **bijection** de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathrm{O}^-(n)$, dont l'inverse est l'application $g \mapsto g\sigma^{-1}$ (en effet, $\text{dét}(\sigma^{-1}) = \text{dét}(\sigma)^{-1} = -1$ donc pour tout $g \in \mathrm{O}^-(n)$ on a $\text{dét}(g\sigma^{-1}) = 1$ d'où $g\sigma^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$).

Proposition 2.4.6. — *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soit P la matrice de passage* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) \in \mathrm{O}(n)$. *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{cases} \mathscr{B} \text{ est une b.o.n. } \textbf{directe} \text{ (i.e. dét}(P) > 0) & \Longleftrightarrow \quad P \in \mathrm{SO}(n) \\ \mathscr{B} \text{ est une b.o.n. } \textbf{indirecte} \text{ (i.e. dét}(P) < 0) & \Longleftrightarrow \quad P \in \mathrm{O}^-(n). \end{cases}$$

Démonstration. — On sait, d'après 2.1.13, que $P \in \mathrm{O}(n)$, d'où $\text{dét}(P) = \pm 1$, d'après 2.4.3. Donc $\text{dét}(P)$ est > 0 (resp. < 0) si et seulement si il égale 1 (resp. -1). La proposition en découle. □

On rappelle que les fonctions cosinus et sinus sont de période 2π et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1} \qquad \boxed{\cos(-t) = \cos(t)} \qquad \boxed{\sin(-t) = -\sin(t).}$$

On note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le groupe abélien quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$: deux réels t, t' définissent le même élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t' - t = 2k\pi$. Rappelons le lemme suivant.

Lemme 2.4.7. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que* $\cos(\theta) = a$ *et* $\sin(\theta) = b$.

Démonstration. — Comme cosinus et sinus sont de période 2π, il suffit de montrer l'existence et l'unicité modulo 2π dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Rappelons que la fonction cosinus est paire et induit une bijection décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Distinguons les trois cas suivants.

(1) Si $a = 1$ alors $b = 0$; dans ce cas, 0 est l'unique élément θ de $[-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$.

(2) Si $a = -1$ alors $b = 0$; dans ce cas, les seuls éléments θ de $[-\pi, \pi]$ tels que $\cos(\theta) = -1$ et $\sin(\theta) = 0$ sont $\pm\pi$, qui sont égaux modulo 2π.

(3) Enfin, si $a \neq \pm 1$ alors $b = \pm\sqrt{1 - a^2} \neq 0$. Dans ce cas, il existe dans $[-\pi, \pi]$ deux éléments, opposés, θ et $-\theta$, tels que $\cos(\pm\theta) = a$, et comme la fonction sinus vérifie $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et est impaire, alors θ est uniquement déterminé par la condition $\sin(\theta) = b$. □

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel $(\ |\ )$, de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, et de l'orientation définie par la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$.

***Définition et proposition 2.4.8* (Angle orienté de deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$)**
Soient $w, w' \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
(1) $(w \mid w') = \cos(\theta)\,\|w\| \cdot \|w'\|$
(2) $\sin(\theta)$ *est du même signe* (> 0, $= 0$ *ou* < 0) *que* $\operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(w, w')$.
*On appelle θ l'**angle orienté** de w à w' et on le note $\overset{\curvearrowright}{ww'}$. On a $\overset{\curvearrowright}{w'w} = -\overset{\curvearrowright}{ww'}$.*

Démonstration. — Remplaçons d'abord w et w' par les vecteurs unitaires $u = \dfrac{1}{\|w\|}w$ et $v = \dfrac{1}{\|w'\|}w'$, alors la condition (1) devient : $\cos(\theta) = (u \mid v)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $(u \mid v) \in [-1, 1]$ et que :

$$(u \mid v) = \pm 1 \iff u \text{ et } v \text{ sont liés} \iff \operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v) = 0.$$

Par conséquent, notant $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ le « signe » de $\operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v)$, on voit que les conditions (1) et (2) équivalent à dire que $\cos(\theta) = (u \mid v) = a \in [-1, 1]$ et $\sin(\theta) = \varepsilon\sqrt{1 - a^2} = b$; d'après le lemme précédent, ceci détermine un unique $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π.

Enfin, si $\theta = \overset{\curvearrowright}{ww'}$, alors $-\theta$ vérifie (1) et est du même signe que $\operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(w', w) = -\operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(w, w')$, d'où $-\theta = \overset{\curvearrowright}{w'w}$. La proposition est démontrée. □

Rappelons les formules trigonométriques :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')} \qquad \boxed{\sin(\theta + \theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')}$$

En particulier, comme $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on a $\cos(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$.

Notation 2.4.9. — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, introduisons le vecteur $\boxed{u_\theta = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2.}$ C'est l'unique vecteur unitaire u tel que $\overset{\curvearrowright}{e_1u} = \theta$. En effet, soit $u = ae_1 + be_2$ un tel vecteur, alors $a = (u \mid e_1) = \cos(\theta)$, d'où $b = \pm\sin(\theta)$; de plus,

$$\operatorname{dét}_{\mathscr{B}_0}(e_1, u) = \operatorname{dét}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & b \end{pmatrix} = b$$

est du signe de $\sin(\theta)$, d'où $b = \sin(\theta)$.

Isométries de $\mathbb{R}^2$ euclidien. — On peut maintenant aborder l'étude du groupe $\mathrm{O}(2)$ des isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathrm{O}(2)$, écrivons $f(e_1) = ae_1 + be_2$, alors $a^2 + b^2 = \|f(e_1)\| = 1$. D'autre part, comme f préserve le produit scalaire, on a

$$(f(e_2) \mid f(e_1)) = (e_2 \mid e_1) = 0$$

donc $f(e_2)$ appartient à la droite $(\mathbb{R}f(e_1))^\perp$, qui est engendrée par le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, et comme $f(e_2)$ est aussi un vecteur unitaire de cette même droite, on a nécessairement $f(e_2) = \pm\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc deux cas sont possibles :

1er cas. $f(e_2) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, dans ce cas, la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et son déterminant est $a^2 + b^2 = 1$.

2ème cas. $f(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, dans ce cas, la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, et son déterminant est $-a^2 - b^2 = 1$.

On voit que ces deux cas sont exclusifs l'un de l'autre : f appartient à $\mathrm{SO}(2)$ (resp. à $\mathrm{O}^-(2)$) si et seulement si on est dans le 1er cas (resp. 2ème cas). Étudions séparément ces deux cas.

***Définition 2.4.10* (Rotations dans $\mathbb{R}^2$).** — On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et de l'orientation canonique. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(1) On appelle **rotation d'angle** θ, et l'on note r_θ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est

$$(\star) \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(2) On a $\boxed{\text{dét}(r_\theta) = 1}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(r_\theta) = 2\cos(\theta)}$ d'où $P_{r_\theta}(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Le discriminant réduit de ce trinôme est $\Delta' = \cos^2(\theta) - 1$ qui est < 0 sauf si $\theta = 0$ ou π (modulo 2π), c.-à-d., sauf dans le cas de $r_0 = \mathrm{id}$ et de $r_\pi = -\,\mathrm{id}$. En dehors de ces cas, r_θ n'a pas de valeurs propres réelles.

***Proposition 2.4.11* (Le groupe SO(2)).** — (1) *Pour tout* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, *on a* $\boxed{r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta.}$ *Par conséquent, le groupe* $\mathrm{SO}(2) = \{r_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ *est* commutatif.

(2) *Plus précisément, l'application* $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$, $\theta \mapsto r_\theta$, *est un morphisme de groupes, et son noyau est le sous-groupe* $2\pi\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — D'après les deux cas étudiés plus haut, on sait que les éléments de SO(2) sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$. Or, d'après le lemme 2.4.7, pour chaque telle matrice il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$. D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'},$$

et l'assertion (1) en résulte.

D'autre part, dire que ρ est un morphisme de groupes équivaut à dire que $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$, ce qu'on vient de vérifier. Enfin, le noyau de ρ est formé des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $R_\theta = I_2$, i.e. tels que $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$, ce qui équivaut à $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

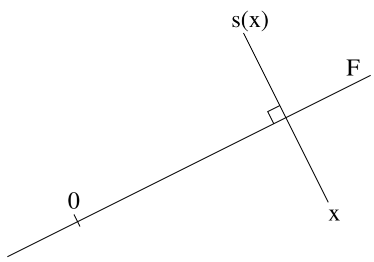
Étudions maintenant le cas des éléments de $\mathrm{O}^-(2)$, i.e. des matrices de la forme

$$(\dagger) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

c.-à-d., d'après le lemme 2.4.7, des matrices

$$(\ddagger) \qquad J_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est de déterminant -1 et de trace nulle ; son polynôme caractéristique est donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, donc $\mathbb{R}^2$ est la somme directe des espaces propres $D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$ et $D_- = \mathrm{Ker}(A - I_2)$, chacun d'eux étant de dimension 1 (i.e. une droite vectorielle). De plus, d'après la proposition 2.4.3, D_+ et D_- sont orthogonaux, donc A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $F = D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$:



Réciproquement, pour $c, d \in \mathbb{R}$ avec $(c,d) \neq (0,0)$, déterminons la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de la symétrie orthogonale s_Δ par rapport à la droite Δ engendré par le vecteur $u = ce_1 + de_2$. Alors Δ est la droite orthogonale au vecteur $v = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ donc, d'après 2.3.4, s_Δ est définie par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad s_\Delta(x) = x - 2\frac{(x \mid v)}{(v \mid v)}\, v.$$

On a $(v \mid v) = c^2 + d^2$, $(e_1 \mid v) = -d$ et $(e_2 \mid v) = c$ donc, appliquant la formule ci-dessus à $x = e_1$ puis $x = e_2$, on obtient

$$s_\Delta(e_1) = e_1 + 2\frac{d}{c^2+d^2}(-de_1 + ce_2), \qquad s_\Delta(e_2) = e_2 - 2\frac{c}{c^2+d^2}(-de_1 + ce_2)$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(s_\Delta) = \dfrac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} c^2-d^2 & 2cd \\ 2cd & d^2-c^2 \end{pmatrix}$.

Appliquons ce qui précède dans le cas suivant. Notons s_φ la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $u_\varphi = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2$. (Notons que u_φ et $u_{\varphi+\pi} = -u_\varphi$ engendrent la même droite, donc φ n'est déterminé que modulo $\pi\mathbb{Z}$.) D'après ce qui précède, la matrice de s_φ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = J_{2\varphi}$$

On peut donc résumer ce qui précède dans la :

***Proposition 2.4.12* (Description de $\mathrm{O}^-(2)$).** — *L'ensemble* $\mathrm{O}^-(2) = \{A \in \mathrm{O}(2) \mid \mathrm{d\acute{e}t}(A) = -1\}$ *est formé des matrices* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, *avec* $a^2+b^2 = 1$ *; dans ce cas,* A *est la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $D_+ = \mathrm{Ker}(A - I_2)$. *D'autre part, il existe un unique* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = J_\theta$$

et A *est la symétrie orthogonale* $s_{\theta/2}$ *par rapport à la droite* $\mathbb{R}u_{\theta/2}$.

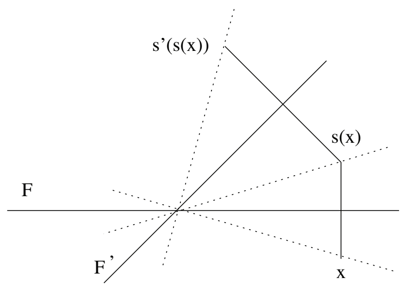
Enfin, on peut vérifier par un calcul matriciel (que le lecteur est invité à faire !) que $\boxed{J_{\theta'}J_\theta = R_{\theta'-\theta}}$ d'où

$$(*) \qquad \forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{s_{\varphi'} \circ s_\varphi = r_{2(\varphi'-\varphi)}.}$$

Ceci peut aussi se voir géométriquement comme suit. Posons $f = s_{\varphi'} \circ s_\varphi$; Comme $\mathrm{d\acute{e}t}(f) = 1$, alors f appartient à $\mathrm{SO}(2)$ donc est une rotation r_θ. Pour déterminer l'angle θ, il suffit de voir de combien « tourne » un vecteur x arbitraire. Or si on prend $x = u_\varphi$, alors $s_\varphi(x) = x$ et donc $f(x) = s_{\varphi'}(x)$ est le symétrique de x par rapport à la droite $\mathbb{R}u_{\varphi'}$, d'où

$$\varphi' - \varphi = \widehat{xu_{\varphi'}} = \widehat{u_{\varphi'}f(x)} \qquad \text{et donc} \qquad \widehat{xf(x)} = 2(\varphi' - \varphi)\,.$$

(Dans la figure ci-dessous, prendre x sur la droite F.)



Observons que dans le terme de droite de $(*)$, la rotation obtenue ne dépend que de la différence $\varphi' - \varphi$ et donc, pour obtenir r_θ, on peut choisir arbitrairement φ ou bien φ', c.-à-d., on a, pour tout $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$:

$$(**) \qquad \boxed{r_\theta = s_{\varphi+\frac{\theta}{2}} \circ s_\varphi = s_\varphi \circ s_{\varphi-\frac{\theta}{2}}}$$

Comme $s_\varphi^2 = \mathrm{id}$, ceci permet de décrire complètement la « table de multiplication » dans $\mathrm{O}(2)$ (noter que $\mathrm{O}(2)$ n'est **pas** commutatif) :

***Proposition 2.4.13* (Structure de $\mathrm{O}(2)$).** — *Pour tout* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, *on a* $\boxed{r_\theta \circ r_\varphi = r_{\theta+\varphi} = r_\varphi \circ r_\theta}$ $\boxed{s_\theta \circ s_\varphi = r_{2(\theta-\varphi)}}$ *et*

$$\boxed{r_\theta \circ s_\varphi = s_{\varphi+\frac{\theta}{2}}} \qquad \boxed{s_\varphi \circ r_\theta = s_{\varphi-\frac{\theta}{2}}}$$

Terminons ce paragraphe avec la proposition suivante. Par définition, la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est orthonormée directe. La base $\mathscr{C}_0 = (e_2, e_1)$ est orthonormée indirecte puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant -1.

Proposition 2.4.14. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit r_θ la rotation d'angle θ dans* $\mathbb{R}^2$ (cf. 2.4.10).

(1) *La matrice de r_θ dans* **toute b.o.n. directe** *est* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

(2) *La matrice de r_θ dans la base $\mathscr{C}_0 = (e_2, e_1)$ et dans* **toute b.o.n. indirecte** *est $R_{-\theta}$.*

Démonstration. — (1) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(r_\theta) = R_\theta$. Si $\mathscr{B}$ est une b.o.n. directe, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ appartient à SO(2), et comme SO(2) est commutatif, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = P^{-1} R_\theta P$ égale R_θ.

(2) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_0}(r_\theta) = R_{-\theta}$. Si $\mathscr{C}$ est une b.o.n. indirecte, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_0}(\mathscr{C})$ appartient à SO(2), et comme SO(2) est commutatif, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(r_\theta) = P^{-1} R_{-\theta} P$ égale $R_{-\theta}$. □

***Description des éléments de** $O(3)$.* — Commençons par une remarque sur $M_3(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, alors $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré 3 donc a dans $\mathbb{C}$:

(a) ou bien une racine réelle λ_1 et deux racines $z, \overline{z} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$,

(b) ou bien trois racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (pas nécessairement distinctes).

Comme A est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \begin{cases} \lambda_1 \, z \, \overline{z} & \text{dans le cas (a)} \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \text{dans le cas (b).} \end{cases}$$

Supposons maintenant $A \in \mathrm{O}(3)$ et notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ correspondant à A. Alors on sait que $\mathrm{dét}(A) = \pm 1$, et que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\lambda = \pm 1$. Dans le cas (a), on a $z = x + iy$ avec $y \neq 0$, donc $z\overline{z} = x^2 + y^2$ est un réel > 0, et donc l'égalité $\mathrm{dét}(A) = \lambda_1 z \overline{z}$ entraîne que $\mathrm{dét}(A)$ et λ_1 (tous deux $\in \{-1, 1\}$) sont de même signe, donc sont égaux. Dans le cas (b), on a $\lambda_i = \pm 1$, et les λ_i ne peuvent être tous les trois égaux à $-\mathrm{dét}(A)$, car sinon leur produit vaudrait $-\mathrm{dét}(A)$ au lieu de $\mathrm{dét}(A)$. Ceci montre déjà que, dans les deux cas, $\mathrm{dét}(A) = \pm 1$ est une valeur propre de A. Étudions les cas selon que $\mathrm{dét}(A) = 1$ ou -1.

1er cas : $\mathrm{dét}(A) = 1$, i.e. $A \in \mathrm{SO}(3)$. Le cas $A = I_3$ étant trivial, supposons de plus que $A \neq I_3$. On a vu que 1 est valeur propre de A ; soit f_3 un vecteur propre associé, quitte à diviser f_3 par sa norme, on peut supposer que $\|f_3\| = 1$.

Soit $P = (\mathbb{R} f_3)^\perp$, c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, i.e. un plan. Pour tout $x \in P$, on a (puisque $Af_3 = f_3$ et que A préserve le produit scalaire) :

$$(Ax \mid f_3) = (Ax \mid Af_3) = (x \mid f_3) = 0.$$

Ceci montre que $Ax \in P$, i.e. P est stable par A, donc A induit une isométrie u_P de P. Soit $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ une base de P, alors $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$(\star) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u_P) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

d'où $\mathrm{dét}(u_P) = \mathrm{dét}(A) = 1$, donc u_P est une rotation de P. Notons θ son angle. On a $\theta \neq 0$, car sinon on aurait $u_P = \mathrm{id}_P$ et donc, d'après $(\star)$, $u = \mathrm{id}$ d'où $A = I_3$, cas trivial qu'on a exclu. De plus, comme $u_P \neq \mathrm{id}_P$ alors 1 n'est pas valeur propre de u_P (cf. 2.4.10), et donc $u_P - \mathrm{id}_P$ et $A - I_3$ sont de rang 2. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1, donc engendré par f_3. On dit que $\mathbb{R} f_3 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est **l'axe** de la rotation $A \neq I_3$.

D'autre part, on peut déterminer $\theta \in [-\pi, \pi]$ au signe près en prenant la trace. En effet, l'égalité précédente nous montre que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u) = 1 + \mathrm{Tr}(u_P)$; d'autre part, on sait que $\mathrm{Tr}(u_P) = 2\cos(\theta)$ (cf. 2.4.10) donc, combinant ces deux égalités, on obtient que :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta),} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}}$$

ce qui détermine $\cos(\theta)$, et détermine donc θ au signe près.

Pour fixer le signe de θ, il faut choisir une **orientation** de P (cf. 2.4.14). On la choisit en disant qu'une b.o.n. (f_1, f_2) de P est **directe** si la b.o.n. (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ (muni de l'orientation canonique) est directe, c.-à-d., si $\det_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3) = 1$.

Soit (f_1, f_2) une telle b.o.n. directe de P. Alors on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on dira alors que A (ou u) est la **rotation d'axe orienté par** f_3 **et d'angle** θ.

Remarquons tout de suite que si on change f_3 en $-f_3$, alors la base $(f_2, f_1, -f_3)$ est directe et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{(f_2,f_1,-f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc A est aussi la **rotation d'axe orienté par** $-f_3$ **et d'angle** $-\theta$.

Définition 2.4.15. — Soit $A \neq I_3$ une rotation d'axe $\mathbb{R}f_3$ et d'angle θ. Lorsque $\theta = \pi$ (i.e. lorsque $\cos(\theta) = -1$, ce qui équivaut à $\mathrm{Tr}(A) = -1$), l'orientation de l'axe n'a pas d'importance, puisque $-\pi = \pi$ modulo 2π ; dans ce cas on dit que A est le **demi-tour d'axe** $\mathbb{R}f_3$.

Pour déterminer explicitement le signe de $\sin(\theta)$ (lorsque $\theta \neq \pi$), on dispose du lemme suivant.

Lemme 2.4.16. — *Soit $A \neq I_3$ une rotation d'axe D, orienté par un vecteur $v_3 \neq 0$, et d'angle θ. Soit $x \in \mathbb{R}^3 - D$. Alors le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du déterminant $\det_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$.*

Démonstration. — Notons f_3 le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\|v_3\|}v_3$ et écrivons $x = y + \mu f_3$, où y est la projection orthogonale de x sur $P = D^\perp$ (et $\mu = (x \mid f_3)$). Comme $x \notin D$, on a $y \neq 0$, posons $\rho = \|y\|$, alors $f_1 = \dfrac{1}{\rho}y$ est un vecteur unitaire de P. Il existe dans le plan P deux vecteurs unitaires orthogonaux à f_1 et seul l'un d'eux, f_2, est tel que la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3)$ vérifie $\det(Q) = 1$, i.e. tel que (f_1, f_2) soit une b.o.n. directe de P. Alors, notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par A, on a :

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $u(x) = u(\rho f_1 + \mu f_3)$ égale $(\rho\cos\theta)f_1 + (\rho\sin\theta)f_2 + \mu f_3$, donc la matrice

$$M = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(x, u(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \mu & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\rho^2\sin\theta$. Comme $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$ égale QM, et $\det(Q) = 1$, on obtient que

$$\det(M') = \det(Q)\det(M) = \det(M) = \rho^2\sin\theta$$

est du même signe que $\sin\theta$, et il en est de même pour $\det_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3) = \|v_3\| \cdot \det_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$. □

Remarquons que puisque le résultat ci-dessus est valable pour *tout* $x \in \mathbb{R}^3 - D$, on aura intérêt à choisir, en pratique, un tel x de façon à ce que le calcul du déterminant $\det_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ soit « le plus simple possible ». On récapitulera plus loin les résultats obtenus dans le cas où $A \in \mathrm{SO}(3)$; traitons maintenant le cas où $A \in \mathrm{O}^-(3)$.

2ème cas : $\det(A) = -1$, i.e. $A \in \mathrm{O}^-(3)$. Le cas $A = -I_3$ étant trivial, supposons de plus que $A \neq -I_3$. On a vu que $-1 = \det(A)$ est valeur propre de A ; soit f_3 un vecteur propre associé, quitte à diviser f_3 par sa norme, on peut supposer que $\|f_3\| = 1$.

On montre comme précédemment que le plan $P = (\mathbb{R}f_3)^\perp$ est stable par u, et que la restriction u_P de u à P est de déterminant 1, donc une rotation. On fait le même choix d'orientation de P, c.-à-d., on choisit une b.o.n. (f_1, f_2) de P telle que (f_1, f_2, f_3) soit une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$, tel que

$$(\dagger) \qquad \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\theta \neq \pi$, car sinon on aurait $u = -\mathrm{id}$ d'où $A = -I_3$, cas trivial qu'on a exclu. De plus, comme $u_P \neq -\mathrm{id}_P$ alors -1 n'est pas valeur propre de u_P (cf. 2.4.10), et donc $u_P + \mathrm{id}_P$ et $A + I_3$ sont de rang 2. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ est de dimension 1, donc engendré par f_3. On dit que $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ est la droite des **anti-invariants** de A.

D'autre part, on peut déterminer $\theta \in [-\pi, \pi]$ au signe près en prenant la trace. En effet, (†) nous montre que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u)$ égale $-1 + 2\cos(\theta)$, donc :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta),} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Tr}(A) + 1}{2}}$$

ce qui détermine $\cos(\theta)$, et détermine donc θ au signe près. Dans le cas particulier où $\theta = 0$, i.e. $u_P = \mathrm{id}_P$, A est la **symétrie orthogonale** σ_P par rapport au plan P (cf. 2.3.3 et 2.3.4).

Dans le cas général (i.e. lorsque $\theta \neq 0$), on voit que

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u\sigma_P) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(\sigma_P u)$$

donc $u\sigma_P = \sigma_P u$ est la rotation R d'axe D orienté par f_3 et d'angle θ, et donc $u = R\sigma_P = \sigma_P R$ est la composée commutative de σ_P et de R. On dit alors que A est la **rotation gauche d'axe D orienté par f_3 et d'angle θ**.

Remarquons tout de suite que si on change f_3 en $-f_3$, alors la base $(f_2, f_1, -f_3)$ est directe et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{(f_2,f_1,-f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc A est aussi la **rotation gauche d'axe D orienté par $-f_3$ et d'angle $-\theta$**.

Pour déterminer explicitement le signe de $\sin(\theta)$ (lorsque $\theta \neq 0$), on dispose du lemme suivant.

Lemme 2.4.17. — *Soit $A \neq -I_3$ une rotation gauche d'axe D, orienté par un vecteur $v_3 \neq 0$, et d'angle $\theta \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 - D$. Alors le déterminant $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ est de* **même signe** *que $\sin(\theta)$.*

Démonstration. — Notons f_3 le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\|v_3\|}v_3$ et écrivons $x = y + \mu f_3$, où y est la projection orthogonale de x sur $P = D^\perp$. Comme $x \notin D$, on a $y \neq 0$, posons $\rho = \|y\|$, alors $f_1 = \dfrac{1}{\rho}y$ est un vecteur unitaire de P. Il existe dans le plan P deux vecteurs unitaires orthogonaux à f_1 et seul l'un d'eux, f_2, est tel que la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f_1, f_2, f_3)$ vérifie $\mathrm{dét}(Q) = 1$. Alors, notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par A, on a

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $u(x) = u(\rho f_1 + \mu f_3)$ égale $(\rho\cos\theta)f_1 + (\rho\sin\theta)f_2 - \mu f_3$, donc la matrice

$$M = \mathrm{Mat}_{(f_1,f_2,f_3)}(x, u(x), f_3) = \begin{pmatrix} \rho & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & \rho\sin\theta & 0 \\ \mu & -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\rho^2 \sin\theta$. Comme $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$ égale QM, et $\mathrm{dét}(Q) = 1$, alors

$$\mathrm{dét}(M') = \mathrm{dét}(Q)\,\mathrm{dét}(M) = \mathrm{dét}(M) = \rho^2 \sin\theta$$

est de même signe que $\sin\theta$, et il en est de même pour $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3) = \|v_3\| \cdot \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, f_3)$. □

En résumé, on a obtenu le théorème suivant.

***Théorème 2.4.18* (Classification des éléments de O(3)).** — *On a* $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \cup \mathrm{O}^-(3)$ *(réunion disjointe).*

(1) *Si* $A \in \mathrm{SO}(3)$, *alors* $A = I_3$ *ou bien* $D = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ *est de dimension* 1 *et* A *est une rotation d'axe* D. *Dans le second cas, l'angle de rotation* θ *est déterminé au signe près par l'égalité* $2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(A) - 1$. *Pour fixer le signe, on choisit un générateur* v_3 *de* D, *ce qui détermine une orientation du plan* $P = D^\perp$. *Alors, pour* $x \in \mathbb{R}^3 - D$ *arbitraire,* $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ *est du même signe que* $\sin(\theta)$, *et l'on dit que* A *est la* **rotation d'axe orienté par** v_3 **et d'angle** θ. *Dans le cas particulier où* $\theta = \pi$, *on dit que* A *est le* **demi-tour d'axe** D.

(2) *Si* $A \in \mathrm{O}^-(3)$, *alors* $A = -I_3$ *ou bien* $D = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ *est de dimension* 1 *et* A *est une rotation gauche d'axe* D. *Dans le second cas, l'angle de rotation* θ *est déterminé au signe près par l'égalité* $2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(A) + 1$. *Pour fixer le signe, on choisit un générateur* v_3 *de* D, *ce qui détermine une orientation du plan* $P = D^\perp$. *Alors, pour* $x \in \mathbb{R}^3 - D$ *arbitraire,* $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, Ax, v_3)$ *est de même signe que* $\sin(\theta)$, *et l'on dit que* A *est la* **rotation gauche d'axe orienté par** v_3 **et d'angle** θ. *Dans le cas particulier où* $\theta = 0$, A *est la* **symétrie orthogonale** *par rapport au plan* P.

2.4.19. Produit vectoriel et déterminant des éléments de $O(3)$**.** — Dans ce paragraphe, on donne une définition « intrinsèque » du produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui utilise la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Ceci a pour conséquence qu'on peut calculer le produit vectoriel dans n'importe quelle base orthonormée *directe*. De plus, ceci donne un moyen de calcul très simple du déterminant (égal à ± 1) d'un élément A de $O(3)$: il suffit pour cela de calculer un mineur (= sous-déterminant) de taille 2. On présente ces résultats sous la forme d'un exercice corrigé.

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard $(\ |\ )$ et de la norme euclidienne associée $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique (qui est orthonormée) et soit $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ l'espace dual de E. Pour tout $x \in E$, soit $\phi_x \in E^*$ l'application $w \mapsto (x \mid w)$.

(1) Montrer que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire et bijective.

