Feuille 4 : Géométrie vectorielle

Isométries vectorielles en dimension 2

Exercice 1. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Donner les matrices dans la base canonique des transformations suivantes :

- la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine,

- la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'origine,

- la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)$,

- la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1, -1)$.

Exercice 2. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Donner l'image des vecteurs de coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ et $(1, 2)$ par la réflexion orthogonale relativement à la droite dirigée par le vecteur $(1, 1)$.

Exercice 3. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. À quoi est égale la composée de la réflexion orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $(1, 0)$ et de la réflexion orthogonale d'axe dirigé par le vecteur $(1, 0)$?

Exercice 4. On se place dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Écrire la rotation d'angle $\pi/3$ comme la composée de deux réflexions orthogonales.

Exercice 5. Décrire géométriquement les transformations du plan suivantes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Isométries vectorielles en dimension 3

Exercice 6. On considère le plan de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

– Donner un vecteur de norme un, orthogonal à ce plan.

– Donner la matrice de la réflexion orthogonale relativement à ce plan.

– À quoi est égal le carré de cette matrice ?

Exercice 7. Donner la matrice de la rotation de $\mathbf{R}^3$ d'angle $2\pi/3$ et d'axe orienté par le vecteur $(1, 1, 1)$. Même question avec un angle de $4\pi/3$ et de même axe.

Exercice 8. On considère les deux plans H_1 et H_2 de $\mathbf{R}^3$ d'équations

$$H_1 : x_1 = 0, \qquad H_2 : x_2 = 0.$$

À quoi est égale la composée de la réflexion orthogonale relativement à H_1 suivie de la réflexion orthogonale relativement à H_2 ?

Exercice 9. Peut-on écrire toute rotation de $\mathbf{R}^3$ comme composée de deux réflexions orthogonales ?

Écrire la rotation d'axe dirigé par $(1,0,0)$ et d'angle $\pi/2$ comme la composée de deux réflexions orthogonales.

Exercice 10. On considère les six vecteurs de $\mathbf{R}^3$ donnés par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice du produit scalaire dans la base (e_1, e_2, e_3) puis dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). Existe-t-il une rotation envoyant e_1 sur e'_1, e_2 sur e'_2 et e_3 sur e'_3 ? Une réflexion ? Une isométrie vectorielle ?

Géométrie euclidienne

Exercice 11. Soit x, y deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Montrer la formule

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = \mathrm{Aire}(x,y)^2 + (x \mid y)^2$$

où $\mathrm{Aire}(x,y)$ est l'aire du parallélogramme de côtés x, y. On pourra faire un calcul en coordonnées.

On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $(1,1,1)$ et $(1,-1,0)$. Calculer l'aire du parallélogramme dont les côtés sont donnés par ces deux vecteurs. Retrouver le résultat en utilisant le produit vectoriel.

Exercice 12. Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$. On considère l'hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation

$$a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0.$$

– Trouver un vecteur v de norme un orthogonal à cet hyperplan.

– Donner une expression pour la projection orthogonale de $x \in \mathbf{R}^n$ sur la droite dirigée par v.

– En déduire une expression pour la distance $d(x, H)$ de x à H.

– Calculer la distance du vecteur $x = (1,2,3) \in \mathbf{R}^3$ au plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Exercice 13. On considère le sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ donné par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Donner une base orthonormée de H ainsi que la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H. Calculer la distance des vecteurs suivants à H.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $x, y, z \in \mathbf{R}^3$. Calculer les produits vectoriels

$$(x \wedge y) \wedge y, \quad (x \wedge y) \wedge x, \quad (x \wedge x) \wedge y.$$

Montrer les formules

$$(x \wedge y) \wedge z = (x \mid z)\, y - (y \mid z)\, x,$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \mid z)\, y - (x \mid y)\, z.$$