Feuille 5 : Géométrie

Géométrie affine

Exercice 1. Soit A, B, C trois points d'un espace affine de coordonnées

$$A\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Calculer la longueur de la médiane du triangle ABC issue de A.

Exercice 2. Soient A, B, C trois points de l'espace affine de dimension 3. Montrer que

$$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}.$$

En déduire la formule de trigonométrie classique, lorsque les trois points sont distincts

$$\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})}{BC}=\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})}{AC}=\frac{\sin(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})}{AB}.$$

Exercice 3. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine. Étant donnés trois points distincts A', B', C' de ce plan, montrer qu'il existe une unique transformation affine envoyant A sur A', B sur B' et C sur C'.

Exercice 4. Montrer qu'une transformation affine bijective f du plan préserve les rapports d'aire : pour tous points A, B, C, D, E, F avec D, E, F non alignés,

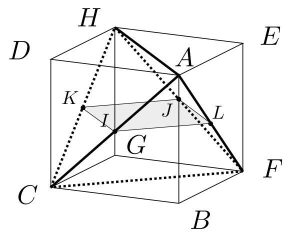
$$\frac{\mathrm{Aire}(f(A)f(B)f(C))}{\mathrm{Aire}(f(D)f(E)f(F))}=\frac{\mathrm{Aire}(ABC)}{\mathrm{Aire}(DEF)}.$$

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. Montrer que les triangles AGB, AGC et BGC ont même aire.

Exercice 5. Soit un cube de sommets

$$A\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix},\ D\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},$$

$$E\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix},\ G\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix},\ H\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}.$$



1. Montrer que les droites (AC) et (FH) sont orthogonales.

2. Soient I, J, K, L les milieux respectifs de $[A, C]$, $[F, H]$, $[H, C]$, $[A, F]$. Montrer que I, J, K, L forment un parallélogramme.

3. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont orthogonales.

Exercice 6. On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'ensemble des points M appartenant au plan passant par trois points A, B et C non colinéaires satisfait l'équation

$$\left((\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM})\mid\overrightarrow{CM}\right)=0.$$

Donner l'équation du plan affine passant par les points de coordonnées $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

Isométries affines

Exercice 7. Soit A, B deux points distincts d'un plan affine euclidien orienté.

– Montrer qu'une isométrie affine directe qui fixe à la fois A et B est égale à l'identité.

– Montrer que pour tous points A', B' du plan tels que $A'B' = AB$, il existe une unique isométrie affine préservant l'orientation et envoyant A sur A', B sur B'.

– Décrire l'isométrie affine directe envoyant les points A et B de coordonnées $(-1, 2)$, $(3, 1)$ sur les points A', B' de coordonnées $(2, 3)$, $(-1, -1)$.

– *Cas d'égalité des triangles.* Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan affine. Montrer qu'il existe une isométrie affine envoyant A sur A', B sur B', C sur C' si et seulement si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$, ou encore si et seulement si

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \bmod \pi.$$

Exercice 8. On se place sur le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé et on considère les deux droites d'équations

$$D_1 : x + y = 1, \qquad D_2 : y = x.$$

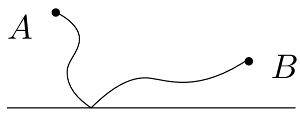
Dessiner ces droites. À quoi est égale la composée de la réflexion orthogonale relativement à D_1 suivie de la réflexion orthogonale relativement à D_2 ? Même question pour les droites

$$D_1 : x - y - 1 = 0, \qquad D_2 : x - y + 1 = 0.$$

Exercice 9. Soit A, B deux points du plan affine. Déterminer la composée de la symétrie centrale de centre A suivie de la symétrie centrale de centre B. Même question dans l'espace.

Exercice 10. Soient A, B deux points du plan affine euclidien orienté. On note M' l'image d'un point M du plan par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ et M'' l'image de M par la rotation de centre B et d'angle $-\pi/2$. Montrer que le milieu de $[M'M'']$ est indépendant de M.

Exercice 11. On considère dans le plan affine les points A, B de coordonnées $(-2, 2)$ et $(2, 1)$. Trouver le chemin le plus court allant de A à B et passant par l'axe des abscisses.



Exercice 12. Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles du plan affine euclidien de même centre et de rayons R_1 et R_2 différents. Soit A un point sur $\mathcal{C}_1$; construire si possible un carré $ABCD$ tel que B est sur $\mathcal{C}_1$ et C et D sont sur $\mathcal{C}_2$. *Indication : D est l'image de B par une certaine isométrie.*

Exercice 13. On se place dans un plan affine muni d'un repère affine orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère les applications affines définies dans ce repère par les équations suivantes :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ x \end{pmatrix}, \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2 \\ x-2 \end{pmatrix}, \quad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ -x \end{pmatrix}, \quad f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce sont des isométries et déterminer leurs caractéristiques géométriques.

Exercice 14. On se place dans un espace affine muni d'un repère affine orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les applications affines définies dans ce repère par les équations suivantes :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-z \\ 2+x \end{pmatrix}, \qquad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+z \\ -y \\ -2+x \end{pmatrix}, \qquad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2+x \\ -z \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce sont des isométries et déterminer leurs caractéristiques géométriques.
Décrire les applications $f_1 \circ f_1 \circ f_1$ et $f_3 \circ f_3$.