<u>Solution</u> : D'abord, il résulte de la bilinéarité de $(\ |\ )$ que, pour tout $x \in E$, l'application $\phi_x : w \mapsto (x \mid w)$ est une forme linéaire sur E, i.e. un élément de E^*, et que l'application $\theta : E \to E^*$, $x \mapsto \phi_x$ est linéaire. Son noyau est

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \phi_x = 0\} = \{x \in E \mid \forall y \in E, \quad (x \mid y) = 0\}$$

qui est le noyau de $(\ |\ )$. Or ce noyau est nul, puisque $(x \mid x) = 0$ entraîne $x = 0$. Ceci montre que θ est injective. Comme $\dim E^* = \dim E = 3$, il résulte du théorème du rang que θ est aussi surjective, donc bijective.

(2) Pour tout $u, v \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w)$ pour tout $w \in E$. On note $f(u, v) = u \wedge v$ et on l'appelle le produit vectoriel de u et v.

<u>Solution</u> : u, v étant fixés, l'application $\gamma_{u,v} : E \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w)$ est linéaire, i.e. est un élément de E^*. Donc, d'après la question précédente, il existe un unique vecteur $f(u, v) \in E$ tel que $\gamma_{u,v} = \phi_{f(u,v)}$, i.e. tel que

$$\forall w \in E, \qquad \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) = (f(u, v) \mid w).$$

Désormais, on note $f(u, v) = u \wedge v$.

(3) Écrivant $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et prenant $w = e_1$, puis $w = e_2$ et $w = e_3$, déterminer les coordonnées (f_1, f_2, f_3) de $u \wedge v$ dans la base $\mathscr{B}_0$.

<u>Solution</u> : On a $f_1 = (u \wedge v \mid e_1) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, e_1) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = u_2 v_3 - u_3 v_2$. On montre de même que $f_2 = (u \wedge v \mid e_2) = u_3 v_1 - u_1 v_3$ et $f_3 = (u \wedge v \mid e_3) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. On peut aussi procéder « par identification », i.e. pour u, v fixés et pour un vecteur $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ variable, on a :

$$(f(u, v) \mid w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, w_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, w_3$$

(en développant par rapport à la 3e colonne), d'où par identification :

$$\begin{cases} f_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \\ f_2 = -(u_1v_3 - u_3v_1) \ = u_3v_1 - u_1v_3, \\ f_3 = u_1v_2 - u_2v_1. \end{cases}$$

(4) Montrer que l'application $E\times E \to E$, $(u, v) \mapsto u\wedge v$ est bilinéaire, et qu'elle est alternée (i.e. $u\wedge u = 0$ pour tout $u \in E$).

Solution : La bilinéarité de l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ ainsi que l'égalité $u \wedge u = 0$ peuvent se déduire de l'égalité

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

établie dans la question précédente. Ceci peut aussi se voir directement, comme suit. Soient $u, u', v, v' \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $w \in E$, on a

$$\begin{aligned} (tu \wedge v + u' \wedge v \mid w) &= t(u \wedge v \mid w) + (u' \wedge v \mid w) = t\,\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) + \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u', v, w) \\ &= \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(tu + u', v, w) = ((tu + u') \wedge v \mid w). \end{aligned}$$

Comme $(\ \mid\ )$ est non dégénéré (i.e. de noyau nul), ceci entraîne $tu \wedge v + u' \wedge v = (tu + u') \wedge v$. On montre de même que $u \wedge (tv + v') = tu \wedge v + u \wedge v'$. Donc l'application $E \times E \to E$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire. De plus, pour tout $u \in E$, on a $0 = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, u, u \wedge u) = (u \wedge u \mid u \wedge u)$, d'où $u \wedge u = 0$.

(5) Soient $u, v, w \in E$. Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, montrer que $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w)$.

Solution : Si $\mathscr{C} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathscr{D}$ sont deux bases de E et si $g \in \mathrm{End}(E)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)$ la matrice de g en prenant $\mathscr{C}$ comme « base de départ » et $\mathscr{D}$ comme « base d'arrivée », i.e. la matrice qui exprime $g(f_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{D}$. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(e_1) = u$, $g(e_2) = v$ et $g(e_3) = w$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}(g) = P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u, v, w)$$

d'où $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) = \mathrm{dét}(P) \cdot \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(u, v, w)$. Or par hypothèse $P \in \mathrm{SO}(3)$, d'où $\mathrm{dét}(P) = 1$ et donc $\mathrm{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, w) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(u, v, w)$.

(6) Soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et soit $p \in E$ l'unique vecteur tel que $\mathscr{B} = (u, v, p)$ soit une base orthonormée directe de E. En utilisant la question précédente montrer que, pour tout $w \in E$, on a $(u \wedge v \mid w) = (p \mid w)$. Que peut-on en conclure ?

Solution : Tout $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = au+bv+cp$, avec $c = (p \mid w)$ (et de même $a = (u \mid w)$, etc.) donc

$$(u \wedge v \mid w) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & (p \mid w) \end{vmatrix} = (p \mid w).$$

Comme $(\ \mid\ )$ est non dégénéré (car défini positif), il en résulte que $p = f(u, v)$. Donc : *étant donnés deux vecteurs unitaires orthogonaux u, v, le produit vectoriel $u\wedge v$ est l'unique vecteur p tel que (u, v, p) soit une base orthonormée directe.* Et donc si $\mathscr{B}' = (u, v, p')$ est une base orthonormée, on a les équivalences :

$$\mathscr{B}' \text{ directe } \Leftrightarrow p' = p, \qquad \mathscr{B}' \text{ indirecte } \Leftrightarrow p' = -p.$$

(7) Soit $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \in O(3)$ et soient C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. Déduire de la question précédente que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2$, et aussi que $A \in O^-(3) \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2$. (Remarque : on a donc $C_3 = \mathrm{dét}(A)\, C_1 \wedge C_2$.)

Si par exemple $t_3 \neq 0$, en déduire, en utilisant la formule explicite pour $C_1 \wedge C_2$ obtenue dans la question 3, que $A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = t_3$ (et donc $A \in O^-(3) \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = -t_3$).

Solution : A est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base orthonormée $\mathscr{C} = (C_1, C_2, C_3)$. Donc, d'après la question précédente, on sait que :

$$\begin{cases} A \in \mathrm{SO}(3) \Leftrightarrow \mathscr{C} \text{ est directe } \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2, \\ A \in O^-(3) \Leftrightarrow \mathscr{C} \text{ est indirecte } \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2. \end{cases}$$

En particulier, si $t_3 \neq 0$ alors on a les équivalences :
$$\begin{cases} t_3 = u_1v_2 - u_2v_1 \Leftrightarrow C_3 = C_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow \text{dét}(A) = 1, \\ t_3 = -(u_1v_2 - u_2v_1) \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow \text{dét}(A) = -1. \end{cases}$$
On a bien sûr des résultats analogues si $t_1 \neq 0$ ou si $t_2 \neq 0$, mais **attention**, pour t_2 le « mineur » correspondant est $u_3v_1 - u_1v_3 = -(u_1v_3 - u_3v_1)$, voir le calcul fait dans la question 3.

(8) Soient $x, y \in E$ deux vecteurs linéairement indépendants, et soient $r = \|x\|$ et $r' = \|y\|$. Soit P le plan engendré par x et y, soit (u, v) une base orthonormée de P, où $u = \frac{1}{r}x$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $y = r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$. Montrer que $\|x \wedge y\| = rr' \,|\sin(\theta)|$. Indication : Utiliser la question 4 pour exprimer $x \wedge y$ en fonction de $u \wedge v$ puis, notant $\mathscr{B}$ la base orthonormée directe $(u, v, u \wedge v)$, calculer $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y)$ et utiliser la question 5.

Solution : Par hypothèse, on a $x = r\,u$ et $y = r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$ donc, comme $\wedge$ est bilinéaire et alterné, on a :
$$x \wedge y = r\,u \wedge r'(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v) = rr' \sin(\theta) u \wedge v.$$
Par conséquent, notant $\mathscr{B}$ la base orthonormée directe $(u, v, u \wedge v)$, on a
$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y) = \begin{pmatrix} r & r'\cos(\theta) & 0 \\ 0 & r'\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & rr'\sin(\theta) \end{pmatrix},$$
donc $\text{dét}_{\mathscr{B}}(x, y, x \wedge y) = (rr')^2 \sin(\theta)^2$. Or, d'après la question 5, ceci égale $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(x, y, x \wedge y) = (x \wedge y \mid x \wedge y) = \|x \wedge y\|^2$. On en déduit que $\|x \wedge y\| = rr' \,|\sin(\theta)|$.

(9) Montrer qu'une base orthonormée $\mathscr{C} = (u, v, f)$ est directe si et seulement si la base $\mathscr{D} = (f, u, v)$ est directe.

Solution : La matrice de passage $\text{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1, donc $\mathscr{C}$ est directe si et seulement si $\mathscr{D}$ l'est. On pouvait aussi dire que le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux colonnes, d'où :
$$\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, v, f) = -\,\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(u, f, v) = \text{dét}_{\mathscr{B}_0}(f, u, v)$$
et donc (u, v, f) est directe si et seulement si (f, u, v) l'est.

(10) Soient $f \in E$ un vecteur unitaire et P le plan orthogonal à f. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ et soit θ l'unique élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. Soit R la rotation d'axe $\mathbb{R}f$ orienté par f et d'angle θ. Montrer que :
$$(*) \qquad \forall y \in P, \qquad R(y) = a\,y + b\,(f \wedge y),$$
(si $y = 0$ c'est clair, et si $y \neq 0$ écrire $y = r\,u$ avec u unitaire et $r = \|y\|$), puis que :
$$(**) \qquad \forall x \in E, \qquad R(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge \pi(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge x,$$
où $\pi(x) = x - (x \mid f)f$ est la projection orthogonale de x sur P. Enfin, si $f = \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}$, écrire $\text{Mat}_{\mathscr{B}_0}(R)$ sous la forme $aI_3 + (1-a)S + bA$, pour deux matrices S, A à déterminer.

Solution : Si $y = 0$, l'égalité $(*)$ est $0 = 0$, donc on peut supposer $y \neq 0$ et poser $y = ru$, où u est unitaire et $r = \|y\|$. Les deux membres de $(*)$ étant linéaires en y, il suffit d'établir $(*)$ lorsque $y = u$. Soit alors v l'unique vecteur de P tel que (u, v, f) soit une base orthonormée directe de E. D'après la définition de R, on a $\text{Mat}_{(u,v,f)}(R) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $R(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$. Or, d'après la question précédente, la base (f, u, v) est directe, donc d'après la question 6, on a $v = f \wedge u$. On a donc : $R(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta) f \wedge u$, et revenant au cas de $y \in P$ arbitraire, on a donc obtenu que :
$$(*) \qquad \forall y \in P, \qquad R(y) = \cos(\theta)u + \sin(\theta) f \wedge y = a\,y + b\,(f \wedge y).$$
Soit maintenant $x \in E$, sa projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}f$ est $(x \mid f)f$, et sa projection orthogonale sur P est $\pi(x) = x - (x \mid f)f$. On a bien sûr $R(\lambda f) = \lambda f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc on déduit de la question précédente que :
$$R(x) = (x \mid f)f + R(\pi(x)) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge \pi(x),$$

De plus, comme $x = (x \mid f)f + \pi(x)$ et que $\wedge$ est bilinéaire et alterné, on a $f \wedge x = f \wedge \pi(x)$, et l'on obtient l'égalité désirée :

$$(**) \qquad \forall x \in E, \qquad R(x) = (x \mid f)f + a\,\pi(x) + b\,f \wedge x.$$

Enfin, écrivons $f = \begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}$, avec $\|f\|^2 = p^2 + q^2 + t^2 = 1$. Alors, on a

$$R(e_1) = p\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} p^2 \\ pq \\ pt \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -q \end{pmatrix}$$

$$R(e_2) = q\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} pq \\ q^2 \\ qt \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

$$R(e_3) = t\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} + a\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix}\right) + b\begin{pmatrix} p \\ q \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix} pt \\ qt \\ t^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0} = aI_3 + (1-a)\begin{pmatrix} p^2 & pq & pt \\ pq & q^2 & qt \\ pt & qt & t^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -t & q \\ t & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

2.5. Appendice (†) : mesure des angles dans $\mathbb{R}^2$

Dans cet appendice, on donne une démonstration (parmi d'autres) de l'existence et des propriétés des fonctions cosinus et sinus.

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et on note (e_1, e_2) la base canonique. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = x + iy$, où i est une racine carrée de -1, fixée une fois pour toutes. Ceci permet d'identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, en identifiant $z = x + iy$ au vecteur de coordonnées (x, y). Si $z = x + iy$, son **conjugué** est $\overline{z} = x - iy$. Soit

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\},$$

S^1 s'appelle le **cercle unité**.

On « rappelle » (ou l'on admet) les faits suivants : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it} = \exp(it)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) c'est un morphisme de groupes :

$$(1) \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}}$$

(b) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\exp(it)} = \exp(-it) = \exp(it)^{-1}$, par conséquent, f est à valeurs dans S^1.

(c) f est dérivable et sa dérivée est l'application $f' : t \mapsto ie^{it}$.

On note alors $\cos(t)$, resp. $\sin(t)$, la partie réelle, resp. imaginaire, de e^{it}, c.-à-d., on pose

$$(2) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).}$$

Alors, (a), (b) et (c) se récrivent :

$$(3) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}, \qquad \cos(t + t') = \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t'), \qquad \sin(t + t') = \sin(t)\cos(t') + \cos(t)\sin(t'),$$

$$(4) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(-t) = \cos(t), \qquad \sin(-t) = -\sin(t), \qquad \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

$$(5) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(t) = -\sin(t), \qquad \sin'(t) = \cos(t).$$

On montre alors le :

Théorème 2.5.1. — (1) *Le morphisme de groupes* $f : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{it}$ *est surjectif.*

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ *est le sous-groupe* $2\pi\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{R}$ *et* $\cos, \sin$ *sont périodiques de période* 2π.

Démonstration. — On a $\cos(0) = 1$ donc $\cos(t) > 0$ pour t voisin de 0, donc sin est strictement croissante au voisinage de 0, et comme $\sin(0) = 0$ on a $\sin(t) > 0$ pour $t > 0$ voisin de 0, et donc $\cos(t) < 1$ pour $t > 0$ voisin de 0.

Montrons d'abord qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. Supposons au contraire que $\cos(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Alors $\sin(t)$ serait croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\cos'(t) = -\sin(t)$, alors $\cos(t)$ serait décroissante et ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$ donc tendrait en $+\infty$ vers une limite $\ell \in [0, 1[$ ($\ell < 1$ car $\cos(t) < 1$ pour $t > 0$ voisin de 0). Mais alors $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ tendrait aussi vers ℓ, donc ℓ serait racine du polynôme

$$2X^2 - X - 1 = 2(X-1)(X + \frac{1}{2}),$$

ce qui est impossible puisque $\ell \in [0, 1[$. Cette contradiction montre qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. On note alors $\dfrac{\pi}{2}$ le plus petit réel $t_0 > 0$ tel que $\cos(t_0) = 0$. Tenant compte du fait que $\cos(-t) = \cos(t)$, on a donc :

$$\cos\Big(\pm\frac{\pi}{2}\Big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \Big]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big[\,, \quad \cos(t) > 0. \tag{6}$$

Donc sin est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, d'où $\sin(\pi/2) = 1$ (étant ≥ 0 et de carré $= 1$), donc sin est une bijection strictement croissante de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, et l'on a

$$e^{i\pi/2} = i, \tag{7}$$

et $t \mapsto e^{it}$ est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur le quart de cercle $\{(x, y) \in S^1 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$. D'après (1) ou (3), il résulte de (7) que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp\big(i(t + \frac{\pi}{2})\big) = ie^{it}, \qquad \text{d'où} \quad \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t), \qquad \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t). \tag{8}$$

En particulier, on a $e^{i\pi} = -1$, et $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \pi[$, donc cos est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Il en résulte que $t \mapsto e^{it}$ est une bijection de $[0, \pi]$ sur le demi-cercle supérieur $\{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$, et de $[-\pi, 0]$ sur le demi-cercle inférieur $\{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\}$. Ceci prouve la surjectivité.

D'autre part, on a l'inclusion et les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\dagger) \qquad 2\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \{T \in \mathbb{R} \mid e^{i(T+t)} = e^{it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\} &= \{T \in \mathbb{R} \mid \cos(T + t) = \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{T \in \mathbb{R} \mid \sin((T + t) = \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

En effet, comme $e^{2i\pi} = 1$ on a $2\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. D'autre part, si $T \in \mathrm{Ker}(f)$ i.e. si $e^{iT} = 1$ alors, d'après (1), on a $e^{i(T+t)} = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où la première égalité.

D'autre part, comme on a $\cos(t) = \sin(t + \dfrac{\pi}{2})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient que

$$\{T \in \mathbb{R} \mid \cos(T + t) = \cos(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\} = \{T \in \mathbb{R} \mid \sin(T + t) = \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

et cet ensemble égale donc $\{T \in \mathbb{R} \mid e^{i(T+t)} = e^{it}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(T+t) = \cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; montrons que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Quitte à changer T en $-T$, on peut supposer $T \geq 0$, soit alors n le plus grand entier ≥ 0 tel que $2n\pi \leq T$, alors $T - 2n\pi$ vérifie la même propriété que T et appartient à $[0, 2\pi[$. Donc, pour obtenir que $T = 2n\pi$, il suffit de montrer que 2π est le plus petit réel $s > 0$ tel que $\cos(s) = 1$.

Or, d'après ce qui précède, on sait que $1 > \cos(t) > -1$ pour tout $t \in]0, \pi[$. Supposons que $s \in]0, 2\pi[$ vérifie $\cos(s) = 1$, alors $\sin(s) = 0$ donc $e^{is} = 1$, donc $x = e^{is/2}$ vérifie $x^2 = 1$, d'où $x = \pm 1$ et donc $\cos(s/2) = \pm 1$, impossible puisque $s/2 \in]0, \pi[$. Ceci montre que 2π est le plus petit réel $s > 0$ tel que $\cos(s) = 1$.

Il en résulte que l'inclusion dans (†) plus haut est une égalité. Ceci montre que cos et sin sont périodiques de période 2π, et que $\mathrm{Ker}(f) = 2\pi\mathbb{Z}$. Le théorème est démontré. □

Remarque 2.5.2. — Dans ce qui précède, on a **défini** 2π comme le générateur positif du groupe $\mathrm{Ker}(f)$ (i.e. le plus petit élément > 0 de $\mathrm{Ker}(f)$). On retrouve que 2π est la longueur du cercle de rayon 1 comme suit. Pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto g(t) = (x(t), y(t))$ continûment dérivable, on peut montrer que la longueur dans $\mathbb{R}^2$ euclidien de la courbe $\gamma = \{g(t) \mid t \in [a, b]\}$ est donnée par la formule :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(g'(t) \mid g'(t))}\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

Appliquant ceci à $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$, on obtient

$$L(S^1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1}\, dt = 2\pi.$$

2.6. Appendice (†) : décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Afin d'énoncer un corollaire matriciel au théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, introduisons les notations suivantes. D'abord, notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont > 0.

Lemme 2.6.1. — *$\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — Soient $N, N' \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$, notons $t_1 \dots, t_n$ et $t'_1, \dots, t'_n$ leurs coefficients diagonaux. Alors NN' est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $t_i t'_i > 0$, d'où $NN' \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. Donc il suffit de montrer que $N^{-1} \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. Soient $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de N. Montrons par récurrence sur $r \leq n$ que $e_r = (1/t_r)C_r + \sum_{i<r} b_{ir} C_i$. C'est OK pour $r = 1$, car $C_1 = t_1 e_1$ d'où $e_1 = (1/t_1)C_1$. On peut donc supposer $r \geq 2$ et l'assertion établie pour $r-1$. En particulier, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{r-1}) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{r-1})$. Comme $C_r - t_r e_r \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{r-1})$, on en déduit qu'il existe des coefficients b'_{ir}, pour $i = 1, \dots, r-1$, tels que

$$t_r e_r = C_r + \sum_{i=1}^{r-1} b'_{ir} C_i\,,$$

d'où le résultat voulu au cran r, en divisant par t_r et en posant $b_{ir} = b'_{ir}/t_r$. Il en résulte que N^{-1} est triangulaire supérieure, de termes diagonaux les $1/t_i$, qui sont > 0. Ceci prouve le lemme. □

On déduit alors du théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt le :

***Corollaire 2.6.2* (Décomposition d'Iwasawa)**. — *L'application ci-dessous est bijective :*

$$\mathrm{O}(n) \times \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad (K, N) \mapsto KN$$

(Attention, ce n'est pas un morphisme de groupes, i.e. $(KN)(K'N') \neq KK'NN'$ en général.)

Démonstration. — Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, notons $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs colonnes de P. Alors $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $r = 1, \dots, n$, on ait $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_r)$, et $(v_r \mid f_r) > 0$, et ceci équivaut à dire que la matrice de passage $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ appartient à $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$. D'autre part, comme $\mathscr{C}$ est orthonormée, la matrice de passage $K = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C})$ appartient à $\mathrm{O}(n)$. D'après la formule de changement de base, on a

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = KN$$

ce qui prouve l'existence.

Montrons l'unicité : supposons qu'on ait $P = K'M$ avec $K' \in \mathrm{O}(n)$ et $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$, et notons $f_1, \dots, f_n$ les colonnes de la matrice $K' = PM^{-1}$. Alors $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{C}) = K'$ et la matrice exprimant $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_0) \cdot Mat_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = K'^{-1}P = M\,.$$

Alors, pour tout $r = 1, \dots, n$, on a $v_r = \sum_{i=1}^r m_{ir} f_i$, avec $(v_r \mid f_r) = m_{rr} > 0$. De plus, d'après le lemme précédent (ou par un calcul direct), pour tout $i = 1, \dots, n$, les vecteurs $f_1, \dots, f_i$ appartiennent à $V_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$, donc en forment une base orthonormée. Donc la base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ vérifie les conditions du théorème de Gram-Schmidt, d'où par unicité $M = N$, puis $K' = PN^{-1} = K$. □

Remarques 2.6.3. — (1) En appliquant ce qui précède à P^{-1}, on voit qu'il existe un couple unique $(K, N) \in O(n) \times \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1} = KN$, i.e. $P = N^{-1}K^{-1}$. Comme l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection sur chaque groupe, il en résulte que l'application $\mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(N, K) \mapsto NK$ est aussi une bijection.

(2) L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ a une structure naturelle d'espace topologique, définie par la distance associée à n'importe quelle norme sur $M_n(\mathbb{R})$, par exemple $\|(a_{ij})\|_\infty = \mathrm{Max}_{i,j} |a_{ij}|$ ou $\|(a_{ij})\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, et donc les sous-ensembles $\mathrm{O}(n), \mathrm{TS}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ héritent d'une structure d'espace topologique. Il est facile de voir que l'application (de multiplication) $(K, N) \mapsto KN$ est continue, et on peut montrer que c'est un homéomorphisme. D'abord, l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue, car $A^{-1} = (1/\det(A))\, {}^t\widetilde{A}$, où $\widetilde{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A (cf. **??**). Il suffit donc de montrer que,

si $A = KN$, l'application $f : A \mapsto N^{-1}$ est continue, car alors les applications $A \mapsto N$ et $A \mapsto K = AN^{-1}$ le seront aussi. Or, si l'on note $v_1, \dots, v_n$ les colonnes de A, la continuité de $f : A \mapsto N^{-1}$ résulte de la démonstration du théorème de Gram-Schmidt, car les coefficients de $N^{-1} = \mathrm{Mat}_{(v_1,\dots,v_n)}(e_1, \dots, e_n)$ sont des fonctions continues des produits scalaires $(v_i \mid v_j)$.

CHAPITRE 3

ESPACES AFFINES, CONIQUES ET QUADRIQUES

Résumé : Dans ce chapitre, on introduit la notion importante d'espace affine. De façon imagée, un espace affine $\mathscr{E}$ est « la même chose » qu'un espace vectoriel E dont on a oublié l'origine ; c'est le cadre naturel pour faire de la géométrie. Dans la section 1, on commence par introduire les notions de repère, de changement de repère, et d'application affine. Dans la section 2, on introduit les barycentres, et la notion de sous-espace affine. Dans la section 3, on incorpore les résultats du Chap. 6 en introduisant les « *espaces affines euclidiens* » et leurs isométries ; en particulier on étudie en profondeur les isométries du plan affine et de l'espace affine de dimension 3. On termine le chapitre par l'étude des coniques (dans le plan) et des quadriques (dans l'espace). Comme le précédent, ce chapitre contient beaucoup de résultats nouveaux et importants, qu'il faut essayer d'assimiler !

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux.

3.1. Espaces affines réels

Exemple 3.1.1. — Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathscr{D}_1$ la « droite affine » d'équation $x_1 + x_2 = 1$, ce n'est **pas un sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^2$: si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartiennent à $\mathscr{D}_1$, alors $x + y \notin \mathscr{D}_1$ (car $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 2$), et si $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$, alors $tx = (tx_1, tx_2) \notin \mathscr{D}_1$. Mais le vecteur $y - x = \binom{y_1 - x_1}{y_2 - x_2}$ appartient à la droite vectorielle D d'équation $z_1 + z_2 = 0$, engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u} = e_1 - e_2$. On a donc une application

$$\mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_1 \to D, \qquad (x, y) \mapsto y - x.$$

Notons $\overrightarrow{xy}$ le vecteur $y - x \in \mathbb{R}^2$, alors pour $x, y, z \in \mathscr{D}_1$ on a

$$\overrightarrow{xz} = z - x = (y - x) + (z - y) = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}. \tag{1}$$

D'autre part, pour tout $x = (x_1, x_2)$ appartenant à $\mathscr{D}_1$, et pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u} \in D$, il existe un unique $y \in \mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{v}$, à savoir $y = (x_1 + t, x_2 - t)$, et l'on notera $y = x + \overrightarrow{v}$. Donc :

$$\text{pour tout } x \in \mathscr{D}_1, \text{ l'application } \{x\} \times \mathscr{D}_1 \to D, \quad (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} \text{ est bijective} \tag{2}$$

et ceci équivaut aussi à dire que :

$$\text{l'application } \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_1 \times D, \quad (x, y) \mapsto (x, \overrightarrow{xy}) \text{ est bijective ;} \tag{2'}$$

son inverse est notée $(x, \overrightarrow{v}) \mapsto (x, x + \overrightarrow{v})$.

Remarque 3.1.2. — Ce qui précède est une propriété intrinsèque de $\mathscr{D}_1$, et ne dépend pas des coordonnées (x_1, x_2) choisies. Par exemple, soient $f_1 = (e_1 - e_2)/2$ et $f_2 = (e_1 + e_2)/2$, alors

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, donc $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et les coordonnées (y_1, y_2) dans la base $\mathscr{C}$ sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Avec ces nouvelles coordonnées, $\mathscr{D}_1$ est la « droite affine » d'équation $y_2 = 1$ et D est la droite vectorielle d'équation $y_2 = 0$; si P et Q, de coordonnées $(p, 1)$ et $(q, 1)$, appartiennent à $\mathscr{D}_1$, le vecteur $\overrightarrow{PQ} = (q - p)f_1$

[0]version du 13/5/2013

appartient à D, et réciproquement, pour tout $\overrightarrow{v} = tf_1 \in D$, le point $P + tf_1 = (p+t, 1)$ est l'unique point Q de $\mathscr{D}_1$ tel que $\overrightarrow{PQ} = tf_1$.

Ce qui précède est un cas particulier de, et conduit à, la définition suivante :

***Définition 3.1.3* (Espaces affines réels).** — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un **espace affine $\mathscr{E}$ de direction E** est un ensemble non-vide $\mathscr{E}$ muni d'une application

$$\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E, \qquad (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) $$\boxed{\text{Relation de Chasles : } \quad \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}} \qquad \forall x, y, z \in \mathscr{E}.$$

(2) L'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \times E, \quad (x, y) \mapsto (x, \overrightarrow{xy})$ est **bijective**.

On notera $(x, \overrightarrow{u}) \mapsto (x, x + \overrightarrow{u})$ la **bijection inverse**, c.-à-d., pour tout $x \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, $x + \overrightarrow{u}$ désigne l'unique $y \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u}$.

Vocabulaire : les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés « points », ceux de E sont appelés « vecteurs ». Si E est de dimension finie n, ce que nous supposerons par la suite, on pose $\dim \mathscr{E} = \dim E$.

Remarque 3.1.4. — Dans la définition précédente, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un corps arbitraire k, on obtient ainsi la notion d'espace affine sur k. Comme nous ne considérerons que des espaces affines sur $\mathbb{R}$, nous dirons simplement « espaces affines », sans préciser « réels ». De plus, pour abréger, on écrira souvent : « soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine », ou même : « soit $\mathscr{E}$ un espace affine (de dimension n) », sans préciser l'espace vectoriel E (appelé la « direction » de $\mathscr{E}$).

Exemple 3.1.5. — Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un espace affine, pour l'application $E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x$.

