PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES DES DISCRÉTISATIONS D'UN HOMÉOMORPHISME GÉNÉRIQUE — ADDENDUM

par

Pierre-Antoine Guihéneuf

L'idée de cet addendum est d'adapter les preuves de [**Gui13**] au cas des discrétisations de conjuguées génériques d'homéomorphimes conservatifs. Plus précisément, on se fixe un homéomorphisme conservatif f et on s'intéresse aux propriétés dynamiques des discrétisations des homéomorphismes hfh^{-1}, où h est un homeomorphisme conservatif générique. Cela revient à se poser la question : étant donnée une dynamique f, que devient cette dynamique pour les discrétisations d'une réalisation générique de cette dynamique. Une autre manière de voir cela est de se fixer un homéomorphisme f et de regarder ses discrétisations sur une suite de grille générique, où par définition une suite de grille générique est l'image d'une bonne suite de grilles par un homéomorphisme générique donné. En fait, sous des hypothèses assez peu restrictives, les résultats sont les mêmes que pour les homéomorphismes conservatifs génériques, à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soit f un homéomorphisme conservatif dont l'ensemble des points fixes est d'intérieur vide, et $\sigma : E_N \to E_N$ telles que $d(f(x), \sigma(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in E_N$. Alors il existe un homéomorphisme conservatif h tel que si on pose $g = hfh^{-1}$, on a $d(h, \mathrm{Id}) < \varepsilon$ et $g_N = \sigma$ (et cela sur tout un voisinage de h).*

Preuve de la proposition 1. — Soient $x_1, \dots, x_{q_N}$ les points de E_N ; on commence par définir par récurrence une suite de points $(x'_1, y'_1, \dots, x'_{q_N}, y'_{q_N})$ qui sera proche de $(x_1, f(x_1), \dots, x_{q_N}, f(x_{q_N}))$. Étant donné $x_\ell \in E_N$, il existe un point x'_ℓ de X très proche de x_ℓ, qui n'est pas un point fixe de f et qui est différent de tous les points $x'_1, f(x'_1), \dots, x'_{\ell-1}, f(x'_{\ell-1})$. De même il existe un point y'_ℓ très proche de $\sigma(x_\ell)$ et différent de tous les points $x'_1, y'_1, \dots, x'_{\ell-1}, y'_{\ell-1}, x'_\ell$. Ainsi de suite, cela permet finalement de définir un ensemble $(x'_1, y'_1, \dots, x'_{q_N}, y'_{q_N})$.

On est maintenant en mesure de construire h à l'aide de la proposition d'extension des applications finies : on choisit un homéomorphisme conservatif h tel que pour tout ℓ, $h(x'_\ell) = x_\ell$ et $h(f(x'_\ell)) = y'_\ell$. Puisque pour tout ℓ, x'_ℓ est arbitrairement proche de x_ℓ, $\sigma(x_\ell)$ est arbitrairement proche de y'_ℓ et $f(x_\ell)$ est ε-proche de $\sigma(x_\ell)$, on peut choisir h tel que $d(h, \mathrm{Id}) < \varepsilon$. De plus, par construction, si on pose $g = hfh^{-1}$, alors $g_N = \sigma$. $\square$

Références

[Gui13] P.-A. Guihéneuf – « Dynamical properties of spatial discretizations of a generic homeomorphism », To appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2013.

3 février 2014

Pierre-Antoine Guihéneuf • *E-mail :* pierre-antoine.guiheneuf@math.u-psud.fr, Laboratoire de mathématiques CNRS UMR 8628, Université Paris-Sud 11, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex FRANCE