***Définition 3.1.6* (Repères cartésiens d'un espace affine de dimension finie)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, avec $\dim E = n$. Un **repère** (cartésien) $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ est un couple $(O, \mathscr{B})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ; on dira aussi que le $(n+1)$-uplet $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère de $\mathscr{E}$. Dans ce cas, pour tout point P de $\mathscr{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

et l'on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de P dans le repère $\mathscr{R}$.

Exemple 3.1.7. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, posons

$$\mathscr{E} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, \dots, n, \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

considéré comme espace affine de direction $E = \mathbb{R}^n$, c.-à-d., muni de l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i$. Notons O le point $(0, \dots, 0)$ de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ le repère $(O, \mathscr{B})$. Alors pour tout point $P = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathscr{E}$, ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont $(x_1, \dots, x_n)$. Si on fixe un point arbitraire $A = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathscr{E}$ et qu'on considère le repère $\mathscr{R}' = (A, \mathscr{B})$, alors les coordonnées $(x'_1, \dots, x'_n)$ de P dans $\mathscr{R}'$ sont données par l'égalité $\overrightarrow{AP} = x'_1 e_1 + \cdots x'_n e_n$, et comme par définition $\overrightarrow{AP} = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) e_i$, on obtient $x'_i = x_i - a_i$ pour tout i.

Ce qui précède est un cas particulier du théorème suivant :

***Théorème 3.1.8* (Changement de repère).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E, soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ la matrice de passage, et soient $O, O' \in \mathscr{E}$. Posons $\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$. Pour $M \in \mathscr{E}$ arbitraire, notons $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $(x'_1, \dots, x'_n)$) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ (resp. $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{C})$). Alors on a*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \qquad \text{et donc} \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - t_1 \\ \vdots \\ x_n - t_n \end{pmatrix}.$$

De façon abrégée, si l'on note X, X' et T les vecteurs colonnes ci-dessus, on a

$$\boxed{X = PX' + T} \qquad \boxed{X' = P^{-1}(X - T)}$$

Démonstration. — Soient X, X' comme ci-dessus et notons Y le vecteur colonne PX'. Alors, d'après la formule de changement de base dans E, on a :

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1 f_1 + \cdots + x'_n f_n = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,$$

et comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ on obtient

$$X = \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (t_i + y_i) e_i = T + PX'$$

et l'on a donc aussi $X' = P^{-1}(X - T)$, ce que l'on peut aussi retrouver en écrivant que

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i f_i = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i) e_i$$

d'où $X' = P^{-1}(X - T)$. $\square$

Définition et proposition 3.1.9 **(Applications affines)**. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est une* **application affine** *s'il existe un point $O \in \mathscr{E}$ tel que l'application $\phi : E \to E'$ définie par :*

$$\forall P \in \mathscr{E}, \qquad \phi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$$

soit **linéaire**. *Dans ce cas, on note $\phi = \overrightarrow{f}$, et les égalités ci-dessus sont vraies pour tout couple de points (I, P), c.-à-d., on a* **pour tout** *$I \in \mathscr{E}$:*

$$\boxed{\forall P \in \mathscr{E}, \quad \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP})} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad f(I + \overrightarrow{u}) = f(I) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).}$$

On dit alors que $\overrightarrow{f}$ est la **partie linéaire** *de f.*

Démonstration. — Fixons un point $O \in \mathscr{E}$. Comme l'application $\theta : E \to \mathscr{E}$, $\overrightarrow{u} \mapsto O + \overrightarrow{u}$ est une bijection, d'inverse $P \mapsto \overrightarrow{OP}$ alors l'application $\theta^{-1} \circ f \circ \theta$ est l'unique application $\phi : E \to E$ telle que

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad f(O + \overrightarrow{u}) = f(O) + \phi(\overrightarrow{u}) \qquad \text{(i.e. } \overrightarrow{f(O)f(P)} = \phi(\overrightarrow{OP}), \text{ pour tout } P \in \mathscr{E}).$$

On suppose que, pour ce choix de O, l'application $\phi : E \to E$ est **linéaire**. Soit $I \in \mathscr{E}$ arbitraire. D'après la relation de Chasles, et la définition de ϕ, on a, pour tout $P \in \mathscr{E}$:

$$\overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(I)} = \phi(\overrightarrow{OP}) - \phi(\overrightarrow{OI})$$

et comme ϕ est supposée linéaire, ceci égale $\phi(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI})$. D'après la relation de Chasles, à nouveau, on a $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IP}$. Posant $\overrightarrow{f} = \phi$, on a donc obtenu :

$$\forall I, P \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP}).$$

La proposition est démontrée. $\square$

Remarque 3.1.10. — Pour $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ arbitraire, et $O \in \mathscr{E}$, l'application $\phi : E \to E$ définie plus haut n'a aucune raison d'être linéaire : prendre par exemple $\mathscr{E} = E = \mathbb{R}$, $O = 0$ et $f(t) = t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $\phi(t) = f(t)$ n'est pas linéaire.

Proposition 3.1.11 **(Écriture d'une application affine dans des repères cartésiens)**

Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines, avec $\dim E = m$ et $\dim E' = n$, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine. Soient $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ et $\mathscr{R}' = (O', \mathscr{C})$ des repères de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et soient $(b'_1, \ldots, b'_n)$ les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathscr{R}'$.

Alors, pour tout $P \in \mathscr{P}$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathscr{R}$, les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ de $f(P)$ dans $\mathscr{R}'$ sont données par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}.}$$

Démonstration. — En effet, on a $\begin{pmatrix} y_1 - b'_1 \\ \vdots \\ y_n - b'_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. $\square$

Définition et proposition 3.1.12 **(Translations de $\mathscr{E}$).** — *Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on appelle* **translation de vecteur** $\overrightarrow{u}$ *l'application $t_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, qui à tout $x \in \mathscr{E}$ associe le point $x + \overrightarrow{u}$. C'est une application* **affine**, *dont la partie linéaire est id_E.*

Démonstration. — On fixe $O \in \mathscr{E}$ et pour tout $P \in \mathscr{E}$ on pose $P' = P + \overrightarrow{u}$. Alors

$$\overrightarrow{O'P'} = \underbrace{\overrightarrow{O'O}}_{=-\overrightarrow{u}} + \overrightarrow{OP} + \underbrace{\overrightarrow{PP'}}_{=\overrightarrow{u}} = \overrightarrow{OP}.$$

Avec les notations de 3.1.9, ceci montre que l'application ϕ égale id_E, qui est linéaire. Donc $t_{\overrightarrow{u}}$ est une application affine, de partie linéaire id_E. □

Lemme 3.1.13. — *Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, on a $\boxed{t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}}$. Donc l'ensemble des translations est un groupe commutatif ; en particulier, toute translation $t_{\overrightarrow{u}}$ est* **bijective, d'inverse** $t_{-\overrightarrow{u}}$.

Démonstration. — Pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $(t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}})(P) = t_{\overrightarrow{u}}(P + \overrightarrow{v}) = P + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(P)$. Ceci prouve la première assertion, et la seconde en découle facilement. □

Proposition 3.1.14 **(Composée d'applications affines).** — *Soient $\mathscr{E} \xrightarrow{f} \mathscr{E}' \xrightarrow{g} \mathscr{E}''$ deux applications affines, alors la composée $g \circ f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}''$ est affine, et sa partie linéaire est $\boxed{\overrightarrow{(g \circ f)} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}.}$*

Démonstration. — Fixons $O \in \mathscr{E}$ et posons $O' = f(O)$. Pour tout $M \in \mathscr{E}$ et $P \in \mathscr{E}'$, on a :

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{g(O')g(P)} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{O'P}).$$

En particulier, appliquant la deuxième égalité au cas où $P = f(M)$, on obtient :

$$\overrightarrow{(g \circ f)(O)(g \circ f)(M)} = \overrightarrow{g(f(O))g(f(M))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(O)f(M)}) = \overrightarrow{g}\Big(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})\Big) = (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{OM}).$$

D'après 3.1.9, ceci prouve que $g \circ f$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Théorème et définition 3.1.15 **(Transformations affines et groupe $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine.

(1) *On note $\mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathscr{E}$, i.e. applications affines $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$; il est stable par composition, c.-à-d., si $f, g \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ alors $g \circ f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$.*

(2) *Pour tout $O \in \mathscr{E}$, tout $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ s'écrit $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ \phi_O$, où ϕ_O est l'application affine définie par $\phi_O(P) = O + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$.*

(3) *Soit $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$, alors $\boxed{f \text{ bijective} \iff \overrightarrow{f} \text{ bijective.}}$*

(4) *On note $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) = \{f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E}) \mid f \text{ bijective}\}$; c'est un* **groupe**, *et l'application $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \to \mathrm{GL}(E)$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme de groupes.*

(5) *Pour tout $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$ et $\overrightarrow{u} \in E$, on a $f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f$; en particulier si $f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ alors $f \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$.*

Démonstration. — (1) découle de 3.1.14. Prouvons (2). Soient $O \in \mathscr{E}$ et $f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$, posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Of(O)}$ et $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f \in \mathrm{TAff}(\mathscr{E})$. Alors g est affine, sa partie linéaire est $\mathrm{id}_E \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$, et l'on a $g(O) = O$. Donc, pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{Og(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$ donc g égale ϕ_O, et l'on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi_O$, ce qui prouve (2). De plus, comme $t_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi_O$, on a :

$$f \text{ bijective} \iff \phi_O \text{ bijective} \iff \overrightarrow{f} \text{ bijective}$$

ce qui prouve (3).

Prouvons (4). Soit $f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$ et soient $O, P \in \mathscr{E}$. Posons $O' = f^{-1}(O)$ et $P' = f^{-1}(P)$, comme f est affine et $f(O') = O$, $f(P') = P$, on a :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{O'P'}) = \overrightarrow{f(O')f(P')} = \overrightarrow{OP}$$

et comme $\overrightarrow{f}$ est bijective, d'après (3), on obtient que

$$\overrightarrow{f^{-1}(O)f^{-1}(P)} = \overrightarrow{O'P'} = (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{OP})$$

et ceci prouve que f^{-1} est affine, de partie linéaire $(\overrightarrow{f})^{-1}$. Le reste du point (4) découle alors de 3.1.14.

Prouvons (5). Pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a

$$(f \circ t_{\overrightarrow{u}})(P) = f(P + \overrightarrow{u}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = (t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \circ f)(P)$$

ce qui prouve le premier point de (5), et le second en découle. $\square$

Remarque 3.1.16. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ et $(\mathscr{E}', E')$ deux espaces affines de dimension finie, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine bijective. Alors $\overrightarrow{f} : E \to E'$ est une application linéaire bijective, donc E et E' sont isomorphes ; en particulier ils ont même dimension, donc $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{E}'$.

3.2. Barycentres et sous-espaces affines

***Théorème et définition 3.2.1* (Barycentres).** — *Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathscr{E}$ et $t_1, \ldots, t_n$ des réels* **tels que** $\boxed{t_1 + \cdots + t_n = 1}$. *Alors il existe un unique point $G \in \mathscr{E}$ tel que :*

$$(*) \qquad \boxed{\forall I \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{IG} = t_1 \overrightarrow{IP_1} + \cdots + t_n \overrightarrow{IP_n}}$$

et G s'appelle le **barycentre** *des points pondérés (P_i, t_i) (i.e. chaque point P_i est affecté du « poids » t_i). On notera :*

$$(**) \qquad \boxed{G = t_1 P_1 + \cdots + t_n P_n.}$$

Lorsque $t_1 = \cdots = t_n$, d'où $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$, on dit que G est le **centre de gravité** *ou* **isobarycentre** *des points $P_1, \ldots, P_n$.*

Démonstration. — Fixons une origine $O \in \mathscr{E}$. Si G existe, il vérifie nécessairement

$$(\dagger) \qquad \overrightarrow{OG} = t_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + t_n \overrightarrow{OP_n}$$

d'où l'unicité de G (s'il existe). Réciproquement, définissons G par l'égalité ci-dessus et montrons que G vérifie $(*)$ pour tout $I \in \mathscr{E}$. D'après la relation de Chasles et $(\dagger)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{IP_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OP_i}) = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\Big)}_{=1} \overrightarrow{IO} + \sum_{i=1}^{n} t_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{IG}.$$

Ceci prouve le théorème. $\square$

Remarque 3.2.1.1. — La démonstration du théorème montre que si un point G' vérifie l'égalité $(*)$ pour *un* point I, alors G' égale G et vérifie l'égalité $(*)$ pour *tout* point I.

***Définition 3.2.2* (Segments).** — Soient $A, B \in \mathscr{E}$, on définit le **segment** $[A, B]$ comme l'ensemble des points qui sont « entre » A et B, i.e. l'ensemble des points P de la forme

$$P = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA}, \qquad \text{avec } t \in [0, 1],$$

c'est donc aussi l'ensemble des barycentres $P = (1-t)A + tB$, avec $t \in [0, 1]$. En particulier, le *centre de gravité* de A, B (qui correspond à $t = 1/2$) est le **milieu** du segment $[A, B]$.

***Proposition 3.2.3* (Associativité des barycentres).** — *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, et G le barycentre des points pondérés (A_1, t_1), …, (A_n, t_n).*

(1) *On suppose que $\mu = t_1 + \cdots + t_{n-1} = 1 - t_n$ est non nul. Soit H le barycentre des points pondérés $(A_1, t_1/\mu)$, …, $(A_{n-1}, t_{n-1}/\mu)$, alors* $\boxed{G \text{ est le barycentre de } (H, \mu) \text{ et de } (A_n, t_n).}$

(2) *En particulier, si $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$, soit G (resp. H) le centre de gravité G de $A_1, \ldots, A_n$ (resp. de $A_1, \ldots, A_{n-1}$), alors G est le barycentre de $(H, (n-1)/n)$ et de $(A_n, 1/n)$.*

Démonstration. — Soit $O \in \mathscr{E}$. Alors H est défini par $\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n-1} t_i \overrightarrow{OA_i}$ et le barycentre G' de (H, μ) et de (A_n, t_n) est défini par

$$\overrightarrow{OG'} = \mu \overrightarrow{OH} + t_n \overrightarrow{OA_n} = \sum_{i=1}^{n-1} t_i \overrightarrow{OA_i} + t_n \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OG}$$

d'où $G' = G$. $\square$

***Exemple 3.2.4* (Centre de gravité d'un triangle).** — Dans le plan affine $\mathscr{P}$, soient A, B, C trois points non alignés, soit G le centre de gravité des points A, B, C, et soit $O \in \mathscr{P}$ arbitraire. Notons I le milieu du segment $[BC]$, alors la droite (AI) s'appelle la **médiane** du triangle **issue de** A. Appliquons la proposition précédente à $A_1 = B$, $A_2 = C$, $A_3 = A$, alors on a $\mu = 2/3$ et $t_i/\mu = 1/2$ pour $i = 1, 2$, donc $H = I$ et l'on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}.$$

Prenant $O = G$, on obtient $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$: ceci montre que G est situé sur le segment $[AI]$, aux deux-tiers du segment en partant du sommet A. On a le même résultat si l'on introduit les milieux J et K de $[BC]$ et $[CA]$, donc on obtient le résultat suivant : « *les médianes d'un triangle se coupent aux deux-tiers de leur longueur (en partant des sommets), et le point d'intersection est le centre de gravité du triangle* ».

***Théorème 3.2.5* (Applications affines et barycentres).** — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine. Alors f* **préserve les barycentres** *: si $G \in \mathscr{E}$ est le barycentre des points (A_i, t_i) alors $f(G) \in \mathscr{E}'$ est le barycentre des points $(f(A_i), t_i)$.*

Démonstration. — Fixons $O \in \mathscr{E}$ et pour tout $P \in \mathscr{E}$ notons $P' = f(P)$. Par définition, on a $\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{OA_i}$ d'où, puisque $\overrightarrow{f}$ est linéaire :

$$\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{f}(\sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n t_i\overrightarrow{O'A_i'}.$$

Ceci montre que G' est le barycentre des points (A_i', t_i). □

***Définition et proposition 3.2.6* (Sous-espaces affines).** — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $\mathscr{F}$ un sous-ensemble* **non-vide**. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tous $M_0, M_1, \dots, M_p \in \mathscr{F}$ et tous $t_0, t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 + \cdots + t_p = 1$, le barycentre $G = t_0M_0 + \cdots + t_pM_p$ appartient à $\mathscr{F}$.*

(2) *Pour tous $M_0, M_1, \dots, M_p \in \mathscr{F}$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, le point $M_0 + \lambda_1\overrightarrow{M_0M_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{M_0M_p}$ appartient à $\mathscr{F}$.*

(3) *Il <u>existe</u> $M_0 \in \mathscr{F}$ tel que $F = \{\overrightarrow{M_0M} \mid M \in \mathscr{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.*

(4) *Pour <u>tout</u> $M_0 \in \mathscr{F}$, $F = \{\overrightarrow{M_0M} \mid M \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, indépendant du choix de $M_0 \in \mathscr{F}$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que $\mathscr{F}$ est un **sous-espace affine** *(en abrégé :* **sea***),* **de direction** *F, et l'on pose* $\dim\mathscr{F} = \dim F$.

Démonstration. — Montrons que (1) $\Leftrightarrow$ (2) : en prenant M_0 comme origine, G est défini par l'égalité

$$\overrightarrow{M_0G} = \sum_{i=1}^p t_i\overrightarrow{M_0M_i} \qquad \text{i.e.} \qquad G = M_0 + \sum_{i=1}^p t_i\overrightarrow{M_0M_i}$$

et l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) en découle (si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont donnés, on prend $t_i = \lambda_i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i$).

Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons (3) vérifié pour un point M_0 fixé et soit $M_0' \in \mathscr{F}$, notons provisoirement

$$F' = \{\overrightarrow{M_0'M} \mid M \in \mathscr{F}\}.$$

Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{M_0M_0'}$. Comme $M_0' \in \mathscr{F}$, on a $\overrightarrow{u} \in F$, et comme F est un sous-espace vectoriel de E, l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ est une bijection de F sur lui-même (d'inverse $\overrightarrow{w} \mapsto \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$). D'après la relation de Chasles, pour tout $M \in \mathscr{F}$ on a

$$\overrightarrow{M_0'M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M_0'} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{u}$$

et donc

$$F' = \{\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \in F\} = F.$$

Ceci prouve que (3) $\Rightarrow$ (4). Enfin, il est clair que (4) $\Rightarrow$ (2). La proposition est démontrée. □

Remarque 3.2.7. — Soient $(\mathscr{F}, F)$ comme dans la proposition précédente, alors $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F, ce qui justifie la terminologie « sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F ». En effet, l'application

$$\mathscr{F} \times \mathscr{F} \to F, \qquad (M_0, M) \mapsto \overrightarrow{M_0M}$$

est la restriction à $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ de l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, donc vérifie la relation de Chasles. D'autre part, d'après le point (4) de la proposition, pour tout $M_0 \in \mathscr{F}$, l'application $\mathscr{F} \to F$, $M \mapsto \overrightarrow{M_0M}$ est bijective. Ceci prouve que $\mathscr{F}$ est bien un espace affine de direction F (cf. définition 3.1.3).

Définition 3.2.8 **(Sea de direction F passant par un point A).** — Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et F un sev de E. Pour tout $A \in \mathscr{E}$, il existe un unique sea de direction F passant par A, c'est :

$$\mathscr{F} = \{P \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{AP} \in F\} = \{A + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}$$

on le note $A + F$. De plus, pour tout point $B \in \mathscr{F}$, on a aussi $\mathscr{F} = B + F$.

Exemples 3.2.9. — (1) Pour tout $P \in \mathscr{E}$, le singleton $\{P\}$ est un sea de $\mathscr{E}$ de dimension 0, et réciproquement.

(2) Soit $\mathscr{D}$ un sea de $\mathscr{E}$ de dimension 1, et soit $D = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ sa direction (une droite vectorielle dans E). Pour tout A fixé dans $\mathscr{D}$, on a :

$$\mathscr{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{A + t\overrightarrow{u} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)A + tB \mid t \in \mathbb{R}\}$$

où l'on a posé $B = A + \overrightarrow{u}$. Réciproquement, pour tout $A \neq B$ dans $\mathscr{E}$, l'ensemble des barycentres :

$$\{(1-t)A + tB \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est un sea de $\mathscr{E}$ de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{AB}$, qu'on appelle la « **droite affine** » (AB).

Proposition 3.2.10 **(Sous-espaces affines définis par des équations)**

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. On fixe $O \in \mathscr{E}$. Soient $f_1, \dots, f_p \in E^*$ des formes linéaires sur E et $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathscr{F} = \{P \in \mathscr{E} \mid f_i(\overrightarrow{OP}) = c_i, \quad \forall i = 1, \dots, p\}.$$

Alors, si $\mathscr{F} \neq \varnothing$, c'est un sea de $\mathscr{E}$, de direction l'espace vectoriel

$$F = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f_i(\overrightarrow{u}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p\} = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i).$$

Démonstration. — Supposons $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et soit $M_0 \in \mathscr{F}$. Alors un point arbitraire $M \in \mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{F}$ si et seulement si on a :

$$\forall i = 1, \dots, p, \qquad f_i(\overrightarrow{OM}) = c_i = f_i(\overrightarrow{OM_0})$$

ce qui équivaut à :

$$\forall i = 1, \dots, p, \qquad f_i(\overrightarrow{M_0M}) = f_i(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = 0$$

et encore à : $\overrightarrow{M_0M} \in F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)$. D'après la proposition 3.2.6, ceci montre que $\mathscr{F}$, s'il est non-vide, est un sea de direction F. □

Exemples 3.2.11. — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n. Fixons un repère $(O, e_1, \dots, e_n)$ de $\mathscr{E}$, d'où des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Alors toute forme linéaire sur E est de la forme $x \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ et donc se donner des équations $f_i(\overrightarrow{OM}) = c_i$ pour $i = 1, \dots, p$ équivaut à se donner un système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n &= c_p \end{cases}$$

et la proposition précédente signifie la chose suivante : **si l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de ce système est non-vide, alors c'est un sea de $\mathscr{E}$ de direction l'espace vectoriel F formé des solutions du système homogène :**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n &= 0. \end{cases}$$

Illustrons ceci par les deux exemples suivants :

(1) $\mathscr{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 + 2x_2 = 2\} \neq \varnothing$ (il contient, par exemple, le point $(0, 1, 0)$), c'est un sea de $\mathbb{R}^3$ de direction la droite vectorielle

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 = x_1 + 2x_2\}.$$

(2) Par contre,

$$\mathscr{F} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 + 2x_2 = 3\}$$

est vide !

De plus, dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, tout sous-espace affine $\mathscr{F}$ de dimension r peut être défini par exactement $n-r$ équations :

Proposition 3.2.12. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{F}$ un sea de direction F, $\dim F = r$. Soit $O \in \mathscr{E}$ arbitraire et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$. Alors il existe $c_{r+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathscr{F} = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{E} \mid x_i = c_i, \quad \forall i = r+1, \dots, n\}.$$

Démonstration. — Soit $M_0 \in \mathscr{F}$, posons $c_i = x_i(M_0)$ pour $i = r+1, \dots, n$. Pour tout $M \in \mathscr{F}$, on a

$$\overrightarrow{M_0M} \in F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

donc $\overrightarrow{M_0M}$ a toutes ses coordonnées d'indice $i > r$ nulles, et donc $M = M_0 + \overrightarrow{M_0M}$ vérifie $x_i(M) = x_i(M_0) = c_i$ pour $i > r$.

Réciproquement, si $M \in \mathscr{E}$ vérifie $x_i(M) = x_i(M_0) = c_i$ pour $i > r$, alors le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ a toutes ses coordonnées d'indice $i > r$ nulles, donc appartient à F, et donc $M = M_0 + \overrightarrow{M_0M}$ appartient à $\mathscr{F}$. Ceci prouve la proposition. □

Définition et proposition 3.2.13 **(Sous-espace affine engendré par une partie non-vide)**
Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, X une partie non vide de $\mathscr{E}$. Alors l'ensemble $\mathscr{F}$ de tous les barycentres

$$G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p, \qquad \text{où} \quad A_0, \dots, A_p \in X, \quad t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, et c'est le **plus petit sea de $\mathscr{E}$ contenant** *X. On l'appelle le sea* **engendré par** *X et on le note $\operatorname{Aff}\langle X\rangle$. De plus, pour tout choix d'un point $A_0 \in X$, on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname{Aff}\langle X\rangle &= \{A_0 + \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{A_0A_p} \mid A_1, \dots, A_p \in X,\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}\\ &= A_0 + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}\end{aligned}$$

Démonstration. — On définit $\mathscr{F}$ par :

$$\mathscr{F} = \{G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p \mid A_0, \dots, A_p \in X, \quad t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1\},$$

cette définition ne dépend d'aucun choix et tous les points de X y jouent le même rôle. On pourrait montrer directement, avec cette définition, que $\mathscr{F}$ vérifie la propriété (1) de la proposition 3.2.6, mais il est plus commode de procéder comme suit. Fixons un point $A_0 \in X$, alors, comme dans la démonstration de (1) $\Leftrightarrow$ (2) dans 3.2.6, on voit que

$$\begin{aligned}\operatorname{Aff}\langle X\rangle &= \{A_0 + \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{A_0A_p} \mid A_1, \dots, A_p \in X,\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}\\ &= A_0 + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathscr{F}$ est un sea de direction $F = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_0B} \mid B \in X\}$ (qui ne dépend pas du choix de A_0, cf. 3.2.6). De plus, $\mathscr{F}$ contient X, et si $\mathscr{F}'$ est un sea contenant X, alors sa direction F' contient tous les vecteurs $\overrightarrow{A_0B}$, pour $B \in \mathscr{F}$, donc F' contient F, et $\mathscr{F}' = A_0 + F'$ contient $\mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est le **plus petit** sea de $\mathscr{E}$ contenant X, ce qui justifie la notation $\operatorname{Aff}\langle X\rangle$. □

Corollaire 3.2.14 **(Sea engendré par des points $A_0, \dots, A_p$)**. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, le sous-espace affine engendré par des points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ est*

$$\begin{aligned}\operatorname{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle &= \{G = t_0A_0 + \cdots + t_pA_p \mid t_0, \dots, t_p \in \mathbb{R}, \quad t_0 + \cdots + t_p = 1\}\\ &= A_0 + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}\end{aligned}$$

sa dimension est celle de l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$; en particulier, $\dim \operatorname{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle = p \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sont linéairement indépendants.

Remarque 3.2.15. — Dans le corollaire précédent, on a choisi le point A_0 comme « origine », mais bien sûr le même résultat est valable pour tout point A_i, i.e. on a aussi $F = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_iA_j} \mid j \neq i\}$ et $\operatorname{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle = A_i + F$.

Définition 3.2.16 **(Points affinement indépendants ou liés)**. — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(p+1)$ points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement indépendants** si le sea de $\mathscr{E}$ qu'ils engendrent (i.e. le plus petit sea de $\mathscr{E}$ qui les contient) est de dimension p, c.-à-d., si les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sont linéairement indépendants (ceci équivaut à dire que, pour i fixé, les p vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$, pour $j \neq i$, sont linéairement indépendants). Dans le cas contraire, on dit que $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **affinement liés**.

Si $p = 2$, les trois points A_0, A_1, A_2 sont affinement liés $\Longleftrightarrow$ ils sont alignés. Donc A_0, A_1, A_2 sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non alignés**.

On dit que des points $A_0, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ sont **coplanaires** s'ils sont contenus dans un sea $\mathscr{P}$ de dimension 2 (un plan affine), i.e. si $\dim \operatorname{Aff}\langle A_0, \dots, A_p\rangle \leq 2$. Donc quatre points $A_0, \dots, A_3$ sont affinement indépendants $\Longleftrightarrow$ ils sont **non coplanaires**.

***Définition 3.2.17* (Retour sur les repères).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension n. Se donner un repère $\mathscr{R} = (A_0, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$ (où $\mathscr{B}$ est une base de E) équivaut à se donner un $(n+1)$-uplet de points $A_0, A_1, \dots, A_n$ **affinement indépendants** : dans ce cas les n vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ sont linéairement indépendants donc forment une base $\mathscr{B}$ de E, et la donnée de $(A_0, \mathscr{B})$ équivaut bien sûr à celle du $(n+1)$-uplet $(A_0, A_1, \dots, A_n)$. On dira aussi qu'un tel $(n+1)$-uplet de points affinement indépendants forme un repère de $\mathscr{E}$.

Attention, cette fois l'ordre des points est important : A_0 est l'origine et la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est ordonnée, i.e. les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans ce repère correspondent au point

$$A_0 + x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_0A_n} = \big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\big)A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n.$$

***Définitions 3.2.18* (Sea parallèles).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ deux sea, de directions respectives F_1 et F_2.

(1) On dit que $\mathscr{F}_1$ est *faiblement parallèle* à $\mathscr{F}_2$ si l'on a $F_1 \subseteq F_2$. Dans ce cas, si $A_0 \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$, alors $\mathscr{F}_1 = A_0 + F_1 \subseteq A_0 + F_2 = \mathscr{F}_2$, donc on a l'alternative suivante : ou bien

$$\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \qquad \text{ou bien} \qquad \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing.$$

(2) On dit que $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont **parallèles** si l'on a $F_1 = F_2$. Dans ce cas, on a l'alternative suivante : ou bien $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ ou bien $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing$.

Remarque 3.2.18.1. — Attention, deux sea $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ qui vérifient $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 = \varnothing$ ne sont **pas nécessairement** parallèles ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ les droites affines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $x = y = 0$ et $x - 1 = 0 = z$ vérifient $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$ mais ne sont pas parallèles : la direction D_1 de $\mathscr{D}_1$ (resp. D_2 de $\mathscr{D}_2$) est la droite vectorielle d'équation $x = 0 = y$ (resp. $x = 0 = z$) et l'on a $D_1 \neq D_2$.

***Proposition 3.2.19* (Sea engendré par deux sea $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines, $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$.*

(1) *Le sous-espace vectoriel $V = F + F' + \mathbb{R}\overrightarrow{PP'}$ est indépendant du choix de $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$.*
(2) *On a $V = F + F' \Longleftrightarrow \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing$.*
(3) *Le sous-espace affine engendré par $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ est $P + V = P' + V$, on le notera $\mathscr{F} + \mathscr{F}'$.* (1)
(4) *Par conséquent, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont de dimension finie (par exemple, si $\mathscr{E}$ l'est), on a :*

$$\dim(\mathscr{F} + \mathscr{F}') = \begin{cases} \dim(F + F') & \text{si } \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing, \\ \dim(F + F') + 1 & \text{si } \mathscr{F} \cap \mathscr{F}' = \varnothing. \end{cases}$$

Démonstration. — (1) Si $Q \in \mathscr{F}$ et $Q' \in \mathscr{F}'$, alors $\overrightarrow{QQ'} = \overbrace{\overrightarrow{QP}}^{\in F} + \overrightarrow{PP'} + \overbrace{\overrightarrow{P'Q'}}^{\in F'}$ et donc $F + F' + \overrightarrow{QQ'} = F + F' + \overrightarrow{PP'}$.

Prouvons (2). L'implication $\Leftarrow$ est évidente, car si $Q \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$, on peut prendre $P = Q = P'$, d'où $V = F + F'$. Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{u}' \in F'$. Alors le point $Q = P + \overrightarrow{u}$ appartient à $\mathscr{F}$, et l'on a aussi

$$\overrightarrow{P'Q} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') = -\overrightarrow{u}' \in F'$$

donc $Q \in \mathscr{F}' \cap \mathscr{F}$. Ceci prouve (2).

Prouvons (3). Par définition, $\operatorname{Aff}\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{F}'\rangle = P + W$, où W est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'N}$, où M (resp. N) parcourt $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$). Donc W est le sev engendré par F, F' et $\overrightarrow{PP'}$, i.e. $W = V$. Ceci prouve (3). Enfin, (4) découle de (2), car $\dim V \leq \dim(F + F') + 1$, avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{PP'} \notin F + F'$. $\square$

(1) Attention, cette notation n'est peut-être pas standard, peut-être les puristes s'en tiennent-ils à la notation $\operatorname{Aff}\langle \mathscr{F} \cup \mathscr{F}'\rangle$...

Remarque 3.2.20. — Dans la proposition précédente, si $\dim \mathscr{F} = p$, $\dim \mathscr{F}' = r$ et si $(P, A_1, \dots, A_p)$ et $(P', B_1, \dots, B_r)$ sont des repères de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$, alors $\mathscr{F} + \mathscr{F}' = \mathrm{Aff}\langle P, A_1, \dots, A_p, P', B_1, \dots, B_r\rangle$.

Proposition 3.2.21 **(Intersection de deux sea $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines. Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide, c'est un sea de direction $F \cap F'$.*

Démonstration. — Supposons que $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$. Alors un point arbitraire $P \in \mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ si et seulement si $\overrightarrow{AP}$ appartient à F et à F', i.e. à $F \cap F'$. D'après la proposition 3.2.6, ceci montre que $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un sea de direction $F \cap F'$. □

Proposition 3.2.22 **(Applications affines et sous-espaces).** — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application affine, notons ϕ sa partie linéaire.*

(1) *Soit $(\mathscr{F}, F)$ un sea de $\mathscr{E}$, alors $f(\mathscr{F})$ est un sea de $\mathscr{E}'$; plus précisément, si $P \in \mathscr{F}$ alors $f(\mathscr{F}) = f(P) + \phi(F)$.*

(2) *Soit $(\mathscr{F}', F')$ un sea de $\mathscr{E}'$. On a $f^{-1}(\mathscr{F}') = \varnothing$ si $f(\mathscr{E}) \cap \mathscr{F}' = \varnothing$, sinon $f^{-1}(\mathscr{F}')$ est un sea de $\mathscr{E}$ de direction $\phi^{-1}(F')$; plus précisément, si $P \in \mathscr{F}$ est tel que $f(P) \in \mathscr{F}'$ alors*

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathscr{F}') &= \{Q = P + \overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \mid f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{u}) \in \mathscr{F}'\} \\ &= \{Q = P + \overrightarrow{u} \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{u}) \in F'\} = P + \phi^{-1}(F'). \end{aligned}$$

Démonstration. — Laissée au lecteur comme exercice. □

3.3. Projections, symétries, points fixes

Proposition 3.3.1. — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et soient $(\mathscr{F}, F)$, $(\mathscr{F}', F')$ deux sous-espaces affines tels que $F + F' = E$. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide et est un sous-espace affine de direction $F \cap F'$.*

Démonstration. — Ceci résulte des propositions 3.2.19 et 3.2.21. En effet, soient $P \in \mathscr{F}$ et $P' \in \mathscr{F}'$. Comme $F + F' = E$, on a nécessairement $\overrightarrow{PP'} \in F + F'$ donc, d'après la proposition 3.2.19, on a $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}' \neq \varnothing$. Donc, d'après la proposition 3.2.21, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un sea de direction $F \cap F'$. □

Corollaire 3.3.2 **(Sous-espaces supplémentaires).** — *Si $E = F \oplus F'$, i.e. si F et F' sont supplémentaires, alors pour tous sea $\mathscr{F}$ de direction F et $\mathscr{F}'$ de direction F', l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un singleton $\{P\}$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est non vide et est un sea de direction $F \cap F' = \{0\}$, donc c'est un singleton $\{P\}$. □

Définition 3.3.3. — Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $(\mathscr{F}, F)$ et $(\mathscr{F}', F')$ deux sea tels que $E = F \oplus F'$. D'après le corollaire précédent, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ est un singleton $\{O\}$ et, comme $E = F \oplus F'$, on a :

$$\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists!(P, P') \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}.$$

On définit alors :

(1) la **projection** $\pi = \pi_{\mathscr{F}, \mathscr{F}'}$ **sur** $\mathscr{F}$ **parallèlement à** $\mathscr{F}'$ par $\pi(M) = P$,

(2) la **symétrie** $s = s_{\mathscr{F}, \mathscr{F}'}$ **par rapport à** $\mathscr{F}$ **parallèlement à** $\mathscr{F}'$ par $s(M) = M + 2\overrightarrow{MP} = M - 2\overrightarrow{OP'}$, i.e. $\overrightarrow{Ms(M)} = 2\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{OP'}$.

(Faire un dessin dans le plan affine $\mathscr{P}$, pour deux droites sécantes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$, non nécessairement orthogonales, par exemple $\mathscr{F}$ d'équation $y = 1$ et $\mathscr{F}'$ d'équation $y - x = 1$.)

Si de plus $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{E} - 1$ (de sorte que $\dim \mathscr{F}' = 1$, i.e. $\mathscr{F}'$ est une droite affine), on dit que $\mathscr{F}$ est un **hyperplan** affine de $\mathscr{E}$ et que $s_{\mathscr{F}, \mathscr{F}'}$ est la **réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathscr{F}$ parallèlement à la droite $\mathscr{F}'$**.

Définition 3.3.4 **(Points fixes).** — Si X est un ensemble et f une application $X \to X$, on dit que $x \in X$ est un **point fixe** de f si $f(x) = x$. On notera $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f ; il peut être vide.

Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation affine. Si f possède un point fixe O, on a vu que, via la bijection $\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} E$, $P \mapsto \overrightarrow{OP}$, f s'identifie à sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ (cf. point (2) du théorème 3.1.15). Donc, lorsque f possède un point fixe, l'étude de la transformation f se ramène à l'étude de l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de E, et l'on peut appliquer les résultats connus sur les endomorphismes. Ceci explique l'intérêt d'étudier l'ensemble des points fixes de f. On a la proposition suivante.

Proposition 3.3.5 **(Points fixes de f).** — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension finie, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine, et $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire.*

(1) *Si* $\mathrm{Fix}(f)$ *est non vide, c'est un sea de direction* $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$.

(2) *Si* $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = \{0\}$*, alors f a un point fixe unique I.*

Démonstration. — (1) Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, soit $I \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors, pour un point arbitraire $P \in \mathscr{E}$ on a :

$$P \in \mathrm{Fix}(f) \iff f(P) = P \iff \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{If(P)} = \overrightarrow{f(I)f(P)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IP}) \iff \overrightarrow{IP} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}).$$

Ceci montre qu'alors $\mathrm{Fix}(f)$ est un sea de direction $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$.

(2) Supposons $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = \{0\}$ et fixons une origine $O \in \mathscr{E}$ arbitraire. Pour tout point $P \in \mathscr{E}$, on a

$$\overrightarrow{Of(P)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP})$$

et donc on a :

$$P = f(P) \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Of(P)} \iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{Of(O)}.$$

Or, d'après hypothèse, $\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E$ est injective, donc **bijective** puisque E est de dimension finie. Donc il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{Of(O)}$, et il existe donc un unique point $I \in \mathscr{E}$ tel que $(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OI}) = -\overrightarrow{Of(O)}$, i.e. I est l'unique point fixe de f. La proposition est démontrée. $\square$

3.4. Espaces affines euclidiens

Définition 3.4.1. — On dit qu'un espace affine $(\mathscr{E}, E)$ est **euclidien** si E est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$. Dans ce cas, $\mathscr{E}$ est muni de la **distance euclidienne**, définie par $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{(\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy})}$.

C'est bien une distance, car : (a) $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (b) $d(y, x) = d(x, y)$ puisque $\|\overrightarrow{yx}\| = \| - \overrightarrow{xy}\| = | - 1| \cdot \|\overrightarrow{xy}\| = \|\overrightarrow{xy}\|$, et (c) d vérifie l'inégalité triangulaire :

$$d(x, y) + d(y, z) = \|\overrightarrow{xy}\| + \|\overrightarrow{yz}\| \geq \|\overrightarrow{xz}\| = d(x, z).$$

Définition 3.4.2 **(Isométries).** — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Une **isométrie** de $\mathscr{E}$ est une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui conserve les distances, i.e. telle que :

$$\forall x, y \in \mathscr{E}, \qquad \boxed{d(f(x), f(y)) = d(x, y).}$$

On notera $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$.

On va voir qu'alors f est nécessairement affine et bijective. Commençons par quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.4.3. — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie.*

(1) *f est injective.*
(2) *Si f est bijective, f^{-1} est une isométrie.*
(3) *Si $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une seconde isométrie, $g \circ f$ est aussi une isométrie.*

Démonstration. — (1) Si $f(x) = f(y)$ alors $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ donc $x = y$. Ceci prouve que f est injective.

(2) Soient $x, y \in \mathscr{E}$, posons $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y)$. Alors $x = f(x')$ et $y = f(y')$, d'où

$$d(x, y) = d(f(x'), f(y')) = d(x', y') = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

(la seconde égalité car f est une isométrie). Ceci montre que f^{-1} est une isométrie.

(3) Pour tout $x, y \in \mathscr{E}$, on a $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(g(f(x)), g(f(y)))$, donc $g \circ f$ est une isométrie. $\square$

Proposition 3.4.4 **(Isométries affines).** — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation* **affine**.

(1) *f est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle (i.e. $\overrightarrow{f}$ préserve la norme).*

(2) *Dans ce cas, $\overrightarrow{f}$ et f sont* **bijectives**.

(3) *En particulier, toute translation $f = t_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie affine de $\mathscr{E}$.*

Démonstration. — (1) Pour tout $x, y \in \mathscr{E}$, on a $d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})\|$ et ceci égale $d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ si et seulement si $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\|$. Donc f est une isométrie si $\overrightarrow{f}$ en est une. Réciproquement, si f est une isométrie, alors $\overrightarrow{f}$ préserve la norme, car l'application $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$, $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ est surjective (puisque pour x fixé, $y \mapsto \overrightarrow{xy}$ est une bijection). Ceci prouve (1).

De plus, dans ce cas $\overrightarrow{f}$ est **bijective** (car injective et E de dimension finie), donc f l'est aussi, d'après le point (3) de 3.1.15. Enfin, toute translation $f = t_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie de $\mathscr{E}$, puisque sa partie linéaire égale id_E. La proposition est démontrée. □

Théorème 3.4.5. — *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une isométrie. Alors f est* **affine** *et bijective.*

Avant de démontrer le théorème, énonçons tout de suite un corollaire. On note $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E. Rappelons que pour tout $\phi \in \mathrm{O}(E)$, on a $\mathrm{dét}(\phi) = \pm 1$, et que l'on pose $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E) = \{\phi \in \mathrm{O}(E) \mid \mathrm{dét}(\phi) = 1\}$ et $\mathrm{O}^-(E) = \{\phi \in \mathrm{O}(E) \mid \mathrm{dét}(\phi) = -1\}$; de plus $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ (appelé le groupe « spécial orthogonal » de E).

***Corollaire 3.4.6* (Les groupes $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. On a*

$$(*) \qquad \mathrm{Is}(\mathscr{E}) = \{f \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid \overrightarrow{f} \in \mathrm{O}(E)\}$$

et c'est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$. De plus, $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ est la réunion de $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ (isométries **directes***) et de $\mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$ (isométries* **indirectes***), où $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ (resp. $\mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$) désigne l'ensemble des $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{E})$ tels que $\overrightarrow{f} \in O^+(E)$ (resp. $\overrightarrow{f} \in O^-(E)$). Enfin, $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$.*

Terminologie 3.4.7. — Les isométries directes sont aussi appelées « **déplacements** », et les indirectes « **antidéplacements** ».

Démonstration du corollaire. — D'après le théorème, toute isométrie de $\mathscr{E}$ est affine et bijective, donc appartient à $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$, et d'après la proposition 3.4.4, un élément f de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ appartient à $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(E)$. Ceci prouve l'égalité $(*)$.

Le fait que $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ soit un groupe découle du lemme 3.4.3. Enfin, la décomposition $\mathrm{Is}(\mathscr{E}) = \mathrm{Is}^+(\mathscr{E}) \cup \mathrm{Is}^-(\mathscr{E})$ et le fait que $\mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$ soit un groupe, découlent des propriétés analogues de $\mathrm{O}(E)$. □

Démonstration du théorème. — Il suffit de montrer que f est **affine**, elle sera alors **bijective** d'après la proposition 3.4.4. Fixons une origine arbitraire $O \in \mathscr{E}$ et posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f(O)O}$. Alors $\phi = t_{\overrightarrow{w}} \circ f$ est une isométrie, vérifiant $\phi(O) = O$. Il suffit de montrer que ϕ est affine, car alors $f = t_{-\overrightarrow{w}} \circ \phi$ le sera aussi. Comme $\phi(O) = O$, pour montrer que ϕ est affine, il suffit de montrer que l'application $\psi : E \to E$ définie par

$$\forall P \in \mathscr{E}, \qquad \psi(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O\phi(P)} \qquad \text{i.e.} \qquad \forall \overrightarrow{u} \in E, \qquad O + \psi(\overrightarrow{u}) = \phi(O + \overrightarrow{u})$$

est **linéaire**.

Soit $\overrightarrow{u} \in E$, posons $P = O + \overrightarrow{u}$ et $P' = \phi(P)$, alors $\psi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{OP'}$ et donc :

$$\|\psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{OP'}\| = d(O, P') \underbrace{=}_{(*)} d(O, P) = \|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{u}\|$$

(l'égalité $(*)$ car ϕ est une isométrie). Ceci prouve déjà que ψ préserve la norme, montrons de plus que ψ préserve le produit scalaire. Considérons un second vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ et posons $Q = O + \overrightarrow{v}$ et $Q' = \phi(Q)$. Alors l'on a :

$$\begin{aligned} \text{d'une part,} \qquad & \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \\ \text{d'autre part,} \qquad & \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \psi(\overrightarrow{v}) - \psi(\overrightarrow{u}) \end{aligned}$$

et

$$\|\psi(\overrightarrow{v}) - \psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{P'Q'}\| = d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|.$$

Élevant cette égalité au carré, on obtient :

$$\|\psi(\overrightarrow{v})\|^2 + \|\psi(\overrightarrow{u})\|^2 - 2(\psi(\overrightarrow{v}) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u})$$

et comme $\|\psi(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|$ et $\|\psi(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$, ceci donne :

$$(\psi(\overrightarrow{v}) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = (\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u})$$

donc ψ préserve le produit scalaire.

On peut maintenant montrer que ψ est linéaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors $\psi(\mathscr{B}) = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal n, donc c'est une base orthonormée de E. Soit $\overrightarrow{u} \in E$ arbitraire, on peut écrire de façon unique

$$\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad \psi(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \psi(e_j)$$

mais alors, pour tout i on a $y_i = (\psi(e_i) \mid \psi(\overrightarrow{u})) = (e_i \mid \overrightarrow{u}) = x_i$ et donc :

$$\forall \overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \qquad \psi(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \psi(e_j).$$

Ceci montre que ψ est linéaire. Ceci achève la preuve du théorème 3.4.5. $\square$

On sait donc maintenant que toute isométrie de $\mathscr{E}$ euclidien est nécessairement affine. Dans la suite, on écrira souvent : « Soit f une isométrie affine » (au lieu de simplement « isométrie ») pour insister sur le fait que f est affine (et, si l'on n'a pas vu le théorème 3.4.5, on prend comme hypothèse que f est une isométrie affine...). On veut maintenant établir que toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi$, où ϕ est une isométrie (affine) ayant un point fixe, et ϕ et $t_{\overrightarrow{u}}$ commutent : $\phi \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ \phi$. Commençons par le :

Lemme 3.4.8. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une transformation affine, et $\overrightarrow{u} \in E$. Alors $f \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ (i.e. $\overrightarrow{u}$ est un point fixe de $\overrightarrow{f}$).*

Démonstration. — Pour tout point $O \in \mathscr{E}$, on a :

$$(f \circ t_{\overrightarrow{u}})(O) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \qquad (t_{\overrightarrow{u}} \circ f)(O) = f(O) + \overrightarrow{u}$$

et ces deux expressions coïncident si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. $\square$

Théorème 3.4.9 **(Décomposition canonique d'une isométrie affine)**
Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien, f une isométrie affine de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{f}$ sa partie linéaire, $F = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$. Alors :

(1) *Il existe un unique sea $\mathscr{F}$ de direction F stable par f. La restriction $f_{|\mathscr{F}}$ de f à $\mathscr{F}$ est une translation $t_{\overrightarrow{u}}$, pour un certain $\overrightarrow{u} \in F$.*

(2) *$g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ vérifie $\mathrm{Fix}(g) = \mathscr{F}$, et l'on a $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.*

(3) *L'écriture précédente est unique : si $f = t_{\overrightarrow{u'}} \circ g'$, avec $\overrightarrow{u'} \in F$ et g' ayant un point fixe, alors $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u}$ et $g' = g$.*

Par conséquent : **toute isométrie affine f s'écrit de façon unique comme produit d'une isométrie ayant un point fixe et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f})$.**

Démonstration. — Posons $G = F^{\perp}$, il est stable par $\overrightarrow{f}$. En effet, soit $x \in G$, pour tout $y \in F$, on a $y = \overrightarrow{f}(y)$ et donc :

$$(\overrightarrow{f}(x) \mid y) = (\overrightarrow{f}(x) \mid \overrightarrow{f}(y)) = (x \mid y) = 0$$

ce qui prouve que $\overrightarrow{f}(x) \in G$. Choisissons un sea $\mathscr{G}$ de direction G, et un point $O \in \mathscr{G}$. Comme $E = F \oplus G$, on peut écrire de façon unique

$$\overrightarrow{Of(O)} = u + v, \qquad \text{avec} \quad u \in F,\ v \in G.$$

Posons $g = t_{-u} \circ f$. Alors $g(O) = O + v \in \mathscr{G}$, et comme $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ envoie G dans G, alors pour tout $P \in \mathscr{G}$ on a :

$$\overrightarrow{g}(\overrightarrow{OP}) \in G \qquad \text{donc} \qquad g(P) = g(O) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OP}) \in \mathscr{G},$$

d'où $g(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}$. Notons alors h la restriction $g_{|\mathscr{G}}$, sa partie linéaire $\overrightarrow{h}$ est la restriction à G de $\overrightarrow{f}$, d'où

$$\{w \in G \mid \overrightarrow{h}(w) = w\} = G \cap \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) = G \cap F = \{0\}$$

(la dernière égalité puisque $G = F^{\perp}$). Donc $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{h}) = \{0\}$ et donc, d'après la proposition 3.3.5, h admet un unique point fixe I_0, i.e. I_0 est l'unique point fixe de g dans $\mathscr{G}$.

Posons maintenant $\mathscr{F} = I_0 + F$. Alors, $f(I_0) = (t_{\overrightarrow{u}} \circ g)(I_0) = I_0 + \overrightarrow{u}$ et pour tout $P \in \mathscr{F}$, on a $\overrightarrow{I_0 P} \in F = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Fix}(\overrightarrow{g})$ et donc :

$$\forall P \in \mathscr{F}, \qquad g(P) = P \quad \text{et} \quad f(P) = P + \overrightarrow{u}.$$

Donc $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Fix}(g)$. Réciproquement, si $Q \in \mathrm{Fix}(g)$, alors $\overrightarrow{I_0Q} = \overrightarrow{g(I_0)g(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{I_0Q})$, donc $\overrightarrow{I_0Q} \in \mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = F$ et $Q \in \mathscr{F}$. Ceci montre que $\mathrm{Fix}(g) = \mathscr{F}$, et comme $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$, on a obtenu l'existence de $\mathscr{F}, \overrightarrow{u}, g$ vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème.

Démontrons maintenant l'unicité. Soit $\mathscr{F}'$ un sea de $\mathscr{E}$ de direction F, stable par f. Il est alors stable par $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$. D'autre part, on a vu plus haut que $g(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}$; de plus $\mathscr{F}' \cap \mathscr{G}$ est un singleton $\{J\}$, puisque $F \oplus G = E$ (cf. 3.3.2). Donc $g(J) = J$, or I_0 est l'unique point fixe de g dans $\mathscr{G}$, d'où $J = I_0$ et donc $\mathscr{F}' = I_0 + F$ égale $\mathscr{F}$. Ceci prouve l'unicité de $\mathscr{F}$.

Enfin, supposons que $f = t_{\overrightarrow{u}'} \circ g'$, avec $\overrightarrow{u}' \in F$ et g' ayant un point fixe A. Alors $f(A) = (t_{\overrightarrow{u}'} \circ g')(A) = A + \overrightarrow{u}'$ et donc pour tout $\overrightarrow{w} \in F$, on a :

$$f(A + \overrightarrow{w}) = f(A) + \overrightarrow{w} = A + \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{w} = A + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}' \in A + F = \mathscr{F}'.$$

Ceci montre que $\mathscr{F}'$ est stable par f et que la restriction de f à $\mathscr{F}'$ est la translation $t_{\overrightarrow{u}'}$. Or, d'après ce qui précède, on a $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ et donc $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{u}$, puis $g' = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f = g$. Le théorème est démontré. □

***Définition 3.4.10* (Repères orthonormés).** — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. Un repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$ est dit **orthonormé** si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

3.4.11. Classification des isométries affines du plan. — Soit $(\mathscr{P}, E)$ un plan affine euclidien, on oriente E en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. En utilisant le théorème précédent, on va déterminer toutes les isométries affines f de $\mathscr{P}$. On rappelle que si f admet un point fixe O, alors via la bijection $\mathscr{P} \xrightarrow{\sim} E$, $P \mapsto \overrightarrow{OP}$, f s'identifie à sa partie vectorielle $\overrightarrow{f}$, cf. le point (2) du théorème 3.1.15 et la discussion précédant 3.3.5.

Soit d'abord $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{f}$ soit la rotation vectorielle d'angle θ, i.e.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, i.e. si $\theta = 0$, alors f est une **translation** $t_{\overrightarrow{u}}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$. Sinon, si $\theta \in \,]0, 2\pi[$, alors $\mathrm{Fix}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$ donc f admet un point fixe I unique, alors f est la **rotation de centre I et d'angle θ**.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Is}^-(\mathscr{P})$, alors $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle D. Si f possède un point fixe I, soit $\mathscr{D}$ la droite affine $I + D$, alors f est la symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{D}}$ par rapport à $\mathscr{D}$. Si f ne possède pas de point fixe alors, d'après le théorème précédent, il existe une unique droite affine $\mathscr{D}$ de direction D stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{D}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in D$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. Alors $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathscr{D}} = \sigma_{\mathscr{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$, et l'on dit que f est la **symétrie** (orthogonale) **glissée** par rapport à $\mathscr{D}$, de vecteur $\overrightarrow{u}$: pour tout point $M \in \mathscr{P}$, son image $M' = f(M)$ s'obtient en effectuant la symétrie $M \mapsto \sigma_{\mathscr{D}}(M)$, puis en faisant un « glissement » de vecteur $\overrightarrow{u}$ (dans la direction de la droite $\mathscr{D}$), ou bien en faisant d'abord le « glissement » $M \mapsto M + \overrightarrow{u}$, puis en prenant le symétrique $\sigma_{\mathscr{D}}(M + \overrightarrow{u})$.

On peut résumer la classification par le tableau suivant :

Isométries f de $\mathscr{P}$	directes	indirectes
$\mathrm{Fix}(f) = \mathscr{P}$	$\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$	
$\mathrm{Fix}(f) =$ droite $\mathscr{D}$		symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{D}}$
$\mathrm{Fix}(f) =$ point I	rotations de centre I et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	
$\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$	translations	symétries orthogonales glissées

3.4.12. Classification des isométries affines de l'espace. — Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension 3, on oriente E en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. En utilisant le théorème 3.4.9 et la classification des isométries vectorielles de E (cf. 2.4.18), on va déterminer toutes les isométries affines f de $\mathscr{E}$.

1er cas. Soit d'abord $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{E})$. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, alors f est une **translation** $t_{\overrightarrow{u}}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$. Sinon, $\overrightarrow{f}$ est une rotation : $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite vectorielle D, choisissons un vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ de D, alors il existe un unique $\theta \in \,]0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{f}$ soit la **rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle** θ, c.-à-d., pour toute base orthonormée $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ du plan $D^\perp$ telle que la base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})$ soit directe (i.e. telle que $\text{dét}_{\mathscr{B}_0}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w}) > 0$), on a :

$$\text{Mat}_{(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si f a un point fixe I, soit $\mathscr{D}$ la droite affine $I + D$, alors f est la **rotation d'axe $\mathscr{D}$ orienté par $\overrightarrow{w}$ et d'angle θ** (et l'on a $\text{Fix}(f) = \mathscr{D}$).

Si f n'a pas de point fixe alors, d'après le théorème 3.4.9, il existe une unique droite affine $\mathscr{D}$ de direction D stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{D}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in D$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. On peut alors prendre $\overrightarrow{u}$ comme vecteur directeur de D, alors $\overrightarrow{f}$ est la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ', où $\theta' = \theta$ si $\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ précédent sont « de même sens », i.e. si $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{w}$ avec $\lambda > 0$, et $\theta' = -\theta$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont « de sens opposé », i.e. si $\overrightarrow{u} = -\lambda\overrightarrow{w}$ avec $\lambda > 0$. On dit alors que f est le **vissage de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'axe $\mathscr{D}$ orienté par $\overrightarrow{u}$, et d'angle θ'**.

2ème cas. Soit maintenant $f \in \text{Is}^-(\mathscr{E})$, alors $\overrightarrow{f}$ est de l'un des types suivants :

(1) $\overrightarrow{f} = -\,\text{id}_E$,

(2) $\overrightarrow{f}$ est une **rotation gauche**, c.-à-d., $D = \{\overrightarrow{v} \in E \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}\}$ est une droite vectorielle, et la restriction de $\overrightarrow{f}$ au plan $D^\perp$ est une rotation distincte de l'identité.

(3) $\overrightarrow{f}$ est la **symétrie orthogonale** σ_P par rapport à un plan P.

Dans les cas (1) et (2), $\text{Fix}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$ donc f a un point fixe I unique ; dans le cas (1), f est la **symétrie centrale** σ_I de centre I, dans le cas (2), f est une **rotation gauche de centre I et d'axe $\mathscr{D} = I + D$**.

Supposons que $\overrightarrow{f} = \sigma_P$. Si f a un point fixe I, alors $\text{Fix}(f)$ est le plan $\mathscr{P} = I + P$ et f est la **symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{P}}$ par rapport à $\mathscr{P}$**. Enfin, si f n'a pas de point fixe alors, d'après le théorème 3.4.9, il existe un unique plan affine $\mathscr{P}$ de direction P stable par f, et pour tout $I \in \mathscr{P}$ on a $f(I) = I + \overrightarrow{u}$ pour un certain $\overrightarrow{u} \in P$, $\overrightarrow{u} \neq 0$. Alors $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ \sigma_{\mathscr{P}} = \sigma_{\mathscr{P}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$, et l'on dit que f est la **symétrie** (orthogonale) **glissée** par rapport à $\mathscr{P}$, de vecteur $\overrightarrow{u}$.

On peut résumer la classification par le tableau suivant :

Isométries f de $\mathscr{E}$ ($\dim \mathscr{E} = 3$)	directes	indirectes
$\text{Fix}(f) = \mathscr{E}$	$\text{id}_{\mathscr{E}}$	
$\text{Fix}(f) = $ plan $\mathscr{P}$		symétrie orthogonale $\sigma_{\mathscr{P}}$
$\text{Fix}(f) = $ droite $\mathscr{D}$	rotations d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$	
$\text{Fix}(f) = $ point		symétries centrales et rotations gauches d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$
$\text{Fix}(f) = \varnothing$	translations ($\text{Fix}(\overrightarrow{f}) = E$) vissages ($\dim \text{Fix}(\overrightarrow{f}) = 1$)	symétries orthogonales glissées

3.5. Coniques

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Si $M, N \in \mathscr{P}$, on notera MN la longueur du segment $[M, N]$, i.e. la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

***Lemme 3.5.1* (Distance d'un point à une droite).** — *Soient $\mathscr{D}$ une droite affine, $M \in \mathscr{P}$ et H la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}$. Pour tout $P \in \mathscr{D}$, on a $MH \leq MP$, avec égalité si et seulement si $P = H$. Donc MH est la distance minimale de M à un point de $\mathscr{D}$, et l'on pose $MH = d(M, \mathscr{D})$.*

Démonstration. — Soit $P \in \mathscr{P}$, on a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HP}$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$MP^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \|\overrightarrow{MH}\|^2 + \|\overrightarrow{HP}\|^2 = MH^2 + HP^2 \geq MH^2,$$

avec égalité si et seulement si $P = H$. $\square$

***Définition 3.5.2* (Définition des coniques par foyer et directrice)**

Soient $\mathscr{D}$ une droite affine, F un point de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, et e un réel strictement positif. La **conique** $\mathscr{C}$ de **directrice** $\mathscr{D}$, de **foyer** F et d'**excentricité** e est :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \mid FM = e \cdot d(M, \mathscr{D})\}.$$

Notons K la projection orthogonale de F sur $\mathscr{D}$ et $h = KF$. Soit Δ la droite (KF), i.e. la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par F. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, telle que $\overrightarrow{FK} = -h\overrightarrow{i}$, i.e. dans le repère $\mathscr{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, K a pour coordonnées $(-h, 0)$. Enfin, on note σ_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

Soit $M(x, y)$ un point arbitraire de $\mathscr{P}$, de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$; sa projection orthogonale sur $\mathscr{D}$ est le point $H(-h, y)$, donc $d(M, \mathscr{D}) = |x + h|$ et M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2 \qquad \text{i.e.} \qquad y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0.$$

Notons que l'équation ci-dessus est inchangée si l'on change y en $-y$, par conséquent

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \iff M(x, -y) \in \mathscr{C}$$

donc $\sigma_\Delta(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$, i.e. Δ est un **axe de symétrie** de $\mathscr{C}$.

On pose $p = eh > 0$ et on l'appelle le **paramètre** de la conique $\mathscr{C}$. Tous les points M de la droite d'équation $x = 0$ (la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par F) vérifient $d(M, \mathscr{D}) = h$, donc les points d'intersection de cette droite avec $\mathscr{C}$ sont les deux points de coordonnées $(0, p)$ et $(0, -p)$. D'autre part, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ (d'équation $y = 0$) sont les points $(\lambda, 0)$, où λ est solution de l'équation :

$$(\dagger) \qquad (1 - e^2)\lambda^2 - 2ep\lambda - p^2 = 0.$$

3.5.3. Paraboles. — Supposons d'abord $e = 1$. Dans ce cas, on trouve $\lambda = -p/2$ et l'équation de $\mathscr{C}$ est

$$y^2 = 2px + p^2 = 2p\Big(x + \frac{p}{2}\Big)$$

Soit alors O le point de coordonnées $(-p/2, 0)$ dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est le milieu du segment $[KF]$. Les nouvelles coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $X = x + (p/2)$ et $Y = y$, donc l'équation de $\mathscr{C}$ devient :

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \in \mathscr{P} \mid Y^2 = 2pX\}$$

et l'on dit que $\mathscr{C}$ est une **parabole** de paramètre p. Dans $\mathscr{R}_0$, la directrice $\mathscr{D}$ a pour équation $X = -p/2$ et le foyer F a pour coordonnées $(p/2, 0)$.

Supposons maintenant $e \neq 1$. Alors le discriminant réduit du trinôme $(\dagger)$ est $e^2p^2 + (1 - e^2)p^2 = p^2$ donc les solutions sont :

$$\lambda_1 = \frac{ep - p}{1 - e^2} = \frac{-p}{1 + e}, \qquad \lambda_2 = \frac{ep + p}{1 - e^2} = \frac{p}{1 - e} \qquad \text{et l'on a} \qquad \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Notons A_1, A_2 les points correspondants de $\Delta \cap \mathscr{C}$, et O leur milieu. L'abscisse x_O de O dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $x_O = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \dfrac{ep}{1 - e^2}$ et le trinôme s'écrit :

$$(1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{e^2p^2}{1 - e^2} - p^2 = (1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

Notons $X = x - x_O$ et $Y = y$ les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors l'équation de $\mathscr{C}$ devient

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \mid (1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}\}.$$

L'équation est inchangée si l'on change X en $-X$ et l'on voit donc que la droite D_0 d'équation $X = 0$ est un second **axe de symétrie** de $\mathscr{C}$ (et donc le point O est un **centre de symétrie** de $\mathscr{C}$). Par conséquent, $\mathscr{C}$ possède un second couple (foyer, directrice) $(F', \mathscr{D}')$, symétrique de $(F, \mathscr{D})$ par rapport à la droite D_0. On dit alors que la droite Δ, qui contient les foyers, est l'**axe focal**.

D'autre part, les points $A_1, A_2 \in \Delta$ s'appellent les **sommets** de la conique ; dans $\mathscr{R}_0$ ils ont pour abscisse :

$$\pm a, \qquad \text{où} \qquad a = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Posons également $b = \dfrac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$, d'où $b^2 = \dfrac{p^2}{|1 - e^2|} = \varepsilon \dfrac{p^2}{1 - e^2}$, où $\varepsilon =$ signe de $1 - e^2$. Alors l'équation de $\mathscr{C}$ se récrit :

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \varepsilon\frac{Y^2}{b^2} = 1\}.$$

Distinguons maintenant les cas $0 < e < 1$ et $1 < e$.

3.5.4. Ellipses. — Supposons maintenant $0 < e < 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = 1$, l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$(*) \qquad \mathscr{C} = \{M(X,Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et $\mathscr{C}$ est une **ellipse**. Dans le repère $\mathscr{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathscr{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1+e) = -h/(e^{-1}+1)$ donc est compris entre K et F, de plus $AF = e \cdot AK < AK$, donc A est plus près de F que de K. Le centre de symétrie O est d'abscisse $ep/(1-e^2) > 0$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O. Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	K	A	F	O	F'	A'	K'
abscisses dans $\mathscr{R}$	$-h$	$\dfrac{-h}{1+e^{-1}}$	0	$\dfrac{ep}{1-e^2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
abscisses dans $\mathscr{R}_0$	$-h-c$	$-a$	$-c$	0	c	a	$h+c$

où $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ et $c = \dfrac{ep}{1-e^2} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \dfrac{p^2}{1-e^2}$, on a $c^2 = \dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} = a^2 - b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad e = \frac{c}{a}, \qquad h = \frac{b^2}{c}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad KO = h + c = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

(Le lecteur est invité à faire la construction pour $a = 5$, $b = 4$ (et/ou $a = 5$, $b = 3$) et à dessiner approximativement les ellipses correspondantes.)

Dans l'équation $(*)$ de l'ellipse, on peut faire $b = a$, on obtient alors le **cercle** de centre $F = O$ et de rayon a. Remarquons que $b^2 = (1-e^2)a^2$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea$, d'où

$$h = \frac{b^2}{c} = \frac{1-e^2}{e}\, a.$$

Donc, en gardant F et a fixés, on obtient le cercle précédent en faisant tendre e vers 0, et dans ce cas la directrice $\mathscr{D}$, qui est la droite d'équation $x = -\dfrac{1-e^2}{e}\, a$ dans le repère $\mathscr{R}$, « tend vers l'infini ». On verra plus bas que si on prend la définition « bifocale » de l'ellipse, alors le cas du cercle apparaît de façon naturelle, comme le cas où les deux foyers sont égaux.

3.5.5. Hyperboles. — Supposons enfin $e > 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = -1$, l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y) \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et $\mathscr{C}$ est une **hyperbole**. Elle admet pour asymptotes les droites $Y = \dfrac{b}{a}X$ et $Y = -\dfrac{b}{a}X$.

Dans le repère $\mathscr{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathscr{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1+e) = -h/(e^{-1}+1)$ donc est compris entre K et F, de plus $AF = e \cdot AK > AK$, donc ici A est plus près de K que de F.

Le centre de symétrie O est d'abscisse $\dfrac{ep}{1-e^2} = \dfrac{e^2h}{1-e^2} = -h - \dfrac{h}{e^2-1} < -h$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O. Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	F'	A'	K'	O	K	A	F
abscisses dans $\mathscr{R}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\dfrac{ep}{1-e^2}$	$-h$	$\dfrac{-h}{1+e^{-1}}$	0
abscisses dans $\mathscr{R}_0$	$-c$	$-a$	$-(c-h)$	0	$c-h$	a	c

où $a = \dfrac{p}{e^2-1}$ et $c = \dfrac{ep}{e^2-1} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \dfrac{p^2}{e^2-1}$, on a $c^2 = \dfrac{e^2p^2}{(e^2-1)^2} = a^2 + b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad e = \frac{c}{a}, \qquad h = \frac{b^2}{c}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad OK = c - h = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

(Le lecteur est invité à construire ces points, ainsi que les asymptotes, pour $a = 5$, $b = 4$ (et/ou $a = 5$, $b = 3$) et à dessiner approximativement les hyperboles correspondantes.)

***Proposition 3.5.6* (Définition bifocale de l'ellipse).** — *Soient F, F' deux points de $\mathscr{P}$ et O leur milieu. Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{OF'} = c\,\overrightarrow{i}$ avec $c = \dfrac{1}{2}FF' \geq 0$ (et donc $\overrightarrow{OF} = -c\,\overrightarrow{i}$). Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a > c$ et $b^2 = a^2 - c^2$. Alors l'ensemble*

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \in \mathscr{P} \mid FM + F'M = 2a\}$$

est l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si $F \neq F'$, et c'est le cercle de centre F et de rayon a si $F' = F$.

Démonstration. — Comme $2a > 0$, l'égalité $FM + F'M = 2a$ équivaut (en l'élevant au carré) à :

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)} = 4a^2 \tag{0}$$

qui équivaut à :

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = -\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)}.$$

Ceci équivaut à :

$$x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{et} \tag{1}$$

$$(\underbrace{x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2}_{\beta})^2 = ((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2) = (\underbrace{x^2 + c^2 + y^2}_{\alpha})^2 - 4c^2x^2, \tag{2}$$

puis (2) équivaut à :

$$4c^2x^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 2a^2 \cdot 2(x^2 + y^2 + c^2 - a^2)$$

qui équivaut à

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Donc (0) équivaut à :

$$x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{†}$$

Mais $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \geq \dfrac{x^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{y^2}{a^2 + b^2}$, donc si (3) est satisfaite, on a automatiquement $x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$. Par conséquent, (0) et (†) sont équivalents à la seule condition :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ceci prouve la proposition. $\square$

***Proposition 3.5.7* (Définition bifocale de l'hyperbole).** — *Soient (x, y) les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathscr{P}$, soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathscr{C}$ l'hyperbole d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Ses foyers F et F' ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \in \mathscr{P} \mid |FM - F'M| = 2a\}$$

et, plus précisément, la branche de l'hyperbole la plus proche de F (resp. F') est formée des points M tels que $F'M - FM = 2a$ (resp. $= -2a$).

La démonstration est laissée comme exercice pour le lecteur.

Soit maintenant $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère **orthonormé** de $\mathscr{P}$. Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère, et étudions la nature géométrique de l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. En d'autres termes, soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est :

$$S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = axx' + b(xy' + yx') + cyy'$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Soit L la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$L(\overrightarrow{u}) = 2d, \quad L(\overrightarrow{v}) = 2e, \qquad \text{d'où} \qquad L(x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}) = 2dx + 2ey.$$

Enfin, soit $h : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(M) = Q(x,y) + L(x,y) + f$ si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. On s'intéresse donc à l'ensemble

$$\mathscr{C} = \{M(x,y) \mid h(x,y) = 0\}.$$

Par hypothèse, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ i.e. la forme quadratique Q est non nulle, i.e. la matrice S est non nulle. Donc S est de rang 1 ou 2, selon que son déterminant $\delta = ac - b^2$ est nul ou non. On a le :

Théorème 3.5.8. — *Soit $\mathscr{R}_0 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$, soient (x,y) les coordonnées correspondantes, soient $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, et soit*

$$\mathscr{C} = \{M(x,y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathscr{C} \neq \varnothing$. Alors :

(1) *Si $\delta = 0$, $\mathscr{C}$ est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).*

(2) *Si $\delta = ac - b^2 > 0$, $\mathscr{C}$ est une ellipse ou un point.*

(3) *Si $\delta < 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.*

Afin de démontrer ceci, rappelons d'abord les points suivants. Soit E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi)$, et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = A$, i.e. $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$ pour tout j. Alors, pour tout i,j on a :

$$(e_i \mid u(e_j)) = a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = a_{ji} = (u(e_i) \mid e_j)$$

donc, par bilinéarité, on a

$$\forall x,y \in E, \qquad \phi(x,y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)).$$

Par conséquent, si l'on montre qu'il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour $(\ \mid\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, on aura pour tout i,j :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i (f_i \mid f_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donc $\mathscr{B}$ sera aussi une base **orthogonale** pour ϕ. Donc, si l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'un vecteur x arbitraire, la base $\mathscr{B}$ **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \cdots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$; pour cette raison, le théorème ci-dessous (cf. 2.2.9) est appelé « théorème de **réduction simultanée** » ou « de **diagonalisation simultanée** ».

***Théorème 3.5.9* (Réduction simultanée)**. — *Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E, ϕ sa forme polaire, $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\phi) = A$.*

Alors il existe une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** *pour $(\ \mid\ )$ et formée de vecteurs propres de u, i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, et l'on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^tP = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^tPAP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Démontrons maintenant le théorème 3.5.8. D'après le théorème 3.5.9, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que, notant (X,Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, on ait

$$Q(X,Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2, \qquad \text{avec } \lambda\mu = \det S = ac - b^2 = \delta.$$

D'autre part, si l'on pose $2\rho = L(\overrightarrow{f_1})$ et $2\sigma = L(\overrightarrow{f_2})$, alors la forme linéaire L s'exprime, dans les coordonnées (X, Y), par $L(X, Y) = 2\rho X + 2\sigma Y$ (on n'a pas besoin de calculer explicitement les coefficients ρ et σ). Donc, avec les coordonnées (X, Y), on obtient que :

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y) \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + f = 0\}.$$

Distinguons maintenant les cas suivants.

(1) Si $0 = \delta = \lambda\mu$, on peut supposer, quitte à échanger X et Y (i.e. à remplacer $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ par $(\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_1})$) que $\lambda = 0 \neq \mu$ (λ, μ ne sont pas tous deux nuls, puisque la matrice S n'est pas nulle). Dans ce cas, on obtient l'équation

$$\mu\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\rho X - f + \frac{\sigma^2}{\mu}, \qquad \text{soit} \qquad \Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}X - \frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}.$$

Si $\rho = 0$, on obtient $\varnothing$ si $K = -\dfrac{f\mu - \sigma^2}{\mu}$ est < 0, et si $K \geq 0$ on obtient les droites parallèles d'équation

$$Y = -\frac{\sigma}{\mu} \pm \sqrt{K},$$

celles-ci étant confondues (i.e. égales) si $K = 0$. Si $\rho \neq 0$, on obtient l'équation

$$\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}\Big(X + \frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}\Big).$$

Soit alors Ω le point de coordonnées $\Big(-\dfrac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}, -\dfrac{\sigma}{\mu}\Big)$. Notons $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ et $p = -\dfrac{\rho}{\mu}$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \widetilde{Y}^2 = 2p\widetilde{X}\}$$

est une parabole d'axe $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\overrightarrow{f_1}$, de sommet Ω et de paramètre p.

Supposons $\delta = \lambda\mu \neq 0$. Alors l'équation de $\mathscr{C}$ est :

$$\lambda\Big(X + \frac{\rho}{\lambda}\Big)^2 + \mu\Big(Y + \frac{\sigma}{\mu}\Big)^2 = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

Soit Ω le point de coordonnées $\Big(-\dfrac{\rho}{\lambda}, -\dfrac{\sigma}{\mu}\Big)$. Notant $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$, on obtient l'équation

$$\lambda\widetilde{X}^2 + \mu\widetilde{Y}^2 = K = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

(2) Si $\delta = \lambda\mu > 0$, alors λ et μ sont du même signe. Si K est du signe opposé, alors $\mathscr{C} = \varnothing$, tandis que $\mathscr{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Enfin, si K est du même signe que λ et μ, alors K/λ et K/μ sont tous deux > 0 ; quitte à échanger $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$, on peut supposer que $a^2 = K/\lambda > K/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \frac{\widetilde{X}^2}{a^2} + \frac{\widetilde{Y}^2}{b^2} = 1\}$$

est une ellipse, d'axe focal la droite $\Omega\widetilde{X}$.

(3) Si $\delta = \lambda\mu < 0$, alors λ et μ sont de signe opposé. Posons $-\lambda/\mu = t^2$. Si $K = 0$, $\mathscr{C}$ est la réunion des droites $\widetilde{Y} = t\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y} = -t\widetilde{X}$. Enfin, si $K \neq 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \mid \frac{\widetilde{X}^2}{K/\lambda} + \frac{\widetilde{Y}^2}{K/\mu} = 1\}$$

est une hyperbole, d'asymptotes les droites précédentes, et d'axe focal $\Omega\widetilde{X}$ si $K/\lambda > 0 > K/\mu$ (et d'axe focal $\Omega\widetilde{Y}$ si $K/\lambda < 0 < K/\mu$). Ceci achève la démonstration du théorème 3.5.8. □

On peut énoncer le théorème 3.5.8 sous une forme un peu plus générale, de la façon suivante. Soit $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ un repère arbitraire de $\mathscr{P}$, i.e. les vecteurs $\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}$ ne sont pas nécessairement unitaires ni orthogonaux. Notons (x', y') les coordonnées dans ce repère, soient $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathscr{C} = \{M(x', y') \mid a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0\}.$$

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ est :

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \phi\left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}\right) = a'x'_1x'_2 + b'(x'_1y'_2 + y'_1x'_2) + c'y'_1y'_2$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Soient $\mathscr{B}_0 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}_0)$, et (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B}_0)$. La matrice de ϕ dans $\mathscr{B}_0$ est :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^tPA'P,$$

donc $ac - b^2 = \det A = (\det P)^2 \cdot \det A' = (\det P)^2 \cdot (a'c' - b'^2)$ a même signe que $a'c' - b'^2$. Par conséquent, on déduit du théorème 3.5.8 le :

Corollaire 3.5.10. — *Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère arbitraire de $\mathscr{P}$, soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit*

$$\mathscr{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathscr{C} \neq \varnothing$. Alors :

(1) *Si $\delta = 0$, $\mathscr{C}$ est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).*

(2) *Si $\delta = ac - b^2 > 0$, $\mathscr{C}$ est une ellipse ou un point.*

(3) *Si $\delta < 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.*

3.6. Quadriques en dimension 3

On a des résultats analogues dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3. Fixons un repère orthonormé $\mathscr{R}_0 = (O, \mathscr{B}_0)$ et soient (x, y, z) les coordonnées dans ce repère. Soit $Q(x, y, z)$ une forme quadratique non nulle, $L(x, y, z)$ une forme linéaire, et c une constante. On considère

$$\mathscr{C} = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E} \mid Q(x, y, z) + L(x, y, z) + c = 0\}.$$

D'abord, d'après le théorème 3.5.9, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $E = \mathbb{R}^3$ telle que, notant (X, Y, Z) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$, on ait

$$Q(X, Y, Z) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2\,.$$

Alors $L(X, Y, Z)$ est encore une forme linéaire en X, Y, Z, donc de la forme $2\rho X + 2\sigma Y + 2\tau Z$, et l'on obtient que :

$$(\star) \qquad \mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + 2\tau Z + c = 0\}.$$

Distinguons les cas en fonction du rang de Q, qui peut être $3, 2$ ou 1 (car on a supposé $Q \neq 0$).

Supposons d'abord $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 3,}$ i.e. $\lambda\mu\nu \neq 0$. Dans ce cas, on peut faire disparaître tous les termes linéaires, en remplaçant X par $X + (\rho/\lambda)$, etc. Notons alors

$$\Omega = \Big(-\frac{\rho}{\lambda}, -\frac{\sigma}{\mu}, -\frac{\tau}{\nu}\Big)$$

et, pour alléger l'écriture, notons encore (X, Y, Z) les coordonnées dans le repère $(\Omega, \mathscr{B})$ (au lieu de les noter $\widetilde{X}$, etc.). On obtient alors une équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = K.$$

De plus, quitte à changer K en $-K$, on peut supposer que Q est de signature $(3, 0)$ ou bien $(2, 1)$.

3.6.1. Ellipsoïdes. — Supposons Q de signature $(3, 0)$. Alors $\mathscr{C}$ est vide si $K < 0$, et $\mathscr{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Si $K > 0$, posons $K/\lambda = a^2$, $K/\mu = b^2$, $K/\nu = c^2$, avec $a, b, c > 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X, Y, Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1\}$$

et l'on dit que $\mathscr{C}$ est un **ellipsoïde**. Si $a = b = c$, c'est une **sphère** de rayon a. Si $a = b \neq c$, l'ellipsoïde est invariant par rotation autour de l'axe ΩZ, on dit alors que c'est un **ellipsoïde de révolution**.

3.6.2. Cônes et hyperboloïdes. — Supposons Q de signature $(2,1)$. Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu < 0 < \lambda, \mu$. Posons $\nu' = -\nu > 0$.

(a) Considérons d'abord le cas où $K = 0$. Dans ce cas, $\mathscr{C}$ est le **cône quadratique**

$$\mathscr{C}_0 = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 = \nu' Z^2\}.$$

On voit que le complémentaire dans $\mathscr{E}$ de ce cône a 3 composantes connexes ; dans chacune de ces composantes connexes, $Q(X,Y,Z) = \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant, et ce signe est :

(1) à « l'extérieur » du cône, qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(1,1,0)$, le signe est > 0,

(2) à « l'intérieur du demi-cône supérieur », qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(0,0,1)$, le signe est < 0,

(3) de même, à « l'intérieur du demi-cône inférieur », qui est la composante connexe contenant, par exemple, le point $(0,0,-1)$, le signe est < 0.

(b) On en déduit que lorsque $K > 0$,

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2 = K > 0\}$$

est situé « à l'extérieur » du cône $\mathscr{C}_0$, et l'on peut montrer que dans ce cas $\mathscr{C}$ est **connexe**. Posant $K/\lambda = a^2$, $K/\mu = b^2$, $K/\nu' = c^2$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1\}$$

est connexe ; on dit que c'est un **hyperboloïde à une nappe**.

(c) Si $K < 0$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 - \nu' Z^2 = K < 0\}$$

est situé « à l'intérieur » du cône $\mathscr{C}_0$, et est symétrique par rapport au plan $Z = 0$. Donc, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est la réunion disjointe des deux ouverts $\mathscr{C}_+ = \mathscr{C} \cap \{Z > 0\}$ et $\mathscr{C}_- = \mathscr{C} \cap \{Z < 0\}$, donc $\mathscr{C}$ n'est **pas connexe**. On peut montrer que $\mathscr{C}_+$ et $\mathscr{C}_-$ sont connexes, donc

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{\lambda}{K} X^2 + \frac{\mu}{K} Y^2 - \frac{\nu'}{K} Z^2 = 1\}$$

(où ici $K < 0$) a deux composantes connexes. Posant alors $-K/\lambda = a^2$, $-K/\mu = b^2$, $-K/\nu' = c^2$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{Z^2}{c^2} - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

a deux composantes connexes ; on dit que c'est un **hyperboloïde à deux nappes**.

Définition 3.6.3. — Si $a = b$ dans ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{le cône} \quad & \mathscr{C}_0 = \{M(X,Y,Z) \mid X^2 + Y^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2 = 0\} \\ \text{l'hyperboloïde à une nappe} \quad & \mathscr{C}_1 = \{M(X,Y,Z) \mid X^2 + Y^2 - \frac{a^2}{c^2} Z^2 = 1\} \\ \text{l'hyperboloïde à deux nappes} \quad & \mathscr{C}_2 = \{M(X,Y,Z) \mid \frac{a^2}{c^2} Z^2 - X^2 - Y^2 = 1\}; \end{aligned}$$

ces surfaces sont invariantes par rotation autour de l'axe ΩZ ; on dit que $\mathscr{C}_0$ est un **cône de révolution**, et $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$) un **hyperboloïde de révolution** à une nappe (resp. deux nappes).

3.6.4. Paraboloïdes et cylindres. — Supposons maintenant $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 2.}$ Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu = 0 \neq \lambda\mu$. Alors, écrivant X et Y au lieu de $X + \dfrac{\rho}{\lambda}$ et $Y + \dfrac{\sigma}{\mu}$, on obtient une équation de la forme :

$$(\dagger) \qquad \lambda X^2 + \mu Y^2 = pZ + t.$$

(a) Supposons, pour commencer $p \neq 0$. Alors, notant Z au lieu de $Z + \dfrac{t}{p}$, on se ramène à l'équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 = pZ.$$

De plus, quitte à changer p en $-p$, on peut supposer que $Q = \lambda X^2 + \mu Y^2$ est de signature $(2,0)$ ou bien $(1,1)$. Dans le premier cas, posons $1/\lambda = a^2$ et $1/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = pZ\}$$

et l'on dit que c'est un **paraboloïde elliptique**. Dans le second cas, quitte à échanger X et Y, on peut supposer que $1/\lambda = a^2$ et $-1/\mu = b^2$, alors

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y,Z) \in \mathscr{E} \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = pZ\}$$

et l'on dit que c'est un **paraboloïde hyperbolique**.

(b) Considérons maintenant le cas où $p = 0$ (dans ce cas, la coordonnée Z n'intervient pas dans l'équation (†) plus haut). Quitte à changer t en $-t$, on peut supposer que $\lambda, \mu > 0$ ou bien que $\lambda > 0 > \mu$. Dans le premier cas, si $t < 0$ on a $\mathscr{C} = \varnothing$, et si $t = 0$ alors $\mathscr{C}$ est la droite $X = Y = 0$; enfin si $t > 0$, alors $\mathscr{C}$ est un **cylindre elliptique**, de section l'ellipse du plan $Z = 0$ définie par l'équation (†).

Dans le second cas, si $t = 0$ alors $\mathscr{C}$ est la réunion de deux plans sécants, et si $t \neq 0$ alors $\mathscr{C}$ est un **cylindre hyperbolique**, de section l'hyperbole du plan $Z = 0$ définie par l'équation (†).

Supposons enfin $\boxed{\mathrm{rang}(Q) = 1.}$ Quitte à permuter X, Y, Z, on peut supposer que $\nu = \mu = 0 \neq \lambda$. Alors, écrivant X au lieu de $X + \dfrac{\rho}{\lambda}$, on obtient une équation de la forme :

$$X^2 = pZ + qY + t.$$

Supposons, pour simplifier $(p,q) \neq (0,0)$ (on laisse au lecteur le soin de traiter le cas $p = q = 0$). Posons $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, alors la matrice

$$\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$$

est orthogonale, donc les coordonnées $\widetilde{Z} = \dfrac{1}{r}(pZ + qY)$, $\widetilde{Y} = \dfrac{1}{r}(qZ - pY)$ correspondent à une nouvelle base orthonormée. Posant $Z' = \widetilde{Z} + (t/r)$ et $Y' = \widetilde{Y}$, on obtient que

$$\mathscr{C} = \{M(X,Y',Z') \in \mathscr{E} \mid X^2 = rZ'\}$$

et l'on dit alors que $\mathscr{C}$ est un **cylindre parabolique**.

(Pour voir des figures d'ellipsoïde, d'hyperboloïde à une ou deux nappes, de paraboloïde elliptique ou hyperbolique, et de cylindre parabolique, voir par exemple : J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique, (2ème édition), Chap. III, §§7–9, ou : C. Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, p. 112.)

CHAPITRE 4

FORMES HERMITIENNES, ESPACES HILBERTIENS ET GROUPES UNITAIRES

Résumé : Ce chapitre est l'analogue du Chap. 6 quand on remplace le corps $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. De façon simplifiée : « on remplace le carré x^2 d'un nombre réel par le module au carré $|z|^2 = z\overline{z}$ d'un nombre complexe ». Ceci conduit à la notion de *forme hermitienne* (analogue de la notion de forme bilinéaire symétrique), puis de *produit scalaire hilbertien* sur $\mathbb{C}^n$ (analogue du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$). On introduit alors le groupe $\mathrm{U}(n)$ des isométries de l'espace hilbertien $\mathbb{C}^n$, puis la notion d'endomorphisme *auto-adjoint* et, plus généralement, d'endomorphisme *normal*. Un des avantages de se placer sur le corps $\mathbb{C}$ est l'existence de valeurs propres et vecteurs propres ; on obtient ainsi les importants théorèmes de diagonalisation 4.4.7 et 4.4.8.

On a indiqué par des symboles les définitions, exemples et résultats fondamentaux. Par ailleurs, des *compléments de cours*, pour les étudiants intéressés, sont donnés dans un appendice à la fin du chapitre (on y esquisse brièvement l'utilisation des « espaces de Hilbert » (de dimension infinie) en Analyse). Ces passages n'interviendront pas dans les évaluations.

4.0. Rappels sur les nombres complexes

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{C}$. On note i une racine carrée de -1, choisie une fois pour toutes. On rappelle les points suivants.

Définitions 4.0.1 **(Parties réelle et imaginaire, conjugaison complexe, module et argument)**

(1) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; a s'appelle la *partie réelle* de z et se note $\mathscr{R}(z)$, b s'appelle la *partie imaginaire* de z et se note $\mathscr{I}(z)$. Remarquons que, comme $-iz = b - ia$, on a $\boxed{\mathscr{R}(-iz) = \mathscr{I}(z)}$ et $\boxed{\mathscr{I}(iz) = \mathscr{R}(z).}$

(2) La *conjugaison complexe* est l'application qui à tout $z = a + ib$ associe $\overline{z} = a - ib$. Remarquons que : $\boxed{z + \overline{z} = 2\mathscr{R}(z),}$ $\boxed{z - \overline{z} = 2i\mathscr{I}(z)}$ et $\boxed{z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}}$ D'autre part, on a $\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ et $\boxed{\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.}$

(3) Si $z = a + ib$, on a $z\overline{z} = a^2 + b^2$ et $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ s'appelle le *module* (ou la *norme*) de z. D'après la dernière égalité ci-dessus, la norme est *multiplicative*, i.e. on a $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.}$

(4) Enfin, si $z \neq 0$, alors $z/|z|$ est de module 1, donc de la forme $e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (cf. Chap. 5, Appendice 2.5). Donc tout $z \neq 0$ s'écrit de façon unique :

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}, \quad \text{avec } \rho = |z| \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R} \text{ défini modulo } 2\pi\mathbb{Z}}$$

(par exemple, on peut prendre θ dans $[0, 2\pi[$ ou bien dans $]-\pi, \pi]$) ; on dit que θ est *l'argument* de z.

4.1. Formes hermitiennes

Exemple 4.1.0. — Le carré de la norme d'un nombre complexe z est la valeur en $x = y = z$ de la fonction de deux variables $\phi(x, y) = x\,\overline{y}$. Cette fonction $\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est linéaire en la 1ère variable :

$$\phi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda x + \mu x')\,\overline{y} = \lambda x\,\overline{y} + \mu x'\,\overline{y} = \lambda\phi(x, y) + \mu\phi(x', y)$$

---

(0) version du 10/4/2013

mais pas tout-à-fait linéaire en la 2ème variable, puisqu'on a :

$$\phi(x, \lambda y + \mu y') = x\,\overline{\lambda y + \mu y'} = x\,\overline{\lambda}\overline{y} + x\,\overline{\mu}\overline{y'} = \overline{\lambda}\phi(x, y) + \overline{\mu}\phi(x', y).$$

D'autre part, on a $\phi(y, x) = y\,\overline{x} = \overline{x\overline{y}} = \overline{\phi(x, y)}$. Ceci conduit aux définitions suivantes.

***Définition 4.1.1* (Applications semi-linéaires).** — Soient E, F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **semi-linéaire** si elle vérifie :

$$\forall u, v \in E, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad \boxed{f(u + v) = f(u) + f(v)} \qquad \boxed{f(zu) = \overline{z}f(u).}$$

Ces deux conditions équivalent bien sûr à la condition : $\boxed{f(zu + v) = \overline{z}f(u) + f(v).}$

***Définition 4.1.2* (Formes hermitiennes).** — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(1) Une **forme hermitienne** sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(a) ϕ est linéaire en la 1ère variable et semi-linéaire en la 2ème variable, i.e. :

$$\forall x, x', y, y' \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \begin{cases} \phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x, y) + \phi(x', y), \\ \phi(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda}\phi(x, y) + \phi(x, y') \end{cases}$$

(b) ϕ a la propriété de « *symétrie hermitienne* » ci-dessous :

$$(*) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}.$$

(2) Observons que, pour tout $x \in E$, $(*)$ entraîne $\phi(x, x) = \overline{\phi(x, x)}$ d'où $\boxed{\phi(x, x) \in \mathbb{R}.}$

(3) On note $\boxed{\mathscr{H}(E)}$ l'ensemble des formes hermitiennes sur E ; si $\phi, \psi \in \mathscr{H}(E)$ et $s, t \in \mathbb{R}$, on voit facilement que l'application $s\phi + t\psi : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $(s\phi + t\psi)(u, v) = s\phi(u, v) + t\psi(u, v)$ est encore une forme hermitienne. Par conséquent, $\mathscr{H}(E)$ est un $\boxed{\mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$ (mais **pas** un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, car si $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, alors $\lambda\phi$ ne vérifie plus $(*)$).

(4) Remarquons enfin que, pour vérifier qu'une application $\phi : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne, il suffit de voir que ϕ vérifie $(*)$ et est linéaire en la 1ère variable ; ces deux conditions impliquent en effet la semi-linéarité en la 2ème variable, car :

$$\phi(x, \lambda y + y') = \overline{\phi(\lambda y + y', x)} = \overline{\lambda\phi(y, x) + \phi(y', x)} = \overline{\lambda}\,\overline{\phi(y, x)} + \overline{\phi(y', x)} = \overline{\lambda}\,\phi(x, y) + \phi(x, y').$$

Remarque 4.1.2.1. — La notion de forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est une « variante » de la notion de forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

***Définition 4.1.3* (Formes quadratiques hermitiennes).** — Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On dit que l'application $Q : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(x, x)$ est une **forme quadratique hermitienne** sur E. D'après le lemme qui suit, ϕ est entièrement déterminée par Q, et l'on dit que ϕ est la **forme polaire** de Q. Notons aussi que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Q(\lambda x) = \phi(\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\phi(x, x) = \lambda\overline{\lambda}Q(x) = |\lambda|^2\,Q(x).$$

***Lemme 4.1.4* (Polarisation).** — *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\phi \in \mathscr{H}(E)$ et Q l'application $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(x, x)$. Alors, pour tout $x, y \in E$, on a :*

$$(1) \qquad \mathscr{R}(\phi(x, y)) = \frac{1}{2}\big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(Q(x + y) - Q(x - y)\big)$$

$$(2) \qquad \mathscr{I}(\phi(x, y)) = \frac{1}{2}\big(Q(x + iy) - Q(x) - Q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(Q(x + iy) - Q(x - iy)\big)$$

$$(3) \qquad 4\phi(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y) + iQ(x + iy) - iQ(x - iy).$$

Démonstration. — On a

$$Q(x + y) = \phi(x + y, x + y) = Q(x) + Q(y) + \phi(x, y) + \phi(y, x)$$
$$Q(x - y) = \phi(x - y, x - y) = Q(x) + Q(y) - \phi(x, y) - \phi(y, x)$$

et comme $\phi(x, y) + \phi(y, x) = \phi(x, y) + \overline{\phi(x, y)} = 2\mathscr{R}(\phi(x, y))$, on obtient (1). Comme $\mathscr{I}(z) = \mathscr{R}(-iz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\mathscr{I}(\phi(x, y)) = \mathscr{R}(-i\phi(x, y)) = \mathscr{R}(\phi(x, iy))$$

et donc (2) s'obtient en remplaçant y par iy dans (1) et en utilisant que $Q(iy) = |i|^2\, Q(y) = Q(y)$. Enfin, (3) découle de (1) et (2). $\square$

Désormais, on suppose E de dimension finie n.

***Définition 4.1.5* (Matrices hermitiennes).** — Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est **hermitienne** si $\boxed{{}^tA = \overline{A}.}$ On note $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de ces matrices, si $A, B \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ et $s, t \in \mathbb{R}$, alors $sA + tB \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Observons que si $A \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, ses coefficients diagonaux a_{ii} vérifient $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ donc $\boxed{a_{ii} \in \mathbb{R}.}$

Remarque 4.1.5.1. — On a $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n(\mathbb{C}) = n^2.}$ En effet, notons N le nombre de coefficients qui sont strictement au-dessus de la diagonale. C'est aussi le nombre de coefficients qui sont strictement en-dessous de la diagonale, et il y a n coefficients diagonaux. Donc $2N + n = n^2$, d'où $\boxed{2N = n^2 - n = n(n-1).}$ Puis, une matrice hermitienne est déterminée par le choix de n coefficients réels sur la diagonale et de N coefficients complexes au-dessus (ceux en-dessous en étant les conjugués), pour chaque coefficient complexe, il faut choisir sa partie réelle et sa partie imaginaire, d'où au total $n + 2N = n^2$ coefficients réels.

***Définition et théorème 4.1.6* (Matrice d'une forme hermitienne et changement de base)**

Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

(1) *La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C})$, où $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$. Comme $\phi(e_j, e_i) = \overline{\phi(e_i, e_j)}$, on a $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, donc ${}^tA = \overline{A}$, i.e. $A \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$.*

(2) *ϕ est entièrement déterminée par sa matrice A : en effet, d'après la linéarité (resp. semi-linéarité) en la 1ère (resp. 2ème) variable, on a l'égalité :*

$$(*) \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \qquad \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i\, \overline{y_j}\, \phi(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, \overline{y_j}.$$

Donc, si l'on note X, Y les vecteurs colonnes ci-dessus, on a la formule matricielle $\boxed{\phi(X, Y) = {}^tX\, A\, \overline{Y}.}$

(3) *Réciproquement, pour tout $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, l'application $\phi_A : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $\phi_A(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i \overline{y_j}$ est une forme hermitienne sur E, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_A) = A$. Donc, se donner une forme hermitienne sur E « est la même chose » que se donner une matrice hermitienne : de façon précise, l'application $\mu_{\mathscr{B}} : \mathscr{H}(E) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.*

(4) *Soient $\mathscr{B}'$ une autre base de E et P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors*

$$(**) \qquad \boxed{A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = {}^tP\, A\, \overline{P}.}$$

Démonstration. — (2) Comme ϕ est linéaire (resp. semi-linéaire) en la 1ère (resp. 2ème) variable, on a bien l'égalité $(*)$, qui montre que ϕ est déterminée par sa matrice, donc que l'application $\mu_{\mathscr{B}} : \mathscr{H}(E) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est *injective*. D'autre part, on voit que le scalaire $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, \overline{y_j} \in \mathbb{C}$ est égal au produit matriciel

$${}^tX\, A\, \overline{Y} = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve (2). Avant de prouver (3), remarquons déjà que l'application $\mu_{\mathscr{B}}$ est $\mathbb{R}$-*linéaire*. En effet, si $\phi, \psi \in \mathscr{H}(E)$ et $s \in \mathbb{R}$, alors $s\phi + \psi$ est la forme hermitienne définie par $(s\phi + \psi)(u, v) = s\phi(u, v) + \psi(u, v)$ pour *tout* $u, v \in E$, donc *a fortiori* on a $(s\phi + \psi)(e_i, e_j) = s\phi(e_i, e_j) + \psi(e_i, e_j)$ pour tout i, j, d'où $\mu_{\mathscr{B}}(s\phi + \psi) = s\, \mu_{\mathscr{B}}(\phi) + \mu_{\mathscr{B}}(\psi)$.

Prouvons (3). Pour tout $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, l'application $\phi_A : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi_A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i\, \overline{y_j}$$

est linéaire en les x_i, et vérifie :

$$\phi_A(y,x) = \phi_A\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{a_{ji}}_{=\overline{a_{ij}}}\ y_j\,\overline{x_i} = \sum_{i,j=1}^n \overline{a_{ij}\,x_i\,\overline{y_j}} = \overline{\phi_A(x,y)}$$

donc est une forme hermitienne sur E ; de plus, prenant $x_{i_0} = 1 = y_{j_0}$ et $x_i = 0 = y_j$ pour $i \neq i_0$ et $j \neq j_0$, on obtient que $\phi_A(e_{i_0}, e_{j_0}) = a_{i_0,j_0}$ pour tout $i_0, j_0 = 1, \dots, n$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_A) = A$. Ceci montre que l'application $\mathbb{R}$-linéaire injective $\mu_{\mathscr{B}} : \mathscr{H}(E) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, $\phi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est aussi *surjective*, donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. En particulier, *se donner une forme hermitienne sur E « est la même chose » que se donner une matrice hermitienne.*

Enfin, démontrons (4). Soient $x, y \in E$, ils correspondent dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) à des vecteurs colonnes X, Y (resp. X', Y'). D'après la formule de changement de coordonnées, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$, d'où ${}^tX = {}^tX'\,{}^tP$ et $\overline{Y} = \overline{P}\,\overline{Y'}$, et donc :

$$\phi(x,y) = {}^tX\,A\,\overline{Y} = {}^tX'\,{}^tPA\overline{P}\,\overline{Y'}$$

ce qui entraîne $A' = {}^tP\,A\,\overline{P}$. Le théorème est démontré. □

***Définition 4.1.7* (Carrés de modules et « doubles produits »).** — En séparant, d'une part, les termes $x_i\,\overline{y_i}$ et, d'autre part, les termes $x_i\,\overline{y_j}$ avec $i \neq j$, la formule $(*)$ de 4.1.6 se récrit de la façon suivante (puisque $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pour tout $i \neq j$) :

$$(*') \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in k^n, \qquad \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\,x_i\,\overline{y_i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{ij}\,x_i\,\overline{y_j} + \overline{a_{ij}}\,x_j\,\overline{y_i}).$$

En particulier, prenant $Y = X$ (i.e. $y_i = x_i$ pour tout i), on voit que la forme quadratique hermitienne Q associée à ϕ est donnée par la formule suivante (noter que $x_i\,\overline{x_i} = |x_i|^2$) :

$$(*') \quad Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\,|x_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{ij}\,x_i\,\overline{x_j} + \overline{a_{ij}}\,\overline{x_i}\,x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\,|x_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2\mathscr{R}(a_{ij}\,x_i\,\overline{x_j}).$$

On voit donc apparaître les *carrés des modules* des x_i, et les parties réelles des doubles produits $x_i\,\overline{x_j}$. Pour abréger, on parlera de « carrés de modules » et de « doubles produits ».

***Définition et proposition 4.1.8* (Rang d'une forme hermitienne).** — *Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*

(1) *On définit le* **rang** *de ϕ par $\mathrm{rang}(\phi) = \mathrm{rang}(A)$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$; ceci ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$.*

(2) *On dit que ϕ est* **non-dégénérée** *si $\mathrm{rang}(\phi) = \dim E$, i.e. si sa matrice dans une (et donc dans* toute*) base de E est inversible.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{B}'$ une autre base de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Comme ${}^tP$ et $\overline{P}$ sont inversibles (on a $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$ et $(\overline{P})^{-1} = \overline{P^{-1}}$), alors la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = {}^tPA\overline{P}$ a même rang que A. □

***Définition et proposition 4.1.9* (Orthogonalité).** — *Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.*

(1) *On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont* **orthogonaux** *(pour ϕ) si $\phi(x,y) = 0$; ceci équivaut à dire que $\phi(y,x) = 0$ (puisque $\phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}$ et vice-versa). Plus généralement, on dit que deux sous-ensembles X, Y de E sont orthogonaux si l'on a $\phi(x,y) = 0$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. On notera $X \perp Y$ pour signifier que X et Y sont orthogonaux.*

(2) *Pour tout sous-ensemble Y de E, on définit son orthogonal (relativement à ϕ), noté $Y^{\perp\phi}$ ou simplement $Y^\perp$, par :*

$$(\star) \qquad \boxed{Y^\perp = \{x \in E \mid \phi(x,y) = 0, \quad \forall y \in Y\}}$$

c'est un **sous-espace vectoriel** *de E (même si Y n'en est pas un) ; de plus, on a les propriétés suivantes :*

$$(\star\star) \qquad \boxed{Y \subseteq Z \Longrightarrow Z^\perp \subseteq Y^\perp} \qquad \boxed{Y^\perp = \mathrm{Vect}(Y)^\perp}$$

en particulier, si Y est un sous-espace vectoriel F de E et si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille génératrice de F, alors

$$\boxed{F^\perp = \{f_1, \dots, f_p\}^\perp = \{x \in E \mid \phi(x, f_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p\}.}$$

(3) *On pose* $\boxed{N(\phi) = E^{\perp} = \{x \in E \mid \phi(x,y) = 0, \quad \forall y \in Y\}}$ *et on l'appelle le* **noyau** *de* ϕ.

Démonstration. — Soient $x, x' \in Y^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a, pour tout $y \in Y$, $\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x', y) = 0$, ce qui montre que $\lambda x + x' \in Y^{\perp}$. Donc $Y^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Il est immédiat que si $Y \subseteq Z$, alors $Z^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$ car si $x \in Z^{\perp}$ alors x est orthogonal à tout élément de Z, donc x est *a fortiori* orthogonal à tout élément de Y (puisque $Y \subseteq Z$), donc $x \in Y^{\perp}$.

Comme $Y \subseteq \mathrm{Vect}(Y)$, ceci donne déjà l'inclusion $\mathrm{Vect}(Y)^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in Y^{\perp}$ et soit v un élément arbitraire de $\mathrm{Vect}(Y)$, par définition, v s'écrit comme une combinaison linéaire finie $v = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r$, avec $y_i \in Y$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$; alors on a

$$\phi(x, v) = \sum_{i=1}^{r} \overline{\lambda_i}\, \underbrace{\phi(x, y_i)}_{=0} = 0$$

et donc $x \in \mathrm{Vect}(Y)^{\perp}$. Ceci montre l'inclusion $Y^{\perp} \subseteq \mathrm{Vect}(Y)^{\perp}$, d'où l'égalité $\mathrm{Vect}(Y)^{\perp} = Y^{\perp}$. L'assertion (2) est démontrée. □

***Théorème 4.1.10* (Orthogonal d'un sous-espace).** — *Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension r.*

(1) *On a* $\boxed{F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}}$ *et* $\boxed{\dim F^{\perp} \geq \dim E - \dim F.}$

(2) $\boxed{N(\phi) = \{0\} \Leftrightarrow \phi \text{ est non-dégénérée.}}$

(3) *Si ϕ est non-dégénérée, on a* $\boxed{\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F}$ *et* $\boxed{F = (F^{\perp})^{\perp}.}$

(4) *Si $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, alors* $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}.}$

Démonstration. — Soit $f \in F$, pour tout $x \in F^{\perp}$ on a $\phi(f, x) = \overline{\phi(x, f)} = 0$, d'où $f \in (F^{\perp})^{\perp}$. Ceci montre la première assertion de (1). Prouvons la seconde.

Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une base de F, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (f_1, \dots, f_n)$ de E, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$, i.e. $a_{ij} = \phi(f_i, f_j)$ pour $i, j = 1, \dots, n$.

D'après le point (2) de 4.1.9, $F^{\perp}$ est formé des vecteurs $v = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n \in E$ tels que $\phi(v, f_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. Comme $\phi(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n, f_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \phi(f_j, f_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_j$, ceci équivaut à dire que le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire homogène :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 & + \cdots + & a_{n1}\, x_n & = 0 \\ \quad\vdots & & \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{1r}\, x_1 & + \cdots + & a_{nr}\, x_n & = 0 \end{cases}$$

dont la matrice B est formée des r premières lignes de la matrice ${}^t A$. Comme l'espace des solutions du système est de dimension $n - \mathrm{rang}(B)$, on obtient :

$$\dim F^{\perp} = n - \mathrm{rang}(B) \geq n - r,$$

ce qui prouve la seconde assertion de (1). De plus, dans le cas particulier où $F = E$, on a $B = {}^t A$ et, comme $\mathrm{rang}({}^t A) = \mathrm{rang}(A)$, on obtient que $\dim E^{\perp} = n - \mathrm{rang}(A)$. Donc $N(\phi) = E^{\perp}$ est nul si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = n$. Ceci prouve (2).

Supposons ϕ non-dégénérée. Alors A est de rang n, i.e. ses colonnes sont linéairement indépendantes, en particulier les r premières colonnes le sont, donc la matrice B est de rang r, et donc $\dim F^{\perp} = n - r$. Remplaçant alors F par $F^{\perp}$, on obtient l'égalité $\dim (F^{\perp})^{\perp} = n - (n - r) = r$, et par conséquent l'inclusion $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ est une égalité. Ceci prouve (3).

Enfin, supposons $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (sans supposer ϕ non-dégénérée). Alors F et $F^{\perp}$ sont en somme directe, et le sous-espace $F \oplus F^{\perp}$ de E est de dimension $d = r + \dim F^{\perp}$. D'après (1), on a $d \geq n$, d'où $E = F \oplus F^{\perp}$ (et $\dim F^{\perp} = n - r$). Ceci prouve (4). Le théorème est démontré. □

***Définition 4.1.11* (Bases orthogonales).** — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et soient ϕ une forme hermitienne sur E, et Q la forme quadratique hermitienne associée. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

a) On dit que $\mathscr{B}$ est une base **orthogonale** pour ϕ (ou pour Q) si l'on $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

b) Ceci équivaut à dire que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est **diagonale** ; si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux (qui sont **réels**) et $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, ceci équivaut encore à dire que $Q(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + \cdots + \lambda_n |z_n|^2$.

***Théorème 4.1.12* (de Sylvester dans le cas hermitien).** — *Soit ϕ une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, et soit Q la forme quadratique hermitienne associée.*

(1) *Il existe une base $\mathscr{B}$ de E orthogonale pour ϕ.*

(2) *Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale pour ϕ et D la matrice diagonale $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$. Quitte à renuméroter les e_i, on peut supposer que les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sont $\neq 0$, et que $\lambda_i = 0$ pour $i > r$. Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, alors :*

(a) *On a* $\boxed{Q(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + \cdots + \lambda_r |z_r|^2.}$ $(*)$

(b) *Soit p (resp. q) le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. < 0). Alors p et q ne dépendent pas de la base orthogonale choisie.*

(c) *Le couple (p, q) s'appelle la* **signature** *de ϕ ; on a $p + q = r = \mathrm{rang}(\phi)$.*

(d) *$N(\phi)$ est le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$, donné par les équations $z_1 = 0 = \cdots = z_r$.*

(3) *De plus, on peut choisir $\mathscr{B}$ de sorte que la matrice diagonale $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ ait pour termes diagonaux $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$, le nombre de 1 (resp. -1) étant p (resp. q).*

Démonstration. — (1) Montrons l'existence d'une base orthogonale en procèdant par récurrence sur $n = \dim E$. Il n'y a rien à montrer si $n = 0$ ou si $\phi = 0$. On peut donc supposer $n \geq 1$, le résultat établi pour $n - 1$, et $\phi \neq 0$. Alors, d'après 4.1.4, la forme quadratique hermitienne Q est non nulle, donc il existe $e_1 \in E$ tel que $Q(e_1) \neq 0$. Posons $F = ke_1$, comme $\phi(e_1, e_1) \neq 0$, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc, d'après le théorème 4.1.10, on a

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de $F^\perp$ telle que $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E orthogonale pour ϕ. Ceci prouve l'assertion (1).

Puis, (2.a) et l'égalité $p + q = r = \mathrm{rang}(\phi)$ dans (2.c) découlent aussitôt des définitions. Prouvons maintenant (2.d). D'après $(*)$, ϕ est donnée dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$(*') \qquad \forall u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \forall v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \qquad \phi\,(u, v) = \lambda_1\, x_1\, \overline{y_1} + \cdots + \lambda_r\, x_r\, \overline{y_r}.$$

Supposons $u \in N(\phi)$, alors pour tout $i = 1, \ldots, r$, prenant $v = e_i$ (c.-à-d., $y_i = 1$ et $y_j = 0$ pour $j \neq i$), on obtient $x_i = 0$, d'où $u \in F = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$. Réciproquement, $(*')$ montre aussi que tout $u \in F$ (i.e. tel que $x_1 = 0 = \cdots = x_r$) appartient à $N(\phi)$, d'où l'égalité désirée. Ceci prouve (2.d).

Prouvons (2.b). On note $r = \mathrm{rang}(\phi)$. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases de E orthogonales pour ϕ. Notons p (resp. p') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. $Q(f_i) > 0$) et q (resp. q') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) < 0$ (resp. $Q(f_i) < 0$). Alors

$$p + q = r = p' + q'$$

et il s'agit de montrer que $q = q'$ et $p = p'$. Quitte à renuméroter les éléments de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on peut supposer que

$$(\star) \qquad \begin{cases} Q(e_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, p \\ Q(e_i) < 0 & \text{pour } i = p+1, \ldots, p+q \\ Q(e_i) = 0 & \text{pour } i > p + q = r\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q(f_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, p' \\ Q(f_i) < 0 & \text{pour } i = p'+1, \ldots, p'+q' \\ Q(f_i) = 0 & \text{pour } i > p' + q' = r\,. \end{cases}$$

Notons P_+ le sous-espace de E engendré par les vecteurs e_i tels que $Q(e_i) \geq 0$. Ces vecteurs sont au nombre de $n - q$, donc $\dim P_+ = n - q$. Soit x un élément arbitraire de P_+, écrivons $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, avec $I = \{1, \ldots, p\} \cup \{r+1, \ldots, n\}$; alors, d'après $(\star)$, on obtient

$$(1) \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\, Q(e_i) \geq 0.$$

D'autre part, soit P'_- le sous-espace de E engendré par les vecteurs f_j tels que $Q(f_j) < 0$. Ces vecteurs sont au nombre de q', donc $\dim P'_- = q'$. Soit y un élément non nul de P'_-, on peut écrire $y = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} y_j f_j$, avec au moins l'un des y_j non nul (car $y \neq 0$). Alors, d'après ($\star$) à nouveau, on obtient

$$(2) \qquad Q(y) = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} |y_j|^2 \, Q(f_j) < 0.$$

Par conséquent, on a $P_+ \cap P'_- = \{0\}$ et donc

$$n = \dim E \geq \dim P_+ + \dim P'_- = n - q + q'$$

d'où $q \geq q'$. Échangeant les rôles des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on obtient de même $q' \geq q$, d'où $q = q'$, et de même $p = p'$. Ceci prouve (2.b).

Voyons l'assertion (3). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ comme ci-dessus ; pour $i = 1, \dots, p+q$, notons $|Q(e_i)| > 0$ la valeur absolue du réel $Q(e_i) \neq 0$. En remplaçant e_i par $e_i/\sqrt{|Q(e_i)|}$, pour $i = 1, \dots, p+q$, on obtient une base orthogonale ayant la propriété énoncée dans (3). Ceci achève la démonstration du théorème. ☐

4.2. Réduction en sommes de carrés de modules

Définition 4.2.1. — Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique hermitienne sur E et ϕ sa forme polaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans cette base, i.e. x_i désigne en fait la forme linéaire $f_i = e_i^*$ sur E.

(1) On dit que Q s'écrit dans la base $\mathscr{B}$ comme **somme de carrés de modules de formes linéaires indépendantes** si l'expression de Q en fonction des coordonnées x_i est de la forme

$$Q = q_1 \, |x_1|^2 + \cdots + q_n \, |x_n|^2, \qquad (\text{avec } q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}).$$

D'après 4.1.11, ceci équivaut à dire que la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}$ est **diagonale**, avec les q_i pour coefficients diagonaux.

(2) Les formes linéaires $f_i = e_i^*$ sont linéairement indépendantes ($\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$), d'où la terminologie « somme de carrés demodules de **formes linéaires indépendantes** ». En pratique, pour abréger on écrira souvent « somme de carrés de modules », mais il est essentiel de s'assurer que les formes linéaires en question sont bien linéairement indépendantes (cf. l'exemple 1.3.7 pour les formes bilinéaires symétriques).

Comme dans le cas des formes bilinéaires symétriques, on dispose d'un procédé algorithmique simple pour réduire une forme quadratique hermitienne en « somme de carrés de modules » (de formes linéaires indépendantes) ; au lieu des égalités $x^2 + 2xL = (x+L)^2 - L^2$ et $4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2$, on va utiliser les égalités :

$$|z|^2 + 2\mathscr{R}(z\overline{L}) = |z+L|^2 - |L|^2, \qquad 4\mathscr{R}(z_1\,\overline{z_2}) = |z_1 + \overline{z_2}|^2 - |z_1 - \overline{z_2}|^2.$$

***Théorème 4.2.2* (Réduction d'une forme hermitienne en somme de carrés de modules)**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et Q une forme quadratique hermitienne sur E, donnée en fonctions des coordonnés $(x_1, \dots, x)$ dans une base $\mathscr{B}$ par :

$$(*) \qquad Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i b_i \, |x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij}\, x_i\, \overline{x_j} + \overline{b_{ij}}\, x_j\, \overline{x_i}) \qquad (b_i \in \mathbb{R}, \quad b_{ij} \in \mathbb{C}).$$

(1) *Par une suite d'opérations « élémentaires » (décrites dans la démonstration), on peut trouver un nouveau système de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ sur E, dans lequel Q s'écrit comme une somme de carrés de modules, i.e. :*

$$(**) \qquad Q(y_1, \dots, y_n) = a_1 \, |y_1|^2 + \cdots + a_n |y_n|^2.$$

(2) *La signature de Q est (p, q), où p (resp. q) est le nombre de coefficients a_i qui sont > 0 (resp. < 0), et* $\mathrm{rang}(Q) = p + q$.

(3) *De plus, $N(Q)$ est le sous-espace vectoriel de E défini par les équations $y_i = 0$, pour i parcourant l'ensemble des $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_i \neq 0$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que si Q s'écrit sous la forme ($**$) dans une base $\mathscr{B}'$, alors la matrice de sa forme polaire y est diagonale, avec les a_i pour coefficients diagonaux, d'où les assertions (2) et (3) du théorème, compte-tenu du théorème 4.1.12.

Il reste à donner une démonstration « algorithmique » de l'assertion (1). On procède par récurrence sur le nombre n de variables. Si $n = 1$ on a $Q(x_1) = b_1|x_1|^2$, et ($**$) est vérifié. On peut donc supposer $n > 1$ et le résultat démontré pour $n - 1$. Distinguons deux cas.

(a) Si dans l'écriture $(*)$ plus haut, il existe un coefficient « diagonal » b_i non nul, on peut supposer, quitte à changer l'ordre des coordonnées, que $b_1 \neq 0$. On considère alors la somme de **tous** les termes contenant x_1 ou $\overline{x_1}$ et on l'écrit comme suit :

$$S = b_1\, |x_1|^2 + \sum_{j=2}^{n} 2\mathscr{R}(\overline{b_{j1}}\, x_1\, \overline{x_j}) = b_1\Big(|x_1|^2 + 2\mathscr{R}\left(x_1 \overline{L(x_2,\dots,x_n)}\right)\Big)$$

où $L(x_2,\dots,x_n) = \sum_{j=2}^{n} (b_{j1}/b_1) x_j$. Puis, en utilisant que

$$|x_1 + L|^2 = |x_1|^2 + 2\mathscr{R}(x_1\overline{L}) + |L|^2, \qquad \text{d'où} \qquad |x_1|^2 + 2\mathscr{R}(x_1\overline{L}) = |x_1 + L|^2 - |L|^2,$$

on récrit ceci sous la forme :

$$S = b_1\, |x_1 + L|^2 - b_1 |L|^2 = b_1 \Big| x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{j1}}{b_1} x_j \Big|^2 - \frac{1}{b_1} \sum_{j=2}^{n} |b_{j1}|^2\, |x_j|^2 \; - \frac{2}{b_1} \sum_{2 \le i < j \le n} \mathscr{R}(b_{i1}\, \overline{b_{j1}}\, x_i\, \overline{x_j}).$$

Donc, en posant $y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{j1}}{b_1}\, x_j$ (et $b'_j = b_j - |b_{j1}|^2/b_1$ pour $j = 2,\dots,n$, et $b'_{ij} = b_{ij} - b_{i1}\,\overline{b_{j1}}/b_1$ pour $2 \le i < j \le n$), on obtient une écriture :

$$(\dagger) \qquad Q(y_1, x_2,\dots,x_n) = b_1\, |y_1|^2 + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} b'_j\, |x_j|^2 + \sum_{2 \le i < j \le n} 2\mathscr{R}(b'_{ij}\, x_i\, \overline{x_j})}_{Q_1(x_2,\dots,x_n)}$$

où la forme quadratique hermitienne $Q_1(x_2,\dots,x_n)$ ne dépend que des variables $x_2,\dots,x_n$.

L'opération $y_1 = x_1 + L(x_2,\dots,x_n)$ et $x_j = x_j$ pour $j \ge 2$, est bien un changement de coordonnées, car la matrice exprimant $(y_1, x_2,\dots,x_n)$ en fonction de $(x_1,\dots,x_n)$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc inversible ; explicitement le changement de coordonnées inverse est donné par $x_j = x_j$ pour $j \ge 2$ et $x_1 = y_1 - L(x_2,\dots,x_n)$.

Par hypothèse de récurrence on peut faire un changement de coordonnées $(x_2,\dots,x_n) \to (y_2,\dots,y_n)$ tel que $Q_1(x_2,\dots,x_n) = a_2\, |y_2|^2 + \cdots + a_n\, |y_n|^2$ d'où, d'après $(\dagger)$:

$$Q(y_1,\dots,y_n) = a_1\, |y_1|^2 + \cdots + a_n\, |y_n|^2$$

(avec $a_1 = b_1$), ce qui prouve le résultat voulu dans ce cas.

(b) Supposons au contraire que **tous** les coefficients « diagonaux » b_i soient nuls. Si $Q = 0$, il n'y a rien à montrer ; sinon on peut supposer, quitte à changer l'ordre des coordonnées, que $b_{12} \neq 0$. Comme

$$\mathscr{R}(b_{12}\, x_1\, \overline{x_2}) = \frac{1}{4}\big(|b_{12}\, x_1 + x_2|^2 - |b_{12}\, x_1 - x_2|^2\big),$$

posons $y_1 = \frac{1}{2}(b_{12}\, x_1 + x_2)$ et $y_2 = \frac{1}{2}(b_{12}\, x_1 + x_2)$; c'est bien un changement de variable, dont l'inverse est donné par

$$x_1 = b_{12}^{-1}(y_1 + y_2) \qquad\qquad x_2 = y_1 - y_2.$$

Alors : $2\mathscr{R}(b_{12}\, x_1\, \overline{x_2}) = 2\big(|y_1|^2 - |y_2|^2\big)$, les termes $2\mathscr{R}(b_{ij}\, x_i\, \overline{x_j})$ sont inchangés pour $i < j$ dans $\{3,\dots,n\}$, et l'on a :

$$\begin{cases} 2\mathscr{R}(b_{1j}\, x_1\, \overline{x_j}) = 2\mathscr{R}\big(b_{1j} b_{12}^{-1}\, (y_1 + y_2)\, \overline{x_j}\big) & \text{pour } j \ge 3 \\ 2\mathscr{R}(b_{2j}\, x_2\, \overline{x_j}) = 2\mathscr{R}\big(b_{2j}\, (y_1 - y_2)\, \overline{x_j}\big) & \text{pour } j \ge 3 \end{cases}$$

donc $Q(y_1, y_2, x_3,\dots,x_n)$ égale :

$$2|y_1|^2 - 2|y_2|^2 + \sum_{j=3}^{n} 2\mathscr{R}\Big((b_{1j} b_{12}^{-1} + b_{2j})\, y_1\, \overline{x_j} + (b_{1j} b_{12}^{-1} - b_{2j})\, y_2\, \overline{x_j}\Big) + \sum_{3 \le i < j \le n} 2\mathscr{R}(b_{ij}\, x_i\, \overline{x_j})$$

et l'on est ramené au cas **(a)**, c.-à-d., on peut maintenant éliminer la variable y_1 et se ramener, à nouveau, au cas de $n - 1$ variables. Le théorème est démontré. □

Illustrons ceci par deux exemples : dans le premier n'apparaissent que des changements de coordonnées du type **(a)**.

Exemple 4.2.3. — Considérons dans $\mathbb{C}^3$ la forme quadratique hermitienne

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_1} - 2ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_1} + ix_1\overline{x_3} - ix_3\overline{x_1} + 2x_2\overline{x_2} + 2x_3\overline{x_3} - 2ix_2\overline{x_3} + 2ix_3\overline{x_2}.$$

Alors q contient le terme $x_1\overline{x_1} = |x_1|^2$, et les termes contenant x_1 ou $\overline{x_1}$ sont :

$$\begin{aligned}
x_1\overline{x_1} - 2ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_1} + ix_1\overline{x_3} - ix_3\overline{x_1} &= |x_1|^2 + 2\mathscr{R}\big(x_1\,\overline{(2ix_2 - ix_3)}\,\big)\\
&= |x_1 + 2ix_2 - ix_3|^2 - |2ix_2 - ix_3|^2\\
&= |x_1 + 2ix_2 - ix_3|^2 - 4\,|x_2|^2 - |x_3|^2 + 4\mathscr{R}(x_2\,\overline{x_3})
\end{aligned}$$

donc, posant $y_1 = x_1 + 2ix_2 - ix_3$, on obtient

$$\begin{aligned}
q(y_1, x_2, x_3) &= |y_1|^2 - 4\,|x_2|^2 - |x_3|^2 + 4\mathscr{R}(x_2\,\overline{x_3}) + 2|x_2|^2 + 2|x_3|^2 - 4\mathscr{R}(ix_2\,\overline{x_3})\\
&= |y_1|^2 - 2|x_2|^2 + |x_3|^2 + 4\mathscr{R}\big(x_2\,\overline{(1+i)x_3}\,\big).
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
-2\Big(|x_2|^2 - 2\mathscr{R}\big(x_2\,\overline{(1+i)x_3}\,\big)\Big) &= -2\Big(|x_2 - (1+i)x_3|^2 - |(1+i)x_3|^2\Big)\\
&= -2\Big(|x_2 - (1+i)x_3|^2 - 2\,|x_3|^2\Big)
\end{aligned}$$

donc, posant $y_2 = x_2 - (1+i)x_3$ on obtient : $\boxed{q(y_1, y_2, x_3) = |y_1|^2 - 2|y_2|^2 + 5|x_3|^2.}$ Donc la signature de q est $(2,1)$ et son rang est $2+1=3$, i.e. h est non-dégénérée.

Exemple 4.2.4. — Considérons dans $\mathbb{C}^3$ la forme quadratique hermitienne

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_1} + ix_1\overline{x_3} - ix_3\overline{x_1} + (1+i)x_2\overline{x_3} + (1-i)x_3\overline{x_2}.$$

Ici, il n'y a pas de « termes carrés » $|x_i|^2$, donc on va considérer le terme $x_1\,\overline{x_2}$. On a $b_{12} = 1$, faisons le changement de coordonnées :

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \qquad \text{d'où} \qquad x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2.$$

On a $2\mathscr{R}(x_1\,\overline{x_2}) = 2\big(|y_1|^2 - |y_2|^2\big)$, et

$$\begin{cases} 2\mathscr{R}(ix_1\overline{x_3}) &= & 2\mathscr{R}(iy_1\overline{x_3}) + 2\mathscr{R}(iy_2\overline{x_3})\\ 2\mathscr{R}((1+i)x_2\overline{x_3}) &= & 2\mathscr{R}((1+i)y_1\overline{x_3}) - 2\mathscr{R}((1+i)y_2\overline{x_3}) \end{cases}$$

d'où

$$Q(y_1, y_2, x_3) = 2\,|y_1|^2 - 2\,|y_2|^2 + 2\mathscr{R}((1+2i)y_1\overline{x_3}) - 2\mathscr{R}(y_2\overline{x_3}).$$

Puis $2\Big(|y_1|^2 + 2\mathscr{R}(\frac{1+2i}{2}y_1\overline{x_3})\Big) = 2\Big(|y_1 + \frac{1-2i}{2}x_3|^2 - |\frac{1-2i}{2}x_3|^2\Big)$ donc, posant $z_1 = y_1 + \frac{1-2i}{2}x_3$, on obtient

$$Q(z_1, y_2, x_3) = 2\,|z_1|^2 - \frac{5}{2}|x_3|^2 - 2\,|y_2|^2 - 2\mathscr{R}(y_2\overline{x_3}).$$

Puis $-2\Big(|y_2|^2 + \mathscr{R}(y_2\overline{x_3})\Big) = -2\Big(|y_2 + \frac{1}{2}x_3|^2 - \frac{1}{4}|x_3|^2\Big)$ donc, posant $2_1 = y_2 + \frac{1}{2}x_3$, on obtient

$$\boxed{Q(z_1, z_2, x_3) = 2\,|z_1|^2 - 2\,|z_2|^2 - 2\,|x_3|^2.}$$

Donc la signature de Q est $(1,2)$ et son rang est $1+2=3$, i.e. Q est non-dégénérée.

4.3. Espaces hilbertiens. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Isométries

***Définitions 4.3.1* (Produits scalaires et espaces hilbertiens)**. — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soient ϕ une forme hermitienne sur E et Q la forme quadratique hermitienne associée (i.e. $Q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$). On dit que Q (ou ϕ) est **définie positive** si l'on a :

(Déf. Pos.) $\qquad \boxed{\forall x \in E - \{0\}, \qquad Q(x) = \phi(x,x) > 0.}$

Dans ce cas, on dit que ϕ est un produit scalaire **hilbertien** et on note souvent $\phi(x,y) = (x \mid y)$.

Remarquons que si Q (ou ϕ) est définie positive, elle est non-dégénérée : en effet, si $x \in N(\phi)$, on a $0 = \phi(x,y)$ pour tout $y \in E$, en particulier $\phi(x,x) = 0$, d'où $x = 0$.

(2) Dans ce cas, on dit que : « *E, muni de* $(\ \mid\ )$ » (ou que : « *le couple* (E,ϕ) ») est un **espace hilbertien**. Pour abréger, on écrira souvent : « Soit E un espace hilbertien », sans préciser le produit scalaire $(\ \mid\ )$, celui-ci étant sous-entendu.

Exemple 4.3.2. — Le produit scalaire hilbertien standard sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$(x \mid y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} \qquad \text{si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Pour ce produit scalaire, la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i \mid e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon, et la forme quadratique hermitienne associée est $Q(x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$.

***Définition et proposition 4.3.3* (Familles et bases orthonormées)**

Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace hilbertien.

(1) *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs est dite* **orthonormée** *si $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

(2) *Supposons E de dimension n. Une* **base orthonormée** *est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est une famille orthonormée, i.e. qui vérifie $(e_i \mid e_i) = 1$ et $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.*

(3) *Toute famille orthonormée est libre. En particulier, si $\dim E = n$, toute famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de cardinal n est une base orthonormée de E.*

(4) *Dans la suite, on abrégera souvent « base orthonormée » en : b.o.n.*

Démonstration. — Prouvons (3). Supposons qu'on ait une relation $0 = t_1 e_{i_1} + \cdots + t_p e_{i_p}$, avec $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts, et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Fixons un indice $r \in \{1, \dots, p\}$ et appliquons $(e_{i_r} \mid\ )$ à l'égalité précédente. Comme $(e_{i_r} \mid e_{i_s}) = 0$ pour $s \neq r$, on obtient $0 = t_r(e_{i_r} \mid e_{i_r}) = t_r$, d'où $t_r = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre. □

***Théorème 4.3.4* (Existence de b.o.n.).** — *Soit E un espace hilbertien de dimension n. Alors E admet une base orthonormée*

Démonstration. — D'après le théorème 4.1.12, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthogonale (i.e. $(e_i \mid e_j) = 0$ pour $i \neq j$) et telle que $(e_i \mid e_i) \in \{1, -1, 0\}$; or comme $(\ \mid\ )$ est défini positif on a nécessairement $(e_i \mid e_i) = 1$, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. □

***Définition 4.3.5* (Sous-espaces d'un espace hilbertien).** — Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace hilbertien et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction $(\ |\ )_F$ de $(\ |\ )$ à F est un produit scalaire hilbertien sur F, puisque $(x \mid x)_F = (x \mid x) > 0$ pour tout $x \in F - \{0\}$. Donc F muni de $(\ |\ )_F$ est un espace hilbertien.

***Théorème et définition 4.3.6* (Projection orthogonale sur un sous-espace)**

Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace hilbertien et soient F un sous-espace et $F^\perp$ son orthogonal pour $(\ |\ )$.

(1) *On a $\boxed{E = F \oplus F^\perp.}$ Le projecteur $\pi_F : E \to E$, d'image F et de noyau $F^\perp$, défini par cette décomposition s'appelle la* **projection orthogonale** *sur F.*

(2) *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base* **orthonormée** *de F. Alors $\boxed{\pi_F(v) = (v \mid e_1)e_1 + \cdots + (v \mid e_r)e_r}$ pour tout $v \in E$.*

(3) *On a $\boxed{(F^\perp)^\perp = F}$ donc la projection orthogonale $\pi_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ n'est autre que $\mathrm{id}_E - \pi_F$, i.e. on a $\boxed{\mathrm{id}_E = \pi_F + \pi_{F^\perp}.}$*

Démonstration. — Comme les formes hermitiennes $(\ \mid\ )$ et $(\ \mid\ )_F$ sont définies positives, donc non-dégénérées, on a $(F^\perp)^\perp = F$ et $E = F \oplus F^\perp$ d'après 4.1.10. Alors, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^\perp$, et le projecteur π_F sur F parallèlement à $F^\perp$ (i.e. de noyau $F^\perp$) est défini par $\pi_F(x) = f$. De plus, comme $(F^\perp)^\perp = F$, alors le projecteur $\pi_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ parallèlement à $(F^\perp)^\perp = F$ (i.e. de noyau F) est défini par $\pi_{F^\perp}(x) = g$, donc on a bien $\mathrm{id}_E = \pi_F + \pi_{F^\perp}$. Ceci prouve (1) et (3).

Prouvons (2). Soit $r = \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_r)$ une b.o.n. de F. Pour tout $v \in E$, notons provisoirement

$$\pi(v) = (v \mid e_1)\, e_1 + \cdots + (v \mid e_r)\, e_r \in F.$$

Alors, pour $j = 1, \dots, r$, on a $(v - \pi(v) \mid e_j) = (v \mid e_j) - \sum_{i=1}^r (v \mid e_i) \underbrace{(e_i \mid e_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j \\ =0 \text{ si } i\neq j}} = 0$, d'où $v - \pi(v) \in F^\perp$, et donc $v = \pi(v) + v - \pi(v)$, avec $\pi(v) \in F$ et $v - \pi(v) \in F^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, ceci entraîne que $\pi(v) = \pi_F(v)$, d'où l'assertion (2). □

***Définition 4.3.7* (Normes).** — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une **norme** $\|\cdot\|$ sur E est une application $E \to \mathbb{R}_+$, $v \mapsto \|v\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
(2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $v \in E$, on a $\|zv\| = |z| \cdot \|v\|$ (où $|z|$ est le module de z).
(3) (Inégalité triangulaire) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$.

***Théorème 4.3.8* (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme hilbertienne)**

Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace hilbertien et soit $Q(x) = (x \mid x)$ la forme quadratique hermitienne associée.

(1) *On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\text{(CS)} \qquad \boxed{\forall x, y \in E \qquad |(x \mid y)|^2 \leq Q(x)Q(y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

(2) *Par conséquent, l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme sur E, appelée la* **norme hilbertienne** *associée à $(\ |\ )$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se récrit comme suit :*

$$\text{(CS)} \qquad \boxed{\forall x, y \in E \qquad |(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.}$$

Démonstration. — (1) Soient $x, y \in E$. L'inégalité est trivialement vérifiée si $x = 0$, donc on peut supposer $x \neq 0$. Considérons alors le vecteur

$$v = y - \frac{(y \mid x)}{(x \mid x)} x$$

(c'est la projection orthogonale de y sur l'hyperplan $(\mathbb{C}x)^\perp$. Comme $\overline{(y \mid x)} = (x \mid y)$, on a :

$$0 \leq (v \mid v) = (y \mid y) - \frac{(y \mid x)}{(x \mid x)}(x \mid y) \underbrace{- \frac{(x \mid y)}{(x \mid x)}(y \mid x) + \frac{(y \mid x)(x \mid y)}{(x \mid x)^2}(x \mid x)}_{=0}$$

donc, multipliant par $(x \mid x) > 0$, on obtient que $0 \leq (x \mid x)\,(v \mid v) = (y \mid y)\,(x \mid x) - |(x \mid y)|^2$. Ceci prouve l'inégalité voulue, et montre que l'on a égalité si et seulement $(v \mid v) = 0$, c.-à-d., si $v = 0$, i.e. si $y = \dfrac{(y \mid x)}{(x \mid x)} x$. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons que $v \mapsto \|v\| = \sqrt{(v \mid v)}$ est une norme sur E. Comme $(\ |\ )$ est défini positif, on a $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$. D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, on a $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ et donc

$$\|z\, v\| = \sqrt{z\overline{z}\,(v \mid v)} = |z| \cdot \|v\|.$$

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,;$$

alors, multipliant par 2 et ajoutant $\|x\|^2 + \|y\|^2$ aux deux membres, on obtient

$$(\dagger) \qquad \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x \mid y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

D'autre part, d'après les égalités de polarisations 4.1.4, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathscr{R}\big((x \mid y)\big).$$

Or, pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a : $\mathscr{R}(z) = a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. On obtient donc

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x \mid y)|$$

ce qui, combiné avec $(\dagger)$, entraîne :

$$\|x + y\|^2 \leq \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. $\square$

Récrivons les égalités de polarisation 4.1.4 en utilisant la norme $\|\cdot\|$, et ajoutons-y l'égalité de Pythagore :

***Proposition 4.3.9* (Polarisation).** — *Soit E, muni de $(\ |\ )$, un espace hilbertien et soit $\|\cdot\|$ la norme hilbertienne associée.*

a) *Pour tout* $x, y \in E$, *on a :*

$$\mathscr{R}\big((x \mid y)\big) = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \tag{1}$$

$$\mathscr{I}\big((x \mid y)\big) = \frac{1}{2}\big(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big) \tag{2}$$

$$4\,(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2. \tag{3}$$

b) Égalité de Pythagore) *Si* $x_1, \dots, x_n$ *sont orthogonaux, on a* $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.

Démonstration. — La première assertion n'est qu'une reformulation de 4.1.4. L'égalité de Pythagore est immédiate si $n = 2$, et dans ce cas on a même la réciproque : si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ alors $(x_1 \mid x_2) = 0$. L'égalité pour n vecteurs orthogonaux s'obtient par récurrence sur n. On prendra garde que la réciproque est fausse pour $n \geq 3$: prendre par exemple dans $\mathbb{C}^2$ hilbertien les vecteurs $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 + e_2$, $x_3 = e_2 - e_1$. □

***Définition et proposition 4.3.10* (Isométries vectorielles).** — *Soient* E, F *deux espaces hilbertiens de même dimension* n, *notons* $(\ \mid\ )_E$ *et* $\|\cdot\|_E$ *(resp.* $(\ \mid\ )_F$ *et* $\|\cdot\|_F$*) le produit scalaire et la norme hilbertienne sur* E *(resp.* F*). Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire.*

(1) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f préserve la norme :* $\boxed{\forall x \in E, \quad \|x\|_E = \|f(x)\|_F}$

(b) *f préserve le produit scalaire :* $\boxed{\forall x, y \in E, \quad (x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F}$

(c) *Pour toute b.o.n.* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E, *la famille* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est une b.o.n. de* F.

(d) *Il existe une b.o.n.* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E *telle que* $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *soit une b.o.n. de* F.

(2) *Sous ces conditions, on dit que f est une* **isométrie** *vectorielle de E sur F*

(3) *Dans ce cas, f est bijective, et son inverse* f^{-1} *est aussi une isométrie.*

Démonstration. — Supposons que f préserve la norme, et soient $x, y \in E$. Alors $\|x+y\|_E^2 = \|f(x+y)\|_F^2 = \|f(x) + f(y)\|_F^2$, et le premier (resp. dernier) membre égale :

$$\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2\mathscr{R}\big((x \mid y)_E\big), \qquad \text{resp.} \qquad \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2\mathscr{R}\big((f(x) \mid f(y))_F\big)$$

et comme $\|x\|_E^2 = \|f(x)\|_F^2$ et $\|y\|_E^2 = \|f(y)\|_F^2$, on obtient que $\mathscr{R}\big((x \mid y)_E\big) = \mathscr{R}\big((f(x) \mid f(y))_F\big)$.

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathscr{I}(z) = \mathscr{R}(-iz)$. Donc, appliquant ce qui précède à iy au lieu de y, on obtient aussi l'égalité :

$$\mathscr{I}\big((x \mid y)_E\big) = \mathscr{R}\big((x \mid iy)_E\big) = \mathscr{R}\big((f(x) \mid f(iy))_F\big) = \mathscr{R}\big((f(x) \mid if(y))_F\big) = \mathscr{I}\big((f(x) \mid f(y))_F\big),$$

d'où finalement $(x \mid y)_E = (f(x) \mid f(y))_F$. Ceci prouve que (a) ⇒ (b).

Les implications (b) ⇒ (c) ⇒ (d) sont évidentes, montrons que (d) ⇒ (a). Supposons (d) vérifiée. Pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ dans E, on a $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$ et, comme $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ sont des b.o.n., on obtient

$$\|x\|_E^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|f(x)\|_F^2$$

donc (a) est vérifiée. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons (3). Soit $f : E \to F$ une isométrie, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Comme $f(\mathscr{B})$ est un b.o.n. (donc une base) de F, alors f est bijective. Son inverse f^{-1} envoie la b.o.n. $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ de F sur la b.o.n. $\mathscr{B}$ de E, donc f^{-1} est une isométrie. Ceci prouve (3). La proposition est démontrée. □

Terminologie 4.3.10.1. — On a introduit la terminologie isométrie « vectorielle » pour faire la distinction avec la notion d'isométrie « affine », étudiée au Chap. 6. Dans la suite de ce chapitre, comme on ne considère que des applications linéaires, on dira simplement « isométrie » au lieu de « isométrie vectorielle ».

Définition et corollaire 4.3.11. — (1) *On dit que deux espaces hilbertiens* E *et* E' *sont* **isométriques** *s'il existe une isométrie* $f : E \xrightarrow{\sim} E'$.

(2) *Tout espace hilbertien* E *de dimension* n *est isométrique à* $\mathbb{C}^n$ *muni du produit scalaire hilbertien standard.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire standard. D'après le théorème 4.3.4, E admet une b.o.n. $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Alors l'application linéaire $u : \mathbb{C}^n \to E$ définie par $u(e_i) = f_i$, pour $i = 1, \dots, n$, est une isométrie de $\mathbb{C}^n$ sur E. $\square$

Définition 4.3.12. — On note $\mathrm{U}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tA\,\overline{A} = I_n\}$. Remarquons que l'égalité ${}^tA\,\overline{A} = I_n$ équivaut à l'égalité $\overline{{}^tA}\,A = I_n$, qui entraîne que A est inversible et $A^{-1} = \overline{{}^tA}$. Donc $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et, si $A \in \mathrm{U}(n)$, son inverse $B = A^{-1} = \overline{{}^tA}$ vérifie $B^{-1} = A = \overline{{}^tB}$, donc appartient aussi à $\mathrm{U}(n)$. De plus, pour tout $A, B \in \mathrm{U}(n)$, on a l'égalité ${}^t(AB)\overline{AB} = {}^tB\,{}^tA\,\overline{A}\,\overline{B} = {}^tB\,\overline{B} = I_n$, donc $AB \in \mathrm{U}(n)$. Donc $\mathrm{U}(n)$ est un *sous-groupe* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, appelé le **groupe unitaire**.

Munissons $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hilbertien standard $(\ \mid\ )$. Pour tout $X, Y \in \mathbb{C}^n$ on a $(X \mid Y) = {}^tX\overline{Y}$, i.e. la matrice de $(\ \mid\ )$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice identité I_n. Donc une matrice arbitraire $A \in M_n(\mathbb{C})$ préserve le produit scalaire si et seulement si, on a, pour tout $X, Y \in \mathbb{C}^n$:

$$ {}^tX\overline{Y} = (X \mid Y) = (AX \mid AY) = {}^tX\,({}^tA\overline{A})\,Y $$

ce qui équivaut à dire que ${}^tA\overline{A} = I_n$ (cf. 4.1.6). Ceci montre que $\mathrm{U}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{C}^n$ muni produit scalaire hilbertien standard $(\ \mid\ )$.

De plus, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (i.e. C_i est le vecteur $Ae_i \in \mathbb{C}^n$). Remarquons que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (i, j) de ${}^tA\overline{A}$ est le produit matriciel de la i-ème ligne de ${}^tA$, i.e. de ${}^tC_i$, par la colonne $\overline{C_j}$, c.-à-d., on a $({}^tA\overline{A})_{ij} = (Ae_i \mid Ae_j)$, donc la condition ${}^tA\overline{A} = I_n$ équivaut aussi à dire que les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales. Tenant compte de la proposition 4.3.10, on obtient donc les caractérisations suivantes de $\mathrm{U}(n)$, chacune étant utile :

***Proposition 4.3.13* (Groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$).** — *On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hilbertien standard $(\ \mid\ )$ et l'on note $\|\cdot\|$ la norme hilbertienne associée. Alors $\mathrm{U}(n)$ est le groupe des isométries de $\mathbb{C}^n$; il est caractérisé par* chacune *des égalités suivantes :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tA\overline{A} = I_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{{}^tA}\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid (AX \mid AY) = (X \mid Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|AX\| = \|X\|, \quad \forall X \in \mathbb{C}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid (Af_1, \dots, Af_n) \text{ est une b.o.n., pour } \underline{\text{toute}} \text{ b.o.n. } (f_1, \dots, f_n)\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid (Ae_1, \dots, Ae_n) \text{ est une b.o.n., où } (e_1, \dots, e_n) \text{ est la base canonique de } \mathbb{C}^n\} \\
&= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{les colonnes de } A \text{ sont de norme 1 et deux à deux orthogonales}\}
\end{aligned}
$$

Les éléments de $\mathrm{U}(n)$ *sont appelés* « endomorphismes unitaires ».

Remarque 4.3.14. — Il existe *d'autres* groupes unitaires (qui ne sont isomorphes à aucun $\mathrm{U}(n)$). Soient p, q des entiers ≥ 1 et soit ϕ la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^{p+q}$ définie par $\phi(X, Y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{q} x_i y_i$, i.e. la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{C}^{p+q}$ est $J = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \mathbf{0}_{p,q} \\ \hline \mathbf{0}_{q,p} & -I_q \end{array}\right)$. Alors

$$ \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tAJA = J\} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \phi(AX, AY) = \phi(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n\} $$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, noté $\mathrm{U}(p, q)$. On ne considérera pas ces groupes dans ce cours.

4.4. Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints et normaux

Commençons par introduire l'adjoint dans le cas général d'une forme hermitienne non dégénérée, même si on se limitera dans la suite au cas hilbertien.

***Théorème et définition 4.4.1* (Adjoint d'un endomorphisme).** — *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et ϕ une forme hermitienne sur E,* **non dégénérée**.

(1) *Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$ (*) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)).} $$

(2) *Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, si l'on note $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a*

$$ (**) \qquad \boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = \overline{J^{-1}\,{}^tA\,J}.} $$

(3) *On a $(u^*)^* = u$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe u^* vérifiant $(*)$ et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $J = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*)$. Soient $x, y \in E$ arbitraires, et notons $X, Y \in \mathbb{C}^n$ les vecteurs colonnes associés (coordonnées dans la base $\mathscr{B}$). Alors on a

$$ {}^tX\,{}^tAJ\overline{Y} = \phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y)) = {}^tXJ\overline{A^*Y} = {}^tXJ\overline{A^*}\,\overline{Y} $$

d'où ${}^tAJ = J\overline{A^*}$ et donc, puisque J est inversible (car ϕ non-dégénérée), $A^* = \overline{J^{-1}}\,{}^t\overline{A}\,\overline{J}$. Ceci montre que u^*, s'il existe, vérifie $(**)$ et est donc unique.

Réciproquement, si l'on note u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A^* = \overline{J^{-1}}\,{}^t\overline{A}\,\overline{J}$, alors pour tout x, y on a :

$$ \phi(x, u^*(y)) = {}^tXJ\overline{A^*Y} = {}^tX\,{}^tA\,J\overline{Y} = \phi(u(x), y) $$

donc u^* vérifie $(*)$. Ceci prouve les assertions (1) et (2).

Prouvons l'assertion (3). Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$ (u^*(x) \mid y) = \overline{(y \mid u^*(x))} = \overline{(u(y) \mid x)} = (x \mid u(y)) $$

et ceci montre que u est l'adjoint de u^*, i.e. $u = (u^*)^*$. Le théorème est démontré. □

Remarque 4.4.2. — Il résulte de la formule $(**)$ (ou directement de la définition $(*)$) que, pour tout $u, v \in \mathrm{End}(E)$ et $s, t \in \mathbb{C}$, on a $(s\,u + t\,v)^* = \overline{s}\,u^* + \overline{t}\,v^*$, i.e. l'application $\mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, $u \mapsto u^*$ est semi-linéaire.

Remarquons aussi que si ϕ est un produit scalaire hilbertien et si $\mathscr{B}$ est une b.o.n., alors la matrice de ϕ dans $\mathscr{B}$ est $J = I_n$. On peut donc énoncer le théorème dans le cas hilbertien sous la forme suivante.

***Théorème 4.4.3* (Adjoint d'un endomorphisme dans le cas hilbertien)**

Soit E muni de $(\ \mid\ )$ un espace **hilbertien** *de dimension n. Pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* de E, appelé* **l'adjoint** *de u, vérifiant :*

$$ (*) \qquad \forall x, y \in E, \qquad \boxed{(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)).} $$

Pour toute **b.o.n.** *$\mathscr{B}$ de E, si l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, on a*

$$ (**) \qquad \boxed{A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^t\overline{A}.} $$

***Lemme 4.4.4* (Stabilité par u ou u^*).** — *Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace* **hilbertien** *de dimension n, $u \in \mathrm{End}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E, et $F^\perp$ son orthogonal pour $(\ \mid\ )$. Alors : F est stable par u (i.e. $u(F) \subseteq F$) si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.*

Démonstration. — Supposons $u(F) \subseteq F$, et soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a :

$$ (x \mid u^*(y)) = (u(x) \mid y) = 0 $$

(la dernière égalité puisque $u(x) \in F$ et $y \in F^\perp$), et ceci montre que $u^*(y) \in F^\perp$. On a donc $u^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$.

Réciproquement, supposons $u^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$. Comme $(F^\perp)^\perp = F$ et $(u^*)^* = u$, d'après 4.3.6 et 4.4.1, on obtient que $u(F) \subseteq F$, d'après ce qui précède. □

***Définitions 4.4.5* (Endomorphismes normaux et auto-adjoints).** — Soit E un espace **hilbertien** de dimension n et soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

(1) On dit que u est **auto-adjoint** (ou *hermitien*) si $u^* = u$.
(2) On dit que u est un endomorphisme **unitaire** s'il est inversible et $u^{-1} = u^*$ (cf. 4.3.13).
(3) On dit que u est un endomorphisme **anti-hermitien** si $u^* = -u$.
(4) Enfin, on dit que u est un endomorphisme **normal** s'il **commute à son adjoint** u^*, i.e. si l'on a $u\,u^* = u^*\,u$. Ceci englobe les trois cas précédents.

Rappelons et complétons la définition 4.1.5 :

***Définition 4.4.6* (Matrices hermitiennes ou anti-hermitiennes).** — Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **anti-hermitienne** (resp. *hermitienne*, cf. 4.1.5) si $\boxed{{}^t\overline{A} = -A}$ (resp. si ${}^t\overline{A} = A$).

Observons que si A est une matrice *anti-hermitienne* (resp. hermitienne), ses coefficients diagonaux a_{ii} vérifient $\overline{a_{ii}} = -a_{ii}$ (resp. $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$) donc sont *imaginaires purs* (resp. réels).

***Théorème 4.4.7* (Diagonalisation des endomorphismes normaux)**

Soient E muni de $(\ \mid\ )$ un espace hilbertien de dimension n, et u un endomorphisme normal. Alors, u est diagonalisable et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Par conséquent, il existe une b.o.n. de E formée de vecteurs propres de u.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $n = \dim E$. C'est ok si $n = 1$, donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour $n-1$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique $P_u(X)$ admet au moins une racine λ dans $\mathbb{C}$, et λ est valeur propre de u. Soit V_λ l'espace propre associé, il est **stable par** u^* : en effet, comme u et u^* commutent, on a, pour tout $x \in V_\lambda$:

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda\, u^*(x), \qquad \text{d'où} \qquad u^*(x) \in V_\lambda.$$

Donc, d'après le lemme 4.4.4, l'orthogonal $G = V_\lambda^\perp$ est stable par u et par u^*. D'autre part, d'après 4.1.10, on a $E = V_\lambda \oplus G$ et $\dim G = \dim E - \dim V_\lambda < \dim E$.

Notons u_G (resp. u_G^*) la restriction de u (resp. u^*) à G, alors pour tout $x, y \in G$, on a $u_G(x) = u(x)$ et $u_G^*(y) = u^*(y)$ et donc :

$$(u_G(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)) = (x \mid u_G^*(y))$$

ce qui montre que l'adjoint de u_G est la restriction de u^* à G. Comme u et u^* commutent, il en est de même de leurs restrictions à G, i.e. u_G est un endomorphisme normal de $G = V_\lambda^\perp$. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_{V_\lambda^\perp}$ est diagonalisable, et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Comme $E = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, on obtient la même conclusion pour u. Ceci prouve qu'il existe une b.o.n. $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u.

Il en résulte que les espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux : en effet, soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de u et $V_1, \dots, V_p$ les espaces propres associés. Alors $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ et donc, notant $d_q = \dim V_q$ pour $q = 1, \dots, p$, on a :

$$n = d_1 + \cdots + d_p. \tag{1}$$

Pour chaque $q = 1, \dots, p$, soit d'_q le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que le coefficient diagonal λ_i de $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ égale μ_q (i.e. $u(e_i) = \mu_q e_i$) et soit V'_q le sous-espace de V_q engendré ces e_i ; comme les e_i sont linéairement indépendants et comme V'_q est un sous-espace de V_q, on a :

$$d'_q = \dim V'_q \leq d_q. \tag{2}$$

D'une part, comme chaque e_i appartient à un V'_q et à un seul, on a :

$$n = d'_1 + \cdots + d'_p. \tag{3}$$

Il en résulte que, pour chaque q, l'inégalité $d'_q \leq d_q$ est une égalité, d'où $V'_q = V_q$. Ceci montre que chaque V_q est engendré par les éléments $e_i \in \mathscr{B}$ qu'il contient. Comme les e_i sont deux à deux orthogonaux, on en déduit que V_q et $V_{q'}$ sont orthogonaux si $q \neq q'$. Ceci achève la démonstration du théorème. □

On en déduit, en particulier, le théorème suivant.

***Théorème 4.4.8* (Diagonalisation des matrices hermitiennes, unitaires, ou anti-hermitiennes)**
On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hilbertien standard. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

(1) *Si A est* **hermitienne** *(i.e. ${}^t\overline{A} = A$, alors A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, i.e. il existe $P \in \mathrm{U}(n)$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit une matrice diagonale. De plus, les valeurs propres de A sont* **réelles**.

(2) *Si A est* **unitaire** *(i.e. si $A \in U(n)$), alors A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, i.e. il existe $P \in \mathrm{U}(n)$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit une matrice diagonale. De plus, les valeurs propres de A sont des nombres complexes* **de module** 1.

(3) *Si A est* **anti-hermitienne** *(i.e. ${}^t\overline{A} = -A$), alors A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, i.e. il existe $P \in \mathrm{U}(n)$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit une matrice diagonale. De plus, les valeurs propres de A sont* **imaginaires pures**.

Démonstration. — Dans chaque cas, l'assertion « A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ » découle du théorème précédent. Comme la base canonique $\mathscr{B}_0$ est elle-même orthonormée, la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ appartient à $\mathrm{U}(n)$, d'où la 2ème assertion. Reste à voir l'assertion concernant les valeurs propres. On a

$$\overline{D} = {}^t\overline{D} = {}^t\overline{P}\,{}^t\overline{A}\,{}^t\overline{P^{-1}} = P^{-1}\,{}^t\overline{A}\,P = \begin{cases} P^{-1}AP = D & \text{si } A \text{ est hermitienne} \\ P^{-1}A^{-1}P = D^{-1} & \text{si } A \text{ est unitaire} \\ -P^{-1}AP = -D & \text{si } A \text{ est anti-hermitienne.} \end{cases}$$

Il en résulte que les termes diagonaux λ_i de D vérifient, respectivement, $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$ (resp. $= \lambda_i^{-1}$, resp. $= -\lambda_i$), donc sont réels (resp. de module 1, resp. imaginaires purs). Le théorème est démontré. □

Remarque 4.4.9. — Le point (1) du théorème précédent fournit une autre démonstration de la proposition 2.2.8 et donc du théorème 2.2.6.

4.5. Forme normale des éléments de $\mathrm{O}(n)$

On a décrit au Chap. 6 les éléments de $\mathrm{O}(2)$ et $\mathrm{O}(3)$. On va voir maintenant la « forme normale » (= une matrice aussi simple que possible) des éléments de $\mathrm{O}(n)$, pour $n \geq 3$ arbitraire. On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

***Théorème 4.5.1* (Forme normale des éléments de $\mathrm{O}(n)$).** — *Soient $A \in \mathrm{O}(n)$ et f l'endomorphisme de $V = \mathbb{R}^n$ associé à A. Notons $V_+ = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ (resp. $V_- = \mathrm{Ker}(A + I_n)$) l'espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1) et $p = \dim V_+$, $q = \dim V_-$. Alors il existe des bases orthonormées $\mathscr{B}_+ = (x_1, \dots, x_p)$ de V_+, $\mathscr{B}_- = (y_1, \dots, y_q)$ de V_-, et $\mathscr{C} = (v_1, u_1, \dots, v_r, u_r)$ de $E = (V_+ \oplus V_-)^\perp$, et $\theta_1, \dots, \theta_r \in\,]-\pi, \pi[-\{0\}$ telles que, notant $\mathscr{B}$ la base orthonormée $\mathscr{B}_+ \cup \mathscr{B}_- \cup \mathscr{C}$ de V et P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) \in \mathrm{O}(n)$, on ait*

$$P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & R(\theta_r) \end{array}\right).$$

où $R(\theta)$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$. (En particulier, $\dim E = 2r$ est paire). De plus, $\theta_1, \dots, \theta_r \in\,]-\pi, \pi[-\{0\}$ sont uniques au signe près.

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.5.2. — *Soit u une isométrie de l'espace euclidien V, et soit F un sous-espace vectoriel stable par u, i.e. $u(F) \subseteq F$. Alors :*

(1) *On a $u(F) = F$ et donc $u^{-1}(F) = F$.*
(2) *On a $u(F^\perp) = F^\perp = u^{-1}(F^\perp)$.*

Démonstration. — D'abord l'isométrie u est bijective (cf. 2.1.10), donc en particulier injective, donc $u(F)$ a même dimension que F. Par conséquent, l'inclusion $u(F) \subseteq F$ entraîne $u(F) = F$, d'où aussi $F = u^{-1}(F)$. Ceci prouve (1). Le même argument montre que, pour prouver (2), il suffit de prouver que $u(F^\perp) \subseteq F^\perp$. Soient $y \in F^\perp$ et $x \in F$, comme u est une isométrie, on a

$$(u(y) \mid x) = (y \mid u^{-1}(x)) = 0,$$

la 2ème égalité puisque $u^{-1}(x) \in F$ d'après (1). Ceci montre que $u(y) \in F^\perp$, d'où l'assertion (2). □

Démonstration. — Commençons maintenant la démonstration du théorème 4.5.1. Comme $V_+ \oplus V_-$ est stable par f alors, d'après le lemme, il en est de même de $E = (V_+ \oplus V_-)^\perp$. Notons f_E la restriction de f à E. Alors 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de f_E, puisque $\mathrm{Ker}(f_E - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_V) \cap E = V_+ \cap E = \{0\}$ et de même $\mathrm{Ker}(f_E + \mathrm{id}_E) = V_- \cap E = \{0\}$.

Soit $\mathscr{B}_+$ (resp. $\mathscr{B}_-$) une b.o.n. de V_+ (resp. V_-). D'après 2.4.3, on sait que V_+ et V_- sont orthogonaux, et que les valeurs propres réelles de f ne peuvent être que 1 et -1. Donc, d'une part, $\mathscr{B}_+ \cup \mathscr{B}_-$ est une b.o.n. de $V_+ \oplus V_-$ et, d'autre part, f_E n'a pas de valeurs propres réelles. Or, on a le lemme suivant :

Lemme 4.5.3. — *Soit W un espace euclidien de dimension $m > 0$, et soit f une isométrie de W n'ayant pas de valeurs propres réelles (i.e. telle que 1 et -1 ne soient pas valeurs propres de f). Alors il existe deux vecteurs* **unitaires et orthogonaux** *u et v et $\theta \in\,]-\pi, \pi[-\{0\}$ tels que :*

$$f(u) = \cos(\theta)\, u - \sin(\theta)\, v, \qquad f(v) = \sin(\theta)\, u + \cos(\theta)\, v$$

i.e. le plan $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est stable par f et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f_P) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{(v,u)}(f_P) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $\dim W \geq 2$.

Admettons pour le moment ce lemme, et achevons la démonstration du théorème 4.5.1. D'après le lemme précédent, il existe dans E un plan P_1 stable par f, une b.o.n. $\mathscr{C}_1 = (v_1, u_1)$ de P_1 et $\theta_1 \in \,]-\pi, \pi[-\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1}(f) = R(\theta_1)$. Notons E_1 l'orthogonal de P_1 dans E, i.e. :

$$E_1 = \{x \in E \mid (x \mid y) = 0, \quad \forall y \in P_1\}.$$

D'après le lemme 4.5.2, E_1 est stable par f. Bien sûr, la restriction f_{E_1} de f à E_1 n'a pas de valeurs propres réelles (puisque f n'en avait pas) donc on peut à nouveau appliquer le lemme 4.5.3 : il existe dans E_1 un plan P_2 stable par f, une b.o.n. $\mathscr{C}_2 = (v_2, u_2)$ de P_2 et $\theta_2 \in \,]-\pi, \pi[-\{0\}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(f) = R(\theta_2)$. Notons E_2 l'orthogonal de P_2 dans E_1. Si $E_2 \neq 0$, on peut recommencer… On obtient ainsi qu'il existe une b.o.n.

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{C}_r = (v_1, u_1, \ldots, v_r, u_r)$$

de E (en particulier, $\dim E = 2r$ est pair) et $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \,]-\pi, \pi[-\{0\}$ tels que

$$(*) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f_E) = \left(\begin{array}{c|c|c} R(\theta_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & R(\theta_r) \end{array}\right)$$

et alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_+ \cup \mathscr{B}_- \cup \mathscr{C}$ est un b.o.n. de V telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ ait la forme indiquée. Ceci prouve l'existence.

Montrons l'unicité au signe près de $\theta_1, \ldots, \theta_r$, i.e. montrons l'unicité des paires $\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r$. Comme le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ est

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

alors $(*)$ ci-dessus montre que le polynôme caractéristique de f_E est $\prod_{s=1}^{r}\Big((X - e^{i\theta_s})(X - e^{-i\theta_s})\Big)$ et que ses racines dans $\mathbb{C}$ sont :

$$e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_r}, e^{-i\theta_r},$$

et donc $\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r$ sont uniquement déterminés. Enfin, en général on ne peut pas faire mieux que de déterminer les θ_s au signe près, puisque dans la base (u_s, v_s) la matrice de f_{P_s} est $R(-\theta_s)$. Ceci achève la démonstration du théorème 4.5.1, modulo la démonstration du lemme 4.5.3. □

Avant de démontrer le lemme 4.5.3, faisons les remarques suivantes.

Remarques 4.5.4. — (1) En dimension 2, on détermine le signe de θ en choisissant une orientation de E, donnée par le choix d'une b.o.n. $\mathscr{B}_0$ de E. Alors pour toute b.o.n. $\mathscr{B}$ directe (i.e. telle que $\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = 1$), on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$ (cf. 2.4.14).

(2) De même, en dimension 3, on choisit l'orientation de $\mathbb{R}^3$ donnée par la base canonique $\mathscr{B}_0$. Si $f \in \mathrm{SO}(3)$ et $f \neq \mathrm{id}$, alors f possède un « axe de rotation » $D = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ qui est une droite vectorielle ; on oriente D en choisissant un vecteur unitaire $u \in D$. Ayant fait ces choix, « l'angle de rotation » θ est uniquement déterminé par la condition que pour toute b.o.n. (v_1, v_2) du plan $P = D^\perp$ telle que la b.o.n. (v_1, v_2, u) de $\mathbb{R}^3$ soit directe, on a $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2)}(f_P) = R(\theta)$ (cf. 2.4.18).

(3) *Attention* ! En dimension paire ≥ 4, une rotation ne possède pas nécessairement d'« axe de rotation », i.e. on peut avoir $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \{0\}$, c'est le cas par exemple pour

$$f = \left(\begin{array}{c|c} R(\theta_1) & 0 \\ \hline 0 & R(\theta_2) \end{array}\right) \in O(4)$$

avec $\theta_1, \theta_2 \in \,]-\pi, \pi[-\{0\}$.

Démonstration. — Démontrons maintenant le lemme 4.5.3. Fixons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ de W, ce qui permet d'identifier W à $\mathbb{R}^m$ et f à la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in M_m(\mathbb{R})$. On plonge $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{C}^m$, c.-à-d., on écrit :

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m \mid x_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Alors, tout $w = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ s'écrit de façon unique

$$w = u + iv \qquad \text{avec} \qquad u, v \in \mathbb{R}^m \ : \quad \text{on a} \quad \begin{cases} u = (x_1, \ldots, x_m) & \text{avec } x_j = \mathscr{R}(z_j) \\ v = (y_1, \ldots, y_m) & \text{avec } y_j = \mathscr{I}(z_j). \end{cases}$$

On notera $\boxed{u = \mathscr{R}(w)}$ et $\boxed{v = \mathscr{I}(w).}$ Si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), alors λw est le vecteur :

$$(1) \qquad (a + ib)(u + iv) = \underbrace{(au - bv)}_{\in\mathbb{R}^m} + i\underbrace{(bu + av)}_{\in\mathbb{R}^m}.$$

Si l'on note $\overline{w}$ le vecteur $u - iv$, on a donc

$$\overline{\lambda}\overline{w} = (a - ib)(u - iv) = \underbrace{(au - bv)}_{\in \mathbb{R}^m} - i\underbrace{(bu + av)}_{\in \mathbb{R}^m} = \overline{\lambda w}. \tag{2}$$

Plus généralement, si $B \in M_m(\mathbb{R})$, alors les vecteurs Bu et Bv appartiennent encore à $\mathbb{R}^m$, et l'on a :

$$Bw = B(u + iv) = Bu + iBv \qquad \text{et} \qquad B\overline{w} = B(u - iv) = Bu - iBv = \overline{Bw}. \tag{3}$$

Appliquons ce qui précède dans le cas suivant. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ une valeur propre de A, et soit $w \in \mathbb{C}^m$ un vecteur propre associé. Écrivons $w = u + iv$, avec $u, v \in \mathbb{R}^m$. Alors

$$Au + iAv = Aw = \lambda w = (au - bv) + i(bu + av) \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av. \end{cases} \tag{4}$$

D'autre part, d'après (2) et (3) on a :

$$A\overline{w} = \overline{Aw} = \overline{\lambda w} = \overline{\lambda}\overline{w} \tag{5}$$

donc $\overline{w}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $\overline{\lambda}$. Donc, puisque $\overline{\lambda} \neq \lambda$ (car $\lambda \notin \mathbb{R}$), les vecteurs propres w et $\overline{w}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Comme $w = u + iv$ et $\overline{w} = u - iv$, on en déduit que u, v sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ (sinon w et $\overline{w}$ seraient liés), donc a fortiori sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que le sous-espace vectoriel $P = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ de $\mathbb{R}^m$ est de dimension 2, et d'après (4) il est stable par f et l'on a :

$$\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f_P) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}_{(v,u)}(f_P) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Tout ce qui précède est valable pour une matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$ arbitraire, une valeur propre complexe non réelle $\lambda = a + ib$, et un vecteur propre $w = u + iv \in \mathbb{C}^m$ associé à λ.

Utilisons maintenant l'hypothèse additionnelle $A \in \mathrm{O}(m)$, i.e. ${}^tAA = I_m$. On étend le produit scalaire euclidien $(\ |\ )$ sur $\mathbb{R}^m$ en le produit scalaire hilbertien standard sur $\mathbb{C}^m$, qu'on notera $\langle\ |\ \rangle$, i.e.

$$\forall W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \forall Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m, \qquad \langle W \mid Z \rangle = {}^tW\overline{Z} = w_1\,\overline{z_1} + \cdots + w_m\overline{z}_m.$$

Remarquons d'abord que si $W, Z \in \mathbb{R}^m$, alors $\langle W \mid Z \rangle = (W \mid Z)$, i.e. la restriction à $\mathbb{R}^m$ de $\langle\ |\ \rangle$ coïncide avec le produit scalaire euclidien. De plus, si l'on écrit $W = U + iV$ et $Z = X + iY$, avec $U, V, X, Y \in \mathbb{R}^m$, alors $\langle W \mid Z \rangle$ égale :

$$\langle U + iV \mid X + iY \rangle = \langle U \mid X \rangle + \langle V \mid Y \rangle + i\Big(\langle V \mid X \rangle - \langle U \mid Y \rangle\Big) = (U \mid X) + (V \mid Y) + i\Big[(V \mid X) - (Y \mid Y)\Big].$$

D'autre part, comme $A = \overline{A}$ et ${}^tAA = I_m$, on a $A \in \mathrm{U}(m)$ et donc, pour tout $W, Z \in \mathbb{C}^m$:

$$\langle AW \mid AZ \rangle = \langle W \mid Z \rangle. \tag{7}$$

Soient λ, w comme plus haut, avec $Aw = \lambda w$. On a vu qu'on a aussi $A\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$, donc w et $\overline{w}$ appartiennent aux espaces propres V_λ et $V_{\overline{\lambda}}$, qui sont orthogonaux, d'après 4.4.8. Écrivant $w = u + iv$, avec $u, v \in \mathbb{R}^m$, on a donc :

$$0 = \langle u + iv \mid u - iv \rangle = (u \mid u) - (v \mid v) + 2i(u \mid v),$$

d'où $(u \mid v) = 0$ et $(u \mid u) = (v \mid v)$, donc $u, v \in \mathbb{R}^m$ sont orthogonaux et de même norme pour le produit scalaire euclidien. Remplaçant w par $\dfrac{1}{\|u\|}w$, on se ramène alors au cas où u, v sont orthogonaux et unitaires. Alors $\mathscr{C} = (v, u)$ est une base orthonormée du plan P, et d'après (6) on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f_P) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Enfin, comme f est une isométrie et n'a pas ± 1 comme valeurs propres, il en est de même de f_P, et donc $a^2 + b^2 = 1$ et il existe un unique $\theta \in\,]-\pi, \pi[- \{0\}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ (d'où $\lambda = e^{i\theta}$). Ceci achève la preuve du lemme 4.5.3 et donc du théorème 4.5.1. $\square$

4.6. Appendice (†) : espaces préhilbertiens réels ou complexes

Si E, muni de $(\ |\ )$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{R}$-espace vectoriel) de dimension infinie muni d'un produit scalaire hilbertien (resp. euclidien), on dit que E est un espace **préhilbertien** complexe (resp. réel). Dans ce cas on sait, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une *norme* sur E. On dit alors que E est un espace hilbertien complexe (resp. réel) s'il est **complet** pour cette norme, i.e. si toute suite de Cauchy converge (ceci est automatiquement vérifié lorsque E est de dimension finie).

Ces espaces jouent un rôle important en Analyse. Par exemple, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni du produit scalaire euclidien

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,,$$

est un espace préhilbertien réel. Il n'est pas complet pour la norme euclidienne $\|f\|_2 = \int_0^1 f^2(t)dt$, mais il se plonge dans l'espace $L^2([0,1],\mathbb{R})$ des (classes de) fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui sont de carré intégrable au sens de Lebesgue (i.e. f est mesurable et $\int_0^1 f^2(t)dt < \infty$), et $L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire euclidien

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,,$$

est un espace de Hilbert réel, i.e. il est complet pour la norme $\|f\|_2 = \int_0^1 f^2(t)dt$. (On parle ici de classes de fonctions, car on identifie deux fonctions f et g si elles coïncident en dehors d'un ensemble de mesure nulle, i.e. si $f - g$ est nulle presque partout.)

De même, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire hilbertien

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,,$$

est un espace préhilbertien complexe. Il n'est pas complet pour la norme hilbertienne $\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2dt$, mais il se plonge dans l'espace $L^2([0,1],\mathbb{C})$ des (classes de) fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ qui sont de carré intégrable au sens de Lebesgue, et $L^2([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire hilbertien

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,,$$

est un espace de Hilbert complexe, i.e. il est complet pour la norme $\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2dt